COLLOQUIUM MATHEMATICUM
VOL. XIX 1968 FASC. 1

UNE REMARQUE SUR LES SÉRIES DE RADEMACHER ET LES DOMAINES D'HOLOMORPHIE

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE (ORSAY)

Nous nous proposons d'appliquer une idée d'Emile Borel à l'étude de certains domaines d'holomorphie. L'idée de Borel était qu'en choisissant les coefficients d'une série de Taylor de façon "quelconque", le cercle de convergence est presque toujours une coupure [1]. L'idée a été précisée par Steinhaus [5], Paley-Zygmund [3], et Ryll-Nardzewski [4]. Nous voudrions montrer que la méthode de Ryll-Nardzewski s'applique de manière intéressante aux séries de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Désignons par ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, telles que

$$p(\varepsilon_n = 1) = p(\varepsilon_n = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

On peut concevoir les ε_n comme des fonctions de Rademacher définies sur le champ de probabilité $[0, 1]$.

Etant donnée une matrice complexe infinie

$$S = (a_{nm}) \quad (n = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots)$$

telle que

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 1 \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

on dit qu'une série à termes complexes $\sum_1^\infty u_n$ est *S-sommable* si l'expression

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} u_m$$

a un sens.

LEMME 1. *Si la série* $\sum_1^\infty \varepsilon_n u_n$ *est S-sommable avec une probabilité positive, on a* $\sum_1^\infty |u_n|^2 < \infty$.

Une démonstration de ce lemme (sinon son énoncé) se trouve en [6], chapitre V.

Soit maintenant Ω un ouvert de C^p, $\varphi_n(z) = \varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ ($n = 1, 2, \ldots$) une suite de fonctions analytiques dans Ω, G un ouvert de Ω où la série

$$\sum_1^\infty \varphi_n(z) \tag{1}$$

est normalement convergente sur tout compact (c'est-à-dire

$$\sum_1^\infty \sup_{z \in K} |\varphi_n(z)| < \infty$$

pour tout compact K contenu dans G), et $f(z)$ la somme de la série (1) dans G.

Lemme 2. *Si f admet un prolongement analytique dans un polydisque D centré en un point a de G, on peut associer à tout point z_0 de D une matrice S telle que* (1) *soit S-sommable pour $z = z_0$.*

Si en effet on écrit la formule de Taylor

$$f(z_0) = \sum_j \frac{1}{j!} D^j f(a)(z_0 - a)^j,$$

la somme étant prise pour tous les multiindices $j = (j_1, \ldots, j_p)$, on peut définir S par

$$a_{nm} = (\varphi_n(z_0))^{-1} \sum_{|j| \leqslant m} \frac{1}{j!} D^j \varphi(a)(z_0 - a)^j;$$

où $|j| = |j_1| + \ldots + |j_p|$, si $\varphi_n(z_0) \neq 0$, et $a_{nm} = 1$ si $\varphi_n(z_0) = 0$.

Les lemmes 1 et 2 sont les outils utilisés par Ryll-Nardzewski en [4]. Dans nos hypothèses, ils fournissent immédiatement la proposition suivante: *si l'on a*

$$\sum_1^\infty |\varphi_n(z)|^2 = \infty \tag{2}$$

pour $z \in \Omega \setminus G$, G est presque sûrement le domaine d'holomorphie de la fonction aléatoire

$$f_\varepsilon(z) = \sum_1^\infty \varepsilon_n \varphi_n(z). \tag{3}$$

On retrouve ainsi certains domaines d'holomorphie classiques (voir p. ex. [2]). Voici une variante: *si la série* (1) *est normalement convergente* *sur un compact K contenu dans Ω, et si l'on a* (2) *quand $z \in \Omega \setminus K$, l'intérieur de K est presque sûrement le domaine d'holomorphie de la fonction aléatoire* (3), *continue sur K.*

Comme application, soit K un compact holomorphiquement convexe dans Ω, c'est-à-dire un compact K dans Ω tel que, pour tout $\zeta \in \Omega \setminus K$, il existe une fonction ψ analytique dans Ω, telle que $|\psi(z)| \leqslant 1$ sur K et $|\psi(\zeta)| > 1$. On peut définir K comme l'ensemble des z de Ω tels que

$$|\psi_n(z)| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où ψ_n est une suite convenable de fonctions analytiques dans Ω. De plus, on peut supposer que chaque fonction $\psi_m(z)$ se retrouve une infinité de fois dans la suite $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Choisissons une suite d'entiers p_n tendant vers l'infini, et une suite positive η_n tendant vers zéro, de sorte que

$$\sum_1^\infty e^{-\eta_n p_n} < \infty, \tag{4}$$

et posons

$$\varphi_n(z) = e^{-\eta_n p_n} \psi_n^{p_n}(z).$$

Pour tout choix des ε_n, la fonction $f_\varepsilon(z)$ définie par (3) est continue sur K et holomorphe à l'intérieur de K. Comme, pour tout $z \in \Omega \setminus K$, on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\varphi_n(z)| > 0,$$

son domaine d'holomorphie est p. s. l'intérieur de K. On obtient ainsi le résultat suivant, qui est peut-être nouveau:

Si K est un compact holomorphiquement convexe dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^p$, il existe une fonction continue sur K, analytique à l'intérieur, dont le domaine d'holomorphie est l'intérieur de K.

En imposant à la série (4) d'être assez rapidement convergente, on peut d'ailleurs obtenir une fonction aléatoire $f_\varepsilon(z)$ dont toutes les dérivées, définies à l'intérieur de K, soient prolongeables par continuité à la frontière de K.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Borel, *Sur les séries de Taylor*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 123 (1896), p. 1051-1052.

[2] R. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall 1965.

[3] R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, *On some series of functions*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 28 (1932), p. 190-205.

[4] C. Ryll-Nardzewski, *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Studia Mathematica 13 (1953), p. 30-36.

[5] H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*, Mathematische Zeitschrift 31 (1930), p. 408-416.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge 1959.

Reçu par la Rédaction le 13. 3. 1967