COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIX 1968 FASC. 1

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE ANZAHL DER ZAHLEN pr^2 UNTERHALB x

VON

WOLFGANG SCHWARZ (FREIBURG i. BR.)

Es bezeichne $A(x)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen unterhalb x, die als Produkt einer Primzahl p und eines Quadrates r^2 darstellbar sind. Aus dem Primzahlsatz leitete Cohen [2] die Beziehung

$$A(x) = \sum_{pr^2 \leqslant x}\sum 1 = \frac{1}{6}\pi^2 x \log^{-1} x + O(x \log^{-2} x) \tag{1}$$

her. Seine Methode wurde von Horadam [4] für ein etwas allgemeineres Problem direkt übernommen.

Ziel dieser Note ist eine asymptotische Entwicklung von $A(x)$ nach fallenden Potenzen von $\log x$. Der Beweis ist elementar.

Sei $k \geqslant 0$ eine beliebig gewählte ganze Zahl; wir setzen den Primzahlsatz in der Gestalt

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O_k(x \log^{-k-2} x) \tag{2}$$

voraus, wobei die O-Konstante von k abhängen darf (1). Dabei ist

$$\operatorname{li} y = \int_2^y \log^{-1} v\, dv.$$

Führt man die Substitution $v = xu^{-2}$ aus und setzt man zur Abkürzung

$$b = \sqrt{xy^{-1}}, \qquad B = \sqrt{\tfrac{1}{2}x} \qquad \text{und} \qquad f(x, u) = u^{-3}\big(\log(xu^{-2})\big)^{-1},$$

so erhält man

$$\operatorname{li} y = 2x \int_b^B f(x, u)\, du. \tag{3}$$

(1) Formel (2) wurde auf elementarem Wege von Wirsing [10 b] und Bombieri [1 b] bewiesen. Mit analytischen Hilfsmitteln sind natürlich bessere Ergebnisse erzielt worden (vgl. [9], S. 187 und 226).

Nun ist

$$A(x) = \sum_{r^2 \leqslant x} \pi(xr^{-2}) = \sum_{r \leqslant B} \pi(xr^{-2}) = H + F, \tag{4}$$

wobei sich nach (2) für das Fehlerglied

$$F = O\Big\{\sum_{r^4 \leqslant x} xr^{-2}\big(\log(xr^{-2})\big)^{-k-2} + \sum_{r^4 > x} xr^{-2}\Big\} = O_k(x\log^{-k-2}x)$$

ergibt. Für das Hauptglied erhält man (mit (3))

$$H = \sum_{r \leqslant B} \mathrm{li}(xr^{-2}) = 2x \sum_{r \leqslant B} \int_r^B f(x, u)\,du.$$

Vertauschung von Summation und Integration gibt

$$H = 2x \cdot \int_1^B \Big(\sum_{r \leqslant u} 1\Big) \cdot f(x, u)\,du.$$

Setzt man nun $D = x^{1/4}$ und schätzt man das Integral von D bis B in offensichtlicher Weise ab, so erhält man

$$H = 2x \int_1^D [u] \cdot \Big\{u^3 \log x \cdot \Big(1 - \frac{2\log u}{\log x}\Big)\Big\}^{-1} du + O(x^{3/4}). \tag{5}$$

Wegen $(1-z)^{-1} = 1 + z + \ldots + z^k + z^{k+1}(1-z)^{-1}$ folgt aus (5):

$$H = \frac{2x}{\log x} \sum_{\varkappa=0}^{k} \frac{1}{(\log x)^\varkappa} \int_1^D [u] \cdot u^{-3}(2\log u)^\varkappa du + O_k\big(x(\log x)^{-k-2}\big),$$

und wegen

$$x \int_D^\infty [u] u^{-3} \cdot (2\log u)^\varkappa du = O_k(x^{1-1/8})$$

für $\varkappa \leqslant k$ erhält man schließlich

$$H = x \log^{-1} x \sum_{\varkappa=0}^{k} C_\varkappa \log^{-\varkappa} x + O_k\big(x(\log x)^{-k-2}\big) \tag{6}$$

mit den Konstanten

$$C_\varkappa = 2 \int_1^\infty [u] u^{-3} \cdot (2\log u)^\varkappa du. \tag{7}$$

Die Konstanten $C_\varkappa$ lassen sich mit Hilfe der Ableitungen der ζ-Funktion an der Stelle 2 in anderer Gestalt ausdrücken; partielle Summation gibt

$$(-2)^\varkappa \zeta^\varkappa(2) = 2^\varkappa \sum_1^\infty n^{-2}(\log n)^\varkappa = 2^\varkappa \int_1^\infty [u]u^{-3}\{2\log^\varkappa u - \varkappa(\log u)^{\varkappa-1}\}du,$$

also ist

$$(8)\qquad \begin{cases} C_0 = \zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2, \\ C_1 = -2\zeta'(2)+\frac{1}{6}\pi^2, \\ C_2 = 4\zeta''(2)-4\zeta'(2)+\frac{1}{3}\pi^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_\varkappa = (-2)^\varkappa\cdot\zeta^{(\varkappa)}(2)+\varkappa C_{\varkappa-1}. \end{cases}$$

Aus (4), (6) und (8) erhalten wir somit:

Für die Anzahl $A(x)$ der Zahlen der Gestalt $p\cdot r^2$ unterhalb x gilt für jedes ganze $k \geqslant 0$ die asymptotische Formel

$$A(x) = C_0 x\log^{-1}x + C_1 x\log^{-2}x + \ldots + C_k x\log^{-k-1}x + O_k(x\log^{-k-2}x),$$

wobei $C_0 = \frac{1}{6}\pi^2$ ist und die weiteren Konstanten rekursiv mit Hilfe von (8) *durch die Werte $\zeta(2)$, $\zeta'(2), \ldots$ ausgedrückt werden können. Die O-Konstante hängt von k ab.*

Bemerkung 1. Dieselbe Beweismethode kann angewandt werden, um die Anzahl der Zahlen der Gestalt $p\cdot r^n$ ($n \geqslant 2$ ganz) oder die Anzahl der Zahlen der Gestalt $p_1 \ldots p_t \cdot r^n$ ($t \geqslant 2$, fest) unterhalb x zu bestimmen. Man benötigt die asymptotische Beziehung

$$\pi_t(x) = \sum_{p_1\ldots p_t \leqslant x} 1 \sim \big((t-1)!\big)^{-1} x(\log\log x)^{t-1}\cdot(\log x)^{-1}$$

(vgl. [3], Theorem 437) oder Verschärfungen dieser Formel (vgl. [5] oder [7]).

Bemerkung 2. Eine asymptotische Formel für $A(x)$ läßt sich auch mit Hilfe der Methode der komplexen Integration (vgl. Prachar [6], III, § 3 und § 5, oder Landau [5], oder Scourfield [8], sect. IV) ableiten, da die erzeugende Dirichletreihe $\sum\limits_p \sum\limits_r p^{-s}r^{-2s}$ bis auf einen "harmlosen" Faktor sich wie log $\zeta(s)$ verhält.

Bemerkung 3. Es wäre wünschenswert, eine asymptotische Formel der Gestalt

$$A(x) = \text{Hauptglied} + O\big(R(x)\big)$$

zu erhalten, wobei $R(x)$ die Größenordnung des Restgliedes im Primzahlsatz besitzt, also etwa

$$R(x) = x\cdot\exp\left(-(\log x)^{3/5-\varepsilon}\right).$$

Dem Referenten, Herrn Dr. W. Narkiewicz, danke ich für einige wertvolle Anregungen; insbesondere stammen Bemerkung 1 und 2 von ihm.

LITERATURNACHWEIS

[1a, b] E. Bombieri, *Maggiorazione del resto nel „Primzahlsatz" col metodo di Erdös-Selberg*, Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A96 (1962), S. 343-350; *Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel „Primzahlsatz"*, Rivista di Matematica della Università di Parma (2) 3 (1962), S. 393-440.

[2] E. Cohen, *Arithmetical notes IX. On the set of integers representable as a product of a prime and a square*, Acta Arithmetica 7 (1962), S. 417-420.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, third edition, Oxford 1954.

[4] E. M. Horadam, *The average order of the number of generalised integers representable as a product of a prime and a square*, Journal für reine und angewandte Mathematik 217 (1965), S. 64-68.

[5] E. Landau, *Über die Verteilung der Zahlen, welche aus v Primfaktoren zusammengesetzt sind*, Nachrichten der Akademie der Wissenschaften Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1911, S. 361-381.

[6] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[7] H. E. Richert, *Über quadratfreie Zahlen mit genau r Primfaktoren in einer arithmetischen Progression*, Journal für reine und angewandte Mathematik 192 (1953), S. 180-203.

[8] E. J. Scourfield, *On the divisibility of $\sigma_r(n)$*, Acta Arithmetica 10 (1964), S. 245-285.

[9] A. Walfisz, *Weyl'sche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Berlin 1963.

[10a, b] E. Wirsing, *Elementare Beweise des Primzahlsatzes mit Restglied, I, II*, Journal für reine und angewandte Mathematik 211 (1962), S. 205-214; 214/15 (1964), S. 1-18.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1967;

en version modifiée le 12. 5. 1967