COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIX 1968 FASC. 1

INTERPOLATION UND GLEICHVERTEILUNG IN BOHR'S KOMPAKTIFIZIERUNG

VON

S. HARTMAN (WROCŁAW)

Die in [4], [5] und andererorten verwendete Eigenschaft $\boldsymbol{I}_0$ von Mengen in lokal kompakten abelschen (LCA) Gruppen sei hier wiedergegeben: $E \subset G$ heißt eine $\boldsymbol{I}_0$-*Menge* oder eine *Menge von Ryll-Nardzewski*, falls jede beschränkte Funktion auf D zu einer fastperiodischen (fp.) Funktion auf G, d. h. zu einer stetigen Funktion auf der Bohrschen Kompaktifizierung $\tilde{G}$ der Gruppe G erweitert werden kann.

Erwartungsgemäß haben sich $\boldsymbol{I}_0$-Mengen als "dünn" erwiesen. So z. B. die "schwache" Abschließung $\tilde{E}$ von E als Teilmenge von $\tilde{G}$ hat das Haarsche Maß μ gleich Null und allgemeiner: $\tilde{E}$ trägt kein Maß, dessen Fouriertransformierte im Unendlichen nach Null geht [6]. Ist G separabel und nicht kompakt, so ist $E+K \neq G$ für jede kompakte Menge $K \subset G$ [5] u. dgl. In diesem Zusammenhang rückt die Frage nahe, ob die Spärlichkeit von E sich auch in der algebraischen Struktur von $\tilde{E}$ widerspiegelt. Zum Teil ist das tatsächlich der Fall, es gilt nämlich:

SATZ 1. *Ist G metrisch (d. h. ist das 1. Abzählbarkeitsaxiom in G erfüllt) und $E \in \boldsymbol{I}_0$, so gibt es eine "starke" (d. h. der ursprünglichen Topologie entsprechende) Umgebung U des Nullelements in G mit $(\tilde{E}-\tilde{E}) \cap U = (0)$.*

Das ist eine einfache Konsequenz der "Verdickungssatzes": Für jede Menge $E \in \boldsymbol{I}_0$ gibt es eine starke Umgebung U von Null (einen "Modul" für E), so daß $E+U$ eine $\boldsymbol{I}$-Menge ist (damit ist gemeint, daß jede beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion auf $E+U$ zu einer fp. Funktion fortsetzbar ist). Aus diesem Satz, der für separable LCA-Gruppen in [5] und für alle metrischen LCA-Gruppen, in verschärfter Form, in [7] bewiesen wurde, ergibt sich Satz 1 folgendermaßen: Ist U ein Modul für E und $0 \neq t_0 \in U$, so ist $E \cup (E+t_0)$ eine $\boldsymbol{I}_0$-Menge. Dabei darf $\bar{E} \cap \overline{E+t_0} = \emptyset$ ($\bar{A}$ = gewöhnliche Abschließung von A in R) angenommen werden. Das folgt aus dem im Beweise des Verdickungssatzes selbst benutzten Umstand, daß in einer $\boldsymbol{I}_0$-Menge die Entfernung von je zwei verschiedenen Punkten nicht beliebig klein sein kann, was sich wieder sofort aus der gleichmäßigen Stetigkeit der fp. Funktionen ergibt. Wir setzen nun $\varphi(t) = 0$ für $t \epsilon E$ und $\varphi(t) = 1$ für $t \epsilon E + t_0$. Wäre t_0 ein Element von $\tilde{E} - \tilde{E}$, so gäbe es für jede fp. Funktion f ein Punktepaar $t_1, t_2 \epsilon E$ mit

$$|f(t_1 + t_0) - f(t_2)| < 1.$$

Das ist aber für keine fp. Fortsetzung von φ möglich, und φ ist ja fastperiodisch fortsetzbar.

Ist G metrisch und nicht diskret, so fogt aus Satz 1, daß $\mu(\tilde{E}) = 0$. Sonst müßte $\tilde{E} - \tilde{E}$ eine volle Umgebung des Nullelements in $\tilde{G}$ und demnach auch eine starke Umgebung der Null in G enthalten. Das scheint der einfachste Beweis für das Verschwinden des Haarschen Maßes auf $\tilde{E}$ zu sein. Er funktioniert nicht, falls G diskret ist, weil dann $U = (0)$ sein kann. Satz 1 dürfte zu der Vermutung veranlassen, die in [3] geäußert wurde (P 572), daß $\mathrm{Gp}(\tilde{E})$ (d. h. die durch $\tilde{E}$ erzeugte Untergruppe von $\tilde{G}$) niemals ganz $\tilde{G}$ ausmacht. Das ist aber falsch, denn es gilt:

Satz 2. *Die Menge*

$$M = \{2^{2n+1}\} \cup \{2^{2n} - \tfrac{1}{2}\sqrt{n}\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist eine $\boldsymbol{I}_0$-Menge in R, aber $Gp(\tilde{M}) = \tilde{R}$.

Hier ist der einfache Beweis: $M \epsilon \boldsymbol{I}_0$ ergibt sich daraus, daß M eine lakunäre Folge bildet [8]. Betrachten wir nun das "abelsche Wort" $x_1 - 2x_2$, wo die Veränderlichen x_1 und x_2 die Menge M durchlaufen. Für $x_1 = 2^{2n+1}$, $x_2 = 2^{2n} - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ist der Wert dieses Wortes $\sqrt{n}$. Die Folge $\{\sqrt{n}\}$ ist aber in R gleichverteilt, was bedeutet, daß der Mittelwert jeder fp. Funktion gleich

$$\lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\sqrt{n})$$

ist [1], oder äquivalenterweise, daß $\{\sqrt{n}t\}$ für jedes reelle t mod 1 gleichverteilt ist. Danach liegt die Folge $\{\sqrt{n}\}$ in $\tilde{R}$ dicht und umsomehr ist das Bild von $\tilde{M}$ vermöge $x_1 - 2x_2$ dicht in $\tilde{R}$, zugleich aber kompakt, daher mit $\tilde{R}$ identisch.

Für $G = Z$ (Gruppe der ganzen Zahlen) ist eine analoge Konstruktion noch einfacher: die Menge

$$N = \{2^{2n+1} - n\} \cup \{2^{2n} - n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist eine $\boldsymbol{I}_0$-Menge in Z, weil sie eine solche in R darstellt. Das Wort $x_1 - 2x_2$ bildet N auf ganz Z und damit $\tilde{N}$ auf ganz $\tilde{Z}$ ab. Wohl kann man aber auch die vorige Konstruktion fast genau wiederholen, indem man

$$N = \{2^{2n+1} - [\sqrt{n}]\} \cup \{2^{2n} - [\sqrt{n}]\}$$

setzt, weil es nur darauf ankommt, daß die Folge $\{[\sqrt{n}]\}$ in $\tilde{Z}$ dicht liege, und das tut sie, was man entweder direkt beweisen oder aus folgendem Satze schließen kann, der vielleicht für sich von Interesse ist:

SATZ 3. *Ist die Folge $\{a_n\}$ in R gleichverteilt, so ist $\{[a_n]\}$ in Z gleichverteilt.*

Beweis. Die schwache Abschließung $\tilde{Z}$ von Z in $\tilde{R}$ ist zugleich die Bohrsche Kompaktizierung von Z, weil die fp. Funktionen auf Z genau die zu Z eingeengten fastperiodischen Funktionen auf R sind. Nun ist offenbar $\tilde{Z} + [0, 1] = (Z + [0, 1])^{\sim} = \tilde{R}$. Die Zerlegung von $x \in \tilde{R}$ in $y \in \tilde{Z}$ und $\delta \in [0, 1]$ ist eindeutig bis auf den Fall $x \in \tilde{Z}$. In der Tat: wenn $y_1 + \delta_1 = y_2 + \delta_2$, dann ist $y_1 - y_2$ oder $y_2 - y_1$ eine Zahl aus $[0,1]$; da aber in $\tilde{Z}$ jedes Element entweder eine ganze Zahl oder keine Zahl ist, so kommt entweder $y_1 = y_2$ oder $y_1 = y_2 \pm 1$. Das Kompaktum $\tilde{R}$ entsteht also aus dem Produkt $P = \tilde{Z} \times [0,1]$ durch Identifizierung von $(y, 1)$ mit $(y+1, 0)$. Sei μ das Haarsche Maß in $\tilde{R}$, ν ein solches in $\tilde{Z}$ und m das Lebesguesche Maß in $[0,1]$. Für das Produkt $\pi = \nu \times m$ gilt $\pi(A + (x, \delta)) = \pi(A)$ für jede Borelmenge A, wo die Verschiebung um (x, δ) im Sinne der folgenderweise erklärten Operation zu verstehen ist: $(x_1, \delta_1) + (x_2, \delta_2) = (x_1 + x_2, \delta_1 + \delta_2)$ oder $(x_1 + x_2 + 1, \delta_1 + \delta_2 - 1)$, je nachdem $\delta_1 + \delta_2 \leqslant 1$ oder > 1. Beim Übergang von P zu $\tilde{R}$ werden ersichtlich nur gewisse Nullmengen in P mit Mengen auf der "Achse" $\tilde{Z}$ identifiziert. Anderseits hat man $\mu(\tilde{Z}) = 0$, weil $\tilde{Z}$ eine Untergruppe von $\tilde{R}$ ohne innere Punkte ist. Daher darf $\pi = \mu$ gesetzt werden.

Nun wollen wir die Gleichverteilung der Folge $\{a_n\}$ dem Wortsinne nach auffassen: Für jede abgeschlossene Menge A in $\tilde{R}$, deren Rand das μ-Maß Null hat, gilt

$$\lim_n \frac{N(n)}{n} = \mu(A),$$

wo $N(n)$ die Anzahl der a_j in A mit $j \leqslant n$ bedeutet (vgl. [2]). Wegen $\mu(\tilde{Z}) = 0$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle a_n als nicht ganzzahlig annehmen. Ist nun B eine abgeschlossene Menge in $\tilde{Z}$, deren Rand das ν-Maß Null hat, so hat der Rand von $A = B \times [0,1]$

das μ-Maß Null. Anderseits gilt $a_j \in A$ genau dann, wenn $[a_j] \in B$. Es folgt daher

$$\lim_n \frac{N(n)}{n} = \mu(A) = \nu(B),$$

wo $N(n)$ die Zahl der a_j mit $[a_j] \in B$ und $j \leqslant n$ bedeutet. Das schließt den Beweis.

Zu der Gleichverteilung von Folgen $\{k_n\}$ in Z bemerken wir noch Folgendes: Sie ist gleichbedeutend damit, daß

$$\lim_n \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{itk_n} = 0$$

für jedes $t \in (0, 2\pi)$ gilt. Für ein irrationales t genügt dann die Folge $\{k_n t\}$ dem Weylschen Kriterium, also: Ist die Folge $\{k_n\}$ in Z gleichverteilt, so ist die Folge $\{k_n t\}$ für jedes irrationale t gleichverteilt mod 1. Die umgekehrte Aussage wäre falsch, weil z. B. $\{n^2\}$ nicht gleichverteilt in Z ist, was sich mühelos feststellen läßt.

Wir gehen noch auf die Frage ein, wie $Gp(\tilde{E})$ für $E \in \boldsymbol{I}_0$ aussieht und auf welche Art $Gp(\tilde{E}) = \tilde{G}$ zustande kommen kann. Es ist natürlich wohlmöglich, daß $Gp(\tilde{E}) \neq \tilde{G}$ sei. Das ist z. B. dann der Fall, wenn E in einer abgeschlossenen echten Untergruppe von G enthalten ist, z. B. nur aus ganzen Zahlen in R besteht. Es ist auch möglich, daß $Gp(\tilde{E})$ eine dichte echte Teilmenge von $\tilde{G}$ bildet. Das kommt z. B. dann vor, wenn $G = R$ und E aus den Zahlen 2^n und aus $\sqrt{2}$ besteht, weil hier bereits $Gp(E)$ stark dicht in R liegt, wohl aber card $\left(Gp(\tilde{E}) \setminus Z\right) = \aleph_0$. Dieser Fall tritt auch immer dann ein, wenn E in R ultrakroneckersch ist (sieh [3]). Das in Satz 2 angegebene Beispiel ist aber typisch in seiner Art, in dem Sinne, daß für zusammenhängendes $\tilde{G}$, also insb. für zusammenhängendes G, nur dann $Gp(\tilde{E}) = \tilde{G}$ sein kann, wenn bereits ein abelsches Wort $n_1 x_1 + \ldots + n_k x_k$ die Menge $\tilde{E}^k$ auf ganz $\tilde{G}$ abbildet. Der Wörter gibt es nämlich abzählbar viele und sie liefern abgeschlossene Bildmengen, daher muß es dem Baireschen Satz zufolge eines geben, dessen Bildmenge innere Punkte hat. Ist ein Wort $w(x)$, in etwa r Variablen (d. h. $x \in A^r$), derart beschaffen, so füllt das Wort $w_1(\xi) = w(x) w^{-1}(y)$, $x, y \in \tilde{E}^r$, eine Umgebung V des neutralen Elements aus. Die Zusammenhangsgründe ergeben

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V^m = \tilde{G},$$

und wegen der Kompaktheit muß für ein m_0 bereits $V^{m_0} = \tilde{G}$ sein. Deshalb leistet das Wort $\prod_{j=1}^{m_0} w_1(\xi_j)$, $\xi_j \in \tilde{E}^{2r}$, das Verlangte.

LITERATURNACHWEIS

[1] J. Cigler, *Folgen normierter Maße auf kompakten Gruppen*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 1 (1962), S. 3-13.

[2] S. Hartman, *Remarks on equidistribution on non-compact groups*, Compositio Mathematica 16 (1964), S. 66-71.

[3] S. Hartman, S. Rolewicz and C. Ryll-Nardzewski, *Ultrakroneckerian sets*, Colloquium Mathematicum 16 (1967), S. 225-229.

[4] S. Hartman and C. Ryll-Nardzewski, *Almost periodic extensions of functions*, ibidem 12 (1964), S. 23-39.

[5] — *Almost periodic extensions of functions II*, ibidem 15 (1966), S. 79-86.

[6] J.-P. Kahane, *Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson*, ibidem 15 (1966), S. 87-92.

[7] J. F. Méla, *Sur les ensembles d'interpolation de C. Ryll-Nardzewski et de S. Hartman*, Studia Mathematica 29 (1968), p. 167-193.

[8] E. Strzelecki, *On a problem of interpolation by periodic and almost periodic functions*, Colloquium Mathematicum 11 (1963), S. 91-99.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 23. 12. 1966