COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXVIII 1978 FASC. 2

SUR LES SUITES DE FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONTINUES ET CONTINUES PRESQUE PARTOUT

PAR

ZBIGNIEW GRANDE (ELBLĄG)

Soit R l'ensemble des nombres réels. Etant donnée une famille X de fonctions réelles d'une variable réelle, désignons par $B_1(X)$ la famille des fonctions qui sont les limites des suites de fonctions de la famille X convergentes en chaque point $x \in R$. Soient C la famille des fonctions continues, P — la famille des fonctions continues presque partout relativement à la mesure de Lebesgue et A — la famille des fonctions approximativement continues. Dans son article [3] Preiss a démontré que $B_1(A) = B_2(C)$, où $B_2(C) = B_1(B_1(C))$. Dans l'article [2] Mauldin a donné la caractérisation suivante de la famille $B_1(P)$:

THÉORÈME 0 ([2], Theorem 3). *Pour qu'une fonction $f: R \to R$ appartienne à la famille $B_1(P)$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition suivante*:

(a) *il existe une fonction $g: R \to R$ de première classe de Baire et un ensemble $Y \subset R$ du type F_σ et de mesure lebesguienne zéro tels que*

$$\{x \in R: f(x) \neq g(x)\} \subset Y.$$

Dans cette communication je démontre que

$$B_1(C) \subsetneqq B_1(A \cap P) \subsetneqq B_1(A) \cap B_1(P).$$

THÉORÈME 1. *Si une fonction $f: R \to R$ appartient à la famille $B_1(A \cap P)$, alors elle satisfait à la condition suivante*:

(b) *étant donnés deux nombres réels a et b tels que $a > b$, si des ensembles non-vides*

$$U \subset \{x \in R: f(x) > a\} \quad et \quad V \subset \{x \in R: f(x) < b\}$$

sont tels que la densité supérieure de la fermeture $\mathrm{Cl}(U)$ *de l'ensemble U soit positive en chaque point $x \in U$ et la densité supérieure de la fermeture* $\mathrm{Cl}(V)$ *de l'ensemble V soit positive en chaque point $x \in V$, alors $U \not\subset \mathrm{Cl}(V)$ ou $V \not\subset \mathrm{Cl}(U)$.*

Démonstration. Supposons par impossible qu'il existe une fonction $f \in B_1(A \cap P)$, deux nombres a et b tels que $a > b$, deux ensembles non-vides $U \subset \{x \in R: f(x) > a\}$ et $V \subset \{x \in R: f(x) < b\}$ tels que $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(V)$, et la densité supérieure de l'ensemble $\mathrm{Cl}(U)$ soit positive en chaque point $x \in U \cup V$. Soit

$$(*) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{pour tout point } x \in R,$$

où toutes les fonctions $f_n \in A \cap P$. Fixons un point $x_1 \in U$. Il existe un indice naturel n_1 tel que $f_{n_1}(x_1) > a$. La fonction f_{n_1} étant approximativement continue, x_1 est un point de densité de l'ensemble $\{x \in R: f_{n_1}(x) > a\}$. La densité supérieure de l'ensemble $\mathrm{Cl}(U)$ au point x_1 est positive, on a donc

$$m\big(\mathrm{Cl}(U) \cap \{x \in R: f_{n_1}(x) > a\}\big) > 0,$$

où $m(Y)$ désigne la mesure lebesguienne de l'ensemble Y. La fonction f_n étant également continue presque partout, il existe donc un point

$$x_1' \in \mathrm{Cl}(U) \cap \{x \in R: f_{n_1}(x) > a\}$$

qui est un point de continuité de la fonction f_{n_1}. Par conséquent, il existe un intervalle fermé I_1 tel que $x_1' \in \mathrm{Int}(I_1)$ (l'intérieur de l'intervalle I_1) et $f_{n_1}(x) > a$ pour tout point $x \in I_1$.

D'autre part, comme $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(V)$, il existe un point $x_2 \in V \cap \mathrm{Int}(I_1)$. Par conséquent, il existe un indice naturel $n_2 > n_1$ tel que $f_{n_2}(x_2) < b$. La fonction f_{n_2} étant approximativement continue et continue presque partout, il existe un intervalle fermé $I_2 \subset \mathrm{Int}(I_1)$ tel que $f_{n_2}(x) < b$ pour tout point $x \in I_2$. En procédant par induction, nous définissons une suite d'indices naturels $n_1 < n_2 < \ldots$ et une suite d'intervalles fermés $\{I_k\}$ telles que $I_{k+1} \subset \mathrm{Int}(I_k)$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et $f_{n_{2k-1}}(x) > a$ et $f_{n_{2k}}(x) < b$ pour tout point $x \in I_k$ et $k = 1, 2, \ldots$ Par conséquent, il existe un point

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

On vérifie facilement que la suite $\{f_n(x_0)\}$ n'est pas convergente, contrairement à $(*)$, ce qui achève la démonstration.

THÉORÈME 2. $B_1(A \cap P) \subsetneqq B_1(A) \cap B_1(P)$.

Démonstration. L'inclusion $B_1(A \cap P) \subset B_1(A) \cap B_1(P)$ est évidente. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \text{ est un nombre rationnel,} \\ 0 & \text{lorsque } x \text{ est un nombre irrationnel.} \end{cases}$$

La fonction f est de deuxième classe de Baire, on a donc, en vertu du théorème de Preiss, $f \in B_1(A)$. D'après le théorème 0, $f \in B_1(P)$. D'autre part, en admettant dans la condition (b) du théorème 1 que $a = 3/4$, $b = 1/4$, U est l'ensemble des nombres rationnels et $V = R - U$, on en conclut que $f \notin B_1(A \cap P)$.

THÉORÈME 3. $B_1(C) \subsetneq B_1(A \cap P)$.

Démonstration. L'inclusion $B_1(C) \subset B_1(A \cap P)$ est évidente.

Soient $A \subset R$ un ensemble parfait et non-dense et $\{r_n\} \subset A$ un ensemble dénombrable dense dans A et tel que tous ses points soient des points d'éclaircie de l'ensemble A. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x = r_n,\ n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{lorsque } x \notin \{r_n\}. \end{cases}$$

Evidemment $f \notin B_1(C)$. Démontrons encore que $f \in B_1(A \cap P)$. Soit $\{J_n^{i,j}\}$, où $i, n = 1, 2, \ldots$ et $j = 1, 2, \ldots, i$, une famille d'intervalles fermés telle que les conditions suivantes soient satisfaites:

(1) étant fixés i et j, la suite $\{J_n^{i,j}\}$ est convergente au sens de la métrique de Hausdorff ([1], p. 106) vers l'ensemble $\{r_j\}$;

(2) étant fixés i et j, les intervalles $J_n^{i,j}$ sont disjoints deux à deux;

(3) étant fixés i et j, le diamètre de l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j}$ ne surpasse pas $1/i$;

(4) étant fixés i et j, tout point r_j ($j = 1, 2, \ldots, i$) est un point de densité de l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j}$;

(5) $A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j} = \emptyset$;

(6) étant fixé $j \leqslant i$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i+1,j} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j} \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots;$$

(7) étant fixé i,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j_1} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j_2} = \emptyset \quad \text{pour } j_1 \neq j_2.$$

A chaque intervalle $J_n^{i,j}$ correspond un intervalle fermé $I_n^{i,j} \subset \operatorname{Int}(J_n^{i,j})$ de manière que, quels que soient i et j, r_j est un point de densité de l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{i,j}$. Posons, pour $i = 1, 2, \ldots$,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x = r_j,\ j = 1, 2, \ldots, i, \\ 1 & \text{pour } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{i,j},\ j = 1, 2, \ldots, i, \\ 0 & \text{pour } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n^{i,j} \text{ et } x \neq r_j,\ j = 1, 2, \ldots, i, \\ \text{linéaire} & \text{pour } x \in J_n^{i,j} - I_n^{i,j},\ j = 1, 2, \ldots, i \text{ et } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

On vérifie facilement que toutes les fonctions f_i sont approximativement continues et continues presque partout et

$$\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x) \quad \text{pour tout point } x \in R.$$

PROBLÈME. La condition (b) du théorème 1 est-elle suffisante pour que $f \in B_1(A \cap P)$? (**P 1023**)

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.
[2] R. D. Mauldin, *σ-ideals and related Baire functions*, Fundamenta Mathematicae 71 (1971), p. 171-177.
[3] D. Preiss, *Limits of approximately continuous functions*, Czechoslovak Mathematical Journal 96 (1971), p. 371-372.

Reçu par la Rédaction le 2. 4. 1976