COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIX 1978 FASC. 1

PRIMARITÉ DES PRODUITS D'ESPACES DE SUITES

PAR

C. SAMUEL (MARSEILLE)

1. Introduction. Deux espaces de Banach E et F sont *isomorphes* s'il existe une application linéaire T de E sur F et deux réels $0 < A \leqslant B$ tels que pour tout $x \in E$

$$A\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant B\|x\|.$$

Un espace de Banach E est *primaire* si, pour toute projection P de E, $P(E)$ ou $(I-P)(E)$ est isomorphe à E.

Le symbole l_∞ notera ici l'espace des suites de scalaires convergeant vers 0 muni de la norme sup (habituellement noté c_0). Pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $(l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ note l'espace de Banach des suites $x = (x_i)$ telles que, pour tout i, $x_i \in l_r$ et $(\|x_i\|) \in l_s$, muni de la norme

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^s\Big)^{1/s} \quad \text{si } 1 \leqslant s < \infty$$

et de la norme

$$\|x\| = \sup_i \|x_i\| \quad \text{si } s = \infty.$$

Nous nous proposons de démontrer que, pour $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $(l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ est un espace primaire. Rappelons que les seuls résultats connus sur les facteurs directs de tels espaces sont ceux de Pełczyński dans le cas $r = s$ (cf. [10]) et de Schechtman qui caractérise dans le cas $r = 2$ et $1 < s < \infty$ les facteurs directs qui ont une base inconditionnelle (cf. [11]); signalons aussi dans cette direction le résultat de Casazza et Bor-Luh Lin (cf. [3]). En utilisant l'exemple 8.2 de [7] et le corollaire 1 de [6] nous voyons immédiatement que, sauf pour $r = 2$ et $1 < s < \infty$, les espaces considérés ici ne sont pas des espaces $\mathscr{L}_p$. Toutes les notions et symboles qui ne sont pas définis dans cet article peuvent être trouvés dans [5], [8] et [12].

2. Notations. Nous notons N l'ensemble des entiers $\geqslant 1$,

$$\varphi\colon N \times N \to N$$

la bijection définie par

$$\varphi(p, q) = \frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q$$

et

$$\varphi^{-1}\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$$

l'application réciproque. Soient (p_k) et (q_k) deux suites d'entiers telles que, pour tout k, $\varphi^{-1}(k) = (p_k, q_k)$. Soit $E = (l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$. Nous notons (e_i) la base canonique de l_r et (e'_i) la suite-base duale; pour $(i, j) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ nous posons

$$e_{i,j} = (0, \ldots, 0, e_i, 0, \ldots) \qquad (e_i \text{ à la } j\text{-ème place});$$

nous savons que $(e_{i,j})$ est une base inconditionnelle et normalisée de E, nous notons $(e'_{i,j})$ la suite-base duale. Pour chaque entier k nous posons $f_k = e_{\varphi^{-1}(k)}$. Nous notons, pour chaque entier n, $P_n\colon E \to l_r$ l'application qui à $x = (x_n) \in E$ associe $P_n(x) = x_n$ et, pour chaque entier m, $Q_m\colon l_r \to l_r$ l'application qui à

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} e'_i(y)e_i \in l_r$$

associe

$$Q_m(y) = \sum_{i=1}^{m} e'_i(y)e_i.$$

3. Théorème principal. *Soit $u\colon E \to E$ une application linéaire continue. Alors $u(E)$ ou $(I-u)(E)$ contient un sous-espace isomorphe à E et complémenté dans E.*

Nous ne donnons que la démonstration du cas $1 \leqslant r < \infty$ et $1 \leqslant s < \infty$, pour les cas $r = \infty$ ou $s = \infty$ il suffit de faire des modifications mineures. Notons $v = I - u$. La démonstration du théorème principal fait l'objet des lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit $0 < \varepsilon$. Il est possible de construire par récurrence une suite (X_k) de vecteurs de E et pour chaque entier l, $0 = n_0^l < n_1^l < \ldots$, une suite strictement croissante d'entiers tels que nous ayons:*

(a) *pour tout k,*

$$X_k = \sum_l a_l e_{l,q_k} \quad \text{et} \quad \|X_k\| = 1,$$

où l parcourt l'intervalle $[n_{k-1}^{q_k}+1, n_k^{q_k}]$;

(b) *pour tout l, pour tout j et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$*

$$\|(I - Q_{n_j^l})\circ P_l \circ u(X_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{j\cdot 2^{(j+1)l}}$$

et

$$\|(I-Q_{n_j^l})\circ P_l \circ v(X_i)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{j\cdot 2^{(j+1)l}};$$

(c) *pour tout k, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$*

$$Q_{n_k^{q_i}} \circ P_{q_i} \circ u(X_{k+1}) = Q_{n_k^{q_i}} \circ P_{q_i} \circ v(X_{k+1}) = 0.$$

Montrons qu'une telle construction est possible. Nous posons $X_1 = e_{1,1}$ et pour chaque entier l nous fixons n_1^l tel que

$$\|(I-Q_{n_1^l})\circ P_l \circ u(X_1)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2l}} \quad \text{et} \quad \|(I-Q_{n_1^l})\circ P_l \circ v(X_1)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{2l}}.$$

Supposons construits $X_1, X_2, \ldots, X_k$ et, pour chaque entier l, $0 = n_0^l < n_1^l < \ldots < n_k^l$ satisfaisant (a), (b) et (c). Nous choisissons alors

$$X_{k+1} = \sum_l a_l e_{l, q_{k+1}},$$

où l varie de $n_k^{q_{k+1}}+1$ à n, tels que $\|X_{k+1}\| = 1$ et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k+1$,

$$Q_{n_k^{q_i}} \circ P_{q_i} \circ u(X_{k+1}) = Q_{n_k^{q_i}} \circ P_{q_i} \circ v(X_{k+1}) = 0.$$

Nous fixons, pour chaque entier l, n_{k+1}^l tel que, pour $l \neq q_{k+1}$, $n_{k+1}^l > n_k^l$ et $n_{k+1}^{q_{k+1}} \geqslant n$, nous ayons

$$\max_{1\leqslant i \leqslant k+1} \left(\|(I-Q_{n_{k+1}^l})\circ P_l \circ u(X_i)\|, \|(I-Q_{n_{k+1}^l})\circ P_l \circ v(X_i)\|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{(k+1)\cdot 2^{l(k+2)}}.$$

Les conditions (a), (b) et (c) sont visiblement satisfaites.

LEMME 2. *La suite $(X_k)_k$ est une suite-base isométriquement équivalente à (f_k).*

Fixons un entier n et des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Notons, pour chaque entier j,

$$N_j = \{1, 2, \ldots, n\} \cap \varphi\big(\{(i, j);\ i = 1, 2, \ldots\}\big).$$

Nous avons

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big\| = \Big(\sum_j \Big(\sum_{i\in N_j} |a_i|^r\Big)^{s/r}\Big)^{1/s}.$$

Pour chaque entier j, $(X_{\varphi(i,j)})_i$ est une suite-base bloc normalisée de $(e_{i,j})_i$; nous avons donc, pour chaque entier j,

$$\Big(\sum_{i\in N_j} |a_i|^r\Big)^{1/r} = \Big\|\sum_{i\in N_j} a_i X_i\Big\|$$

et, par conséquent,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big\| = \Big(\sum_j \Big\|\sum_{i\in N_j} a_i X_i\Big\|^s\Big)^{1/s} = \Big(\sum_j \Big\|P_j\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big)\Big\|^s\Big)^{1/s} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big\|.$$

LEMME 3. *Il existe une suite (n_i) strictement croissante d'entiers et, pour chaque entier i, il existe une suite $(m_j^i)_j$ strictement croissante d'entiers tels que*

(a) *pour tout k,*

$$\varphi(m_{p_k}^{q_k}, n_{q_k}) < \varphi(m_{p_{k+1}}^{q_{k+1}}, n_{q_{k+1}}),$$

et l'une des éventualités suivantes a lieu:

(b) *pour tout $(i,j)\in N\times N$,*

$$\|P_{n_j}\circ u(X_{\varphi(m_i^j, n_j)})\| \geqslant \frac{1}{2},$$

(c) *pour tout $(i,j)\in N\times N$,*

$$\|P_{n_j}\circ v(X_{\varphi(m_i^j, n_j)})\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Notons

$A = \{n$; il existe une infinité d'entiers m tels que $\|P_n\circ u(X_{\varphi(m,n)})\| \geqslant \frac{1}{2}\}$

et

$B = \{n$; il existe une infinité d'entiers m tels que $\|P_n\circ v(X_{\varphi(m,n)})\| \geqslant \frac{1}{2}\}$.

Des relations

$$u(X_{\varphi(m,n)}) + v(X_{\varphi(m,n)}) = X_{\varphi(m,n)},$$

$$\big(0,\ldots,0,P_n(X_{\varphi(m,n)}),0,\ldots\big) = X_{\varphi(m,n)} \qquad (P_n(X_{\varphi(m,n)}) \text{ à la } n\text{-ième place})$$

et

$$\|X_{\varphi(m,n)}\| = 1$$

qui ont lieu pour tout m et n, nous déduisons que A ou B est infini. Supposons A infini et énumérons les éléments de A sous forme d'une suite strictement croissante $n_1 < n_2 < \ldots$

Nous construisons par récurrence une suite $(m_{p_k}^{q_k})$ d'entiers de la façon suivante:

m_1^1 est un entier tel que

$$\|P_{n_1}\circ u(X_{\varphi(m_1^1, n_1)})\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $\varphi^{-1}(k+1) = (p_{k+1}, q_{k+1})$, $m_{p_{k+1}}^{q_{k+1}}$ est fixé de telle sorte que

$$\|P_{n_{q_{k+1}}}\circ u(X_{\varphi(m_{p_{k+1}}^{q_{k+1}}, n_{q_{k+1}})})\| \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(m_{p_{k+1}}^{q_{k+1}}, n_{q_{k+1}}) > \varphi(m_{p_k}^{q_k}, n_{q_k});$$

un tel choix est possible, car il existe une infinité de m tels que

$$\|P_{n_{q_{k+1}}} \circ u(X_{\varphi(m, n_{q_{k+1}})})\| \geq \frac{1}{2}.$$

Remarque. Posons, pour chaque entier k, $i_k = \varphi(m_{p_k}^{q_k}, n_{q_k})$ et notons $Y_k = X_{i_k}$. Pour chaque entier l posons $N_0^l = 0$ et, pour $k \geq 1$, $N_k^l = n_{i_k}^{n_l}$. Quitte à introduire un certain nombre de coefficients nuls, les relations (a), (b) et (c) du lemme 1 impliquent:

(d) pour tout k,

$$Y_k = \sum_l b_l e_{l, n_{q_k}} \quad \text{et} \quad \|Y_k\| = 1,$$

où l varie de $N_{k-1}^{q_k} + 1$ à $N_k^{q_k}$,

(e) pour tout entier j, pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$ et pour tout entier l,

$$\|(I - Q_{N_j^l}) \circ P_{n_l} \circ u(Y_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{j \cdot 2^{(j+1)l}},$$

(f) pour tout entier k et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$,

$$Q_{N_k^{q_i}} \circ P_{n_{q_i}} \circ u(Y_{k+1}) = 0,$$

(g) pour tout entier k,

$$\|P_{n_{q_k}} \circ u(Y_k)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Pour chaque entier j, $(Y_{\varphi(i,j)})$ est une suite-base bloc normalisée de $(e_{i,n_j})_i$; par un raisonnement analogue à celui du lemme 2 il est clair que (Y_k) est une suite-base isométriquement équivalente à (f_k).

Rappelons les inégalités usuelles utilisées dans la suite: pour tout $A \geq 0$, $B \geq 0$, et $r \geq 1$

(1) $$(A+B)^r \leq 2^{r-1}(A^r + B^r)$$

(2) $$(A+B)^{1/r} \leq A^{1/r} + B^{1/r}.$$

Nous conservons les notations précédentes.

LEMME 4. *Si* $0 < \varepsilon < 2^{-3}$, *alors l'une des deux éventualités suivantes a lieu:*

(a) $(u(Y_k))$ *est une suite-base équivalente à* (Y_k),

(b) $(v(Y_k))$ *est une suite-base équivalente à* (Y_k).

Fixons $0 < \varepsilon < 2^{-3}$ et plaçons-nous dans l'éventualité (b) du lemme 3; nous allons établir que $(u(Y_k))$ est une suite-base équivalente à (Y_k).

Fixons un entier n et des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Notons, pour chaque entier j,

$$N_j = \{1, 2, \ldots, n\} \cap \varphi(\{(i, j); i = 1, 2, \ldots\}).$$

Nous avons clairement

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big\| = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\Big\|P_m\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^s\Big)^{1/s}$$
$$\geqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big\|P_{n_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^s\Big)^{1/s}.$$

Fixons un entier j tel que $N_j \neq \emptyset$ et posons $L_{i,j} = [N_{i-1}^j + 1, N_i^j]$. Nous avons alors

$$(3) \qquad \Big\|P_{n_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^r = \sum_{l=1}^{\infty}\Big|e_l'\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k P_{n_j}\circ u(Y_k)\Big)\Big|^r$$
$$\geqslant \sum_{i\in N_j}\sum_{l\in L_{i,j}}\Big|e_l'\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k P_{n_j}\circ u(Y_k)\Big)\Big|^r.$$

Fixons maintenant un entier $i \in N_j$. Alors

$$\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}\Big|e_l'\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k P_{n_j}\circ u(Y_k)\Big)\Big|^r\Big)^{1/r}$$
$$\geqslant |a_i|\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}|e_l'\circ P_{n_j}\circ u(Y_i)|^r\Big)^{1/r} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|a_k|\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}|e_l'\circ P_{n_j}\circ u(Y_k)|^r\Big)^{1/r}.$$

Nous savons, d'après (e) et (g), que

$$\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}|e_l'\circ P_{n_j}\circ u(Y_i)|^r\Big)^{1/r} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{i\cdot 2^{(i+1)j}} \geqslant \frac{1}{2^2};$$

nous savons aussi que

$$\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}|e_l'\circ P_{n_j}\circ u(Y_k)|^r\Big)^{1/r} \leqslant \begin{cases} 0 & \text{si } k \geqslant i+1 \text{ d'après (f),} \\ \dfrac{\varepsilon}{(i-1)\cdot 2^{ij}} & \text{si } i > 1 \text{ et } 1 \leqslant k < i \text{ d'après (e).} \end{cases}$$

Ces deux relations impliquent

$$\Big(\sum_{l\in L_{i,j}}\Big|e_l'\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k P_{n_j}\circ u(Y_k)\Big)\Big|^r\Big)^{1/r} \geqslant \frac{|a_i|}{2^2} - \frac{\varepsilon}{2^{ij}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|;$$

en utilisant (1), nous obtenons

$$\sum_{l\in L_{i,j}}\Big|e_l'\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k P_{n_j}\circ u(Y_k)\Big)\Big|^r \geqslant \frac{|a_i|^r}{2^{3r-1}} - \frac{\varepsilon^r}{2^{ijr}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|^r.$$

En reportant cette dernière inégalité dans (3) nous obtenons

$$\Big\|P_{n_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^r \geqslant \frac{1}{2^{3r-1}}\sum_{i\in N_j}|a_i|^r - \varepsilon^r \max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|^r \sum_{i\in N_j}\frac{1}{2^{ijr}}$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{3r-1}}\sum_{i\in N_j}|a_i|^r - \frac{1}{2^{jr-1}}\varepsilon^r \max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|^r,$$

d'où nous tirons en utilisant (1) et (2):

$$\Big\|P_{n_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^s \geqslant \frac{1}{2^{4s-s/r-1}}\Big(\sum_{i\in N_j}|a_i|^r\Big)^{s/r} - \frac{1}{2^{js-s/r}}\varepsilon^s \max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|^s.$$

Nous avons alors

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big\| \geqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big\|P_{n_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big)\Big\|^s\Big)^{1/s}$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{4-1/r-1/s}}\Big(\sum_{j}\Big(\sum_{i\in N_j}|a_i|^r\Big)^{s/r}\Big)^{1/r} - \varepsilon\cdot 2^{1/r+1/s-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|$$

ce qui peut aussi s'écrire, puisque $\|e'_{i,j}\| = 1$ pour tout $(i,j)\in N\times N$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big\| \geqslant (2^{1/r+1/s-4} - \varepsilon\cdot 2^{1/r+1/s-1})\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k Y_k\Big\|.$$

Dans la suite, nous supposerons toujours $0<\varepsilon<2^{-3}$, alors $(u(Y_k))$ est visiblement une suite-base équivalente à (Y_k). Remarquons que si (g_k) est la suite-base duale de $(u(Y_k))$, nous avons, pour tout k,

$$\|g_k\| \leqslant \frac{2^{1-1/r-1/s}}{2^{-3}-\varepsilon}.$$

Démonstration du théorème principal. Soit $0<\varepsilon<2^{-3}$ fixé sous certaines conditions qui seront précisées plus loin. Nous supposons que les éventualités (b) du lemme 3 et (a) du lemme 4 ont lieu et nous allons établir que $[u(Y_k)]_{k=1}^{\infty}$ est un facteur direct de E. Nous conservons les notations précédentes. Soit $\sigma = (m_i)$ une suite d'entiers, nous notons $R_\sigma\colon E\to E$ l'application définie pour $x\in E$ par $R_\sigma(x) = (z_i)$, où

$$z_i = \begin{cases} P_i(x) & \text{si } i\notin A = \{n_1, n_2, \ldots\},\\ Q_{m_k}\circ P_{n_k}(x) & \text{si } i = n_k.\end{cases}$$

Pour chaque entier k nous notons $\sigma_k = (N_k^l)_l$ et nous posons $Z_k = R_{\sigma_k}(u(Y_k))$. D'après (e) nous avons

$$\|Z_k - u(Y_k)\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \big\|P_n(Z_k - u(Y_k))\big\|^s\Big)^{1/s}$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \big\|P_{n_i}(Z_k - u(Y_k))\big\|^s\Big)^{1/s} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Si $\varepsilon > 0$ vérifie

$$0 < \frac{2^{1-1/r-1/s}}{2^{-3}-\varepsilon}\,\varepsilon < 1,$$

ce que nous supposerons par la suite, alors (Z_k) est une suite-base équivalente à $(u(Y_k))$ et nous avons pour tout entier n et toute famille finie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de scalaires

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k\Big\| \leqslant 2\Big\|\sum_{k=1}^{n} a_k u(Y_k)\Big\|$$

(cf. [2]). Pour chaque entier k notons $z_k' \in ([e_{l,n_{q_k}}]_l)'$, où l varie de $N_{k-1}^{q_k}+1$ à $N_k^{q_k}$, une forme linéaire continue telle que

$$z_k'\Big(\sum_l e_{l,n_{q_k}}'\big(u(Y_k)\big)e_{l,n_{q_k}}\Big) = 1$$

et

$$\|z_k'\| = \Big(\Big\|\sum_l e_{l,n_{q_k}}'\big(u(Y_k)\big)e_{l,n_{q_k}}\Big\|\Big)^{-1};$$

d'après (f) et (g) nous avons

$$\|z_k'\| \leqslant \Big(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{k\cdot 2^{(k+1)q_k}}\Big)^{-1} \leqslant 2^2.$$

Remarquons que, pour $m \neq k$,

$$z_k'\Big(\sum_l e_{l,n_{q_k}}'(Z_m)e_{l,n_{q_k}}\Big) = 0$$

d'après (f) si $m > k$ et d'après la définition de Z_m si $m < k$.

Soit $x \in E$. Nous allons montrer que la série

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k'\Big(\sum_l e_{l,n_{q_k}}'(x)e_{l,n_{q_k}}\Big) Z_k$$

converge.

Puisque (Z_k) est équivalente à (f_k), il est suffisant de démontrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} z'_k \Big(\sum_{l} e'_{l,n_{q_k}}(x)\, e_{l,n_{q_k}} \Big) f_k \tag{4}$$

converge. En laissant l parcourrir l'intervalle $[N^{n_q}_{\varphi(p,q)-1}+1,\ N^{n_q}_{\varphi(p,q)}]$ nous avons, pour chaque entier q,

$$\Big(\sum_{p=1}^{\infty} \Big| z'_{\varphi(p,q)} \Big(\sum_{l} e'_{l,n_q}(x)\, e_{l,n_q} \Big) \Big|^r \Big)^{1/r} \leqslant 4 \Big(\sum_{p=1}^{\infty} \Big\| \sum_{l} e'_{l,n_q}(x)\, e_{l,n_q} \Big\|^r \Big)^{1/r}$$
$$\leqslant 4 \Big(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{l} |e'_{l,n_q}(x)|^r \Big)^{1/r} \leqslant 4\, \|P_{n_q}(x)\|.$$

Nous déduisons que

$$\Big(\sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} \Big| z'_{\varphi(p,q)} \Big(\sum_{l} e'_{l,n_q}(x)\, e_{l,n_q} \Big) \Big|^r \Big)^{s/r} \Big)^{1/s} \leqslant 4 \Big(\sum_{q=1}^{\infty} \|P_{n_q}(x)\|^s \Big)^{1/s} \leqslant 4\, \|x\|.$$

La série (4) converge donc et nous avons

$$\|P(x)\| \leqslant 2^3 \|u\|\, \|x\|.$$

Clairement P est une projection de E sur $[Z_k]_{k=1}^{\infty}$.

Si $\varepsilon > 0$ est choisi tel que $2^5 \|u\| \varepsilon < 1$, alors $\big(u(Y_k)\big)$ sera complémenté dans E d'après le théorème 2 de [2].

Le ε choisi devant convenir simultanément pour u et v, nous le fixons tel que

$$\frac{2^{1-1/r-1/s}}{2^{-3}-\varepsilon}\, \varepsilon < 1 \quad \text{et} \quad 2^5(1+\|u\|)\varepsilon < 1.$$

Théorème. *Pour tout $1 \leqslant r \leqslant \infty$ et $1 \leqslant s \leqslant \infty$, l'espace de Banach $E = (l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ est primaire.*

Il suffit de remarquer que $(E \oplus E \oplus \ldots)_s$ est isomorphe à E, d'appliquer le théorème principal et la méthode de décomposition de Pełczyński (cf. [10]).

Remarque. Après que ce travail ait été proposé pour publication, l'auteur a appris que:

1° Alspach et al. (cf. [1]) ont aussi montré la primarité de $(l_2 \oplus l_2 \oplus \ldots)_s$ $(1 < s < \infty)$ et mentionné qu'une preuve analogue permet de montrer la primarité de $(l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ $(1 < r,\ s < \infty)$.

2° Casazza et al. (cf. [4]) ont montré que si X a une base symétrique et n'est pas isomorphe à l_1, alors $(X \oplus X \oplus \ldots)_s$ $(1 < s \leqslant \infty)$ est primaire.

3° Odell (cf. [9]) donne une description des facteurs directs de $(l_2 \oplus l_2 \oplus \ldots)_s$. Il est indiqué que des méthodes analogues donnent une description partielle des facteurs directs de $(l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ $(1 < r, s < \infty)$. De cette description partielle il découle que les espaces $(l_r \oplus l_r \oplus \ldots)_s$ $(1 < r, s < \infty)$ sont primaires.

TRAVAUX CITÉS

[1] D. Alspach, P. Enflo et E. Odell, *On the structure of separable $\mathscr{L}_p$-spaces, $1 < p < \infty$*, Studia Mathematica 60 (1977), p. 79-90.

[2] C. Bessaga et A. Pełczyński, *On bases and inconditional convergence of series in Banach spaces*, ibidem 17 (1958), p. 151-164.

[3] P. G. Casazza et Bor-Luh Lin, *Projections on Banach spaces with symmetric bases*, ibidem 52 (1974), p. 189-193.

[4] P. G. Casazza, C. A. Kottman et Bor-Luh Lin, *On primary Banach spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society 82 (1976), p. 71-72.

[5] M. M. Day, *Normed linear space*, Springer Verlag 1962.

[6] W. B. Johnson et E. Odell, *Subspaces of L_p which embed into l_p*, Compositio Mathematica 28 (1974), p. 37-49.

[7] J. Lindenstrauss et A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Mathematica 29 (1968), p. 275-326.

[8] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics 338 (1973).

[9] E. Odell, *On complemented subspaces of $(l_2 \oplus l_2 \oplus \ldots)_p$*, Israel Journal of Mathematics 23 (1976), p. 353-367.

[10] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Mathematica 19 (1960), p. 209-228.

[11] G. Schechtman, *Complemented subspaces of $(l_2 \oplus l_2 \oplus \ldots)_p$ $(1 < p < \infty)$ with an unconditional basis*, Israel Journal of Mathematics 20 (1975), p. 351-358.

[12] I. Singer, *Bases in Banach spaces I*, Springer Verlag 1970.

Reçu par la Rédaction le 21. 4. 1976;
en version modifiée le 25. 5. 1976