

## REMARQUE SUR LA MÉTHODE TOPOLOGIQUE DE T. WAŻEWSKI

PAR

Z. SZMYDT (KRAKÓW)

Le but de cette communication est une modification d'un théorème de Ważewski <sup>(1)</sup> liée à une généralisation du lemme 3 qui le précède <sup>(2)</sup>. Rappelons d'abord quelques termes et notations qui seront employés ici.

Hypothèse  $H_1$ . La fonction vectorielle réelle  $F(t, X)$  des variables réelles  $(t, X) = (t, x_1, \dots, x_n)$  est continue dans un ensemble ouvert  $\Omega \subset R_{n+1}$  et par chaque point  $P = (t, x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  passe une intégrale unique du système

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = F(t, X).$$

Étant donné un ensemble ouvert  $\omega$  contenu dans  $\Omega$ , posons par définition

$$\text{front}(\omega, \Omega) = \Omega \cap (\overline{\omega} \setminus \omega), \quad \omega^* = \Omega \setminus \overline{\omega},$$

$$V(\overset{\circ}{P}, \delta) = \{P: |P - \overset{\circ}{P}| < \delta\} \quad \text{et} \quad f_{(\overset{\circ}{P}, \delta)} = \text{front}(\omega, \Omega) \cap V(\overset{\circ}{P}, \delta).$$

$X = \Phi(t; P)$  désignant l'intégrale du système (1) passant par le point  $P$ , soit  $I(t, P) = (t, \Phi(t; P))$ . Il existe un intervalle ouvert (borné ou non)  $\alpha < t < \beta$  dans lequel  $I(t, P) \in \Omega$ , tandis que  $I(\alpha, P)$  et  $I(\beta, P)$  ou bien ne sont pas déterminés, ou bien n'appartiennent pas à  $\Omega$  (mais à la frontière de  $\Omega$ ). Cet intervalle est désigné par  $\Delta(P)$  et dit *saturé* par rapport à  $P$ ,  $\Omega$  et (1). L'ensemble  $Q = I(t, P)$  où  $t \in \Delta(P)$  s'appelle *l'intégrale saturée* du système (1) passant par le point  $P = (\overset{\circ}{t}, x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ . On a évidemment  $P = I(\overset{\circ}{t}, P)$ . Soit  $\text{Demi}_{(+)}I(P)$  la classe de points  $I(t, P)$  tels que  $t \geq \overset{\circ}{t}$  et  $t \in \Delta(P)$ .

<sup>(1)</sup> Voir T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 20 (1947), p. 279-313. Il s'agit du théorème 1, p. 299.

<sup>(2)</sup> Voir ibidem, p. 298.

Tout point  $P(\overset{\circ}{t}, x_1, \dots, x_n) \in \text{front}(\omega, \Omega)$  pour lequel il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que  $I(r, P) \in \omega$  lorsque  $\overset{\circ}{t} - \varepsilon \leq t < \overset{\circ}{t}$  est dit *point de sortie* de  $\omega$  relatif à  $\Omega$ . Si, en outre,  $I(t, P) \in \omega^*$  lorsque  $\overset{\circ}{t} < t \leq \overset{\circ}{t} + \varepsilon$ , le point  $P$  est dit *point de sortie stricte*. Il s'appellera *point d'entrée stricte* dans  $\omega$ , lorsque  $I(t, P) \in \omega^*$  pour  $\overset{\circ}{t} - \varepsilon \leq t < \overset{\circ}{t}$  et  $I(t, P) \in \omega$  pour  $\overset{\circ}{t} < t \leq \overset{\circ}{t} + \varepsilon$ .

La classe de tous les points de sortie de  $\omega$  (de sortie stricte de  $\omega$ ) et d'entrée stricte dans  $\omega$  respectivement est désignée par  $S = \text{Sortie}(\omega, \Omega)$  ( $S_s = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega)$ ) et  $E_s = \text{Entrée stricte}(\omega, \Omega)$  respectivement. Soit

$$P \in \omega \cup E_s \quad \text{où} \quad P = (\overset{\circ}{t}, x_1, \dots, x_n).$$

Deux cas sont possibles:

1° on a

$$\text{Demi}_{(+)}I(P) \cap \text{front}(\omega, \Omega) \setminus \{P\} = \emptyset.$$

2° Il existe un point  $Q = I(\tau, P) \in \text{front}(\omega, \Omega)$  tel que  $I(t, P) \in \omega$  lorsque  $\overset{\circ}{t} < t < \tau$ . Ce point  $Q$  s'appelle *conséquent* de  $P$  relatif à  $\omega$  et  $\Omega$  et au système (1) et il est désigné par  $\text{conséq}(P; \omega, \Omega)$  <sup>(3)</sup>.

Étant donné un sous-ensemble  $\tilde{E}_s$  quelconque de  $E_s$ , *ombre gauche*  $(\omega \cup \tilde{E}_s, \Omega)$  désigne l'ensemble de tous les points  $P \in \omega \cup \tilde{E}_s$  pour lesquels il existe  $\text{conséq}(P; \omega, \Omega)$ .

Hypothèse  $H_2$ . Le sous-ensemble  $\tilde{E}_s$  de  $E_s$  est ouvert dans l'ensemble  $\text{front}(\omega, \Omega)$ ; en d'autres mots, il existe pour tout point  $\overset{\circ}{P} \in \tilde{E}_s$  un nombre  $\delta > 0$  tel que  $f_{(\overset{\circ}{P}, \delta)} \subset \tilde{E}_s$ .

THÉOREME 1. Admettons les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  et l'égalité  $S = S_s$ . Soit  $Q = K(P)$  la transformation définie comme suit:

$$K(P) = \begin{cases} \text{conséq}(P; \omega, \Omega) & \text{si } P \in \text{ombre gauche } (\omega \cup \tilde{E}_s, \Omega), \\ P & \text{si } P \in S. \end{cases}$$

Alors la transformation  $K(P)$  est continue dans l'ensemble  $W = S \cup \text{ombre gauche } (\omega \cup \tilde{E}_s, \Omega)$  et on a  $K(P) \in S$  pour tout  $P \in W$ .

Le théorème 1 coïncide avec le lemme 3 de Ważewski dans le cas particulier où l'ensemble  $\tilde{E}_s$  est vide. Vu que l'hypothèse  $H_2$  exclue l'existence d'une suite  $\{\overset{\circ}{P}_v\}$  telle que  $S \ni \overset{\circ}{P}_v \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \overset{\circ}{P} \in \tilde{E}_s$ , il ne reste, pour achever

<sup>(3)</sup> Dans le travail précité de Ważewski,  $\text{conséq}(P; \omega, \Omega)$  n'a été défini que pour les points  $P \in \omega$ .

la démonstration du théorème 1 en toute généralité qu'à vérifier les deux implications suivantes:

- (i)  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{\nu}{P}} \rightarrow \overset{\circ}{P} \in \tilde{E}_s$  et  $\overset{\nu}{P} \in W \cap (\omega \cup \tilde{E}_s)$  entraînent  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{K(\overset{\nu}{P})} \rightarrow K(\overset{\circ}{P})$ ,
- (ii)  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{\nu}{P}} \rightarrow \overset{\circ}{P} \in S$  et  $\overset{\nu}{P} \in W \cap \tilde{E}_s$  entraînent  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{K(\overset{\nu}{P})} \rightarrow \overset{\circ}{P}$ .

Démonstration de (i). Soit  $\{\overset{\nu}{P}\}$  une suite de points  $\overset{\nu}{P} = (\overset{\nu}{t}, \overset{\nu}{x}_1, \dots, \overset{\nu}{x}_n) \in W \cap (\omega \cup \tilde{E}_s)$  où  $\nu = 1, 2, \dots$  convergeant avec  $\nu \rightarrow \infty$  vers un point donné  $\overset{\circ}{P} = (\overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n) \in \tilde{E}_s$ . Il existe, en vertu de l'hypothèse  $H_2$ , un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(2) \quad f_{(\overset{\circ}{P}, \varepsilon)} \subset \tilde{E}_s \subset E_s.$$

En s'appuyant sur l'hypothèse  $H_1$  et sur celle que  $\overset{\circ}{P} \in \tilde{E}_s$  on établit aisément l'existence des nombres positifs  $N$  et  $\delta < \varepsilon$  tels que l'on ait pour  $\nu \geq N$  et  $\nu = 0$

$$(3) \quad \begin{aligned} I(t, \overset{\nu}{P}) \in V(\overset{\circ}{P}, \varepsilon) \quad \text{lorsque} \quad \overset{\circ}{t} - \delta \leq t \leq \overset{\circ}{t} + \delta, \\ I(\overset{\circ}{t} - \delta, \overset{\nu}{P}) \in \omega^* \quad \text{et} \quad I(\overset{\circ}{t} + \delta, \overset{\nu}{P}) \in \omega. \end{aligned}$$

Remarquons que (2) et (3) déterminent pour tout  $\nu \geq N$  la valeur  $\overset{\nu}{\tau} \in (\overset{\circ}{t} - \delta, \overset{\circ}{t} + \delta)$  telle que  $I(\overset{\nu}{\tau}, \overset{\nu}{P}) \in f_{(\overset{\circ}{P}, \varepsilon)}$ ; on a  $I(t, \overset{\nu}{P}) \in \omega$  lorsque  $\overset{\nu}{\tau} < t \leq \overset{\circ}{t} + \delta$ .

Soit  $\overset{\nu}{B} = I(\overset{\circ}{t} + \delta, \overset{\nu}{P})$  où  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . On vérifie aisément d'une part que

$$(4) \quad K(\overset{\nu}{P}) = \text{conséq}(\overset{\nu}{P}; \omega, \Omega) = \text{conséq}(\overset{\nu}{B}; \omega, \Omega) \quad \text{pour } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

On a d'autre part  $\omega \ni \overset{\nu}{B} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \overset{\circ}{B} \in \omega$ , d'où en vertu du lemme 3 précité

$$(5) \quad \underset{\nu \rightarrow \infty}{\text{conséq}(\overset{\nu}{B}; \omega, \Omega)} \rightarrow \text{conséq}(\overset{\circ}{B}; \omega, \Omega).$$

Il résulte de (4) et (5) que  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{K(\overset{\nu}{P})} \rightarrow K(\overset{\circ}{P})$ .

Démonstration de (ii). Soient  $\overset{\nu}{P} \in W \cap \tilde{E}_s$ ,  $\overset{\nu}{P} = (\overset{\nu}{t}, \overset{\nu}{x}_1, \dots, \overset{\nu}{x}_n)$  où  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\underset{\nu \rightarrow \infty}{\overset{\nu}{P}} \rightarrow \overset{\circ}{P} \in S$  et  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Il suffit de montrer que

$$(6) \quad \text{conséq}(\overset{\nu}{P}; \omega, \Omega) \in V(\overset{\circ}{P}, \varepsilon) \quad \text{pour } \nu \text{ suffisamment grand.}$$

En s'appuyant sur l'hypothèse  $H_1$  et sur celle que  $\overset{\circ}{P} \in S = S_s$ , on établit facilement l'existence des nombres positifs  $N$  et  $\delta < \varepsilon$  tels que l'on ait pour  $\nu \geq N$  et  $\nu = 0$

$$(7) \quad \overset{\circ}{t} - \delta < \overset{\nu}{t} < \overset{\circ}{t} + \delta,$$

$$(8) \quad I(t, \overset{\nu}{P}) \in V(\overset{\circ}{P}, \varepsilon) \quad \text{lorsque} \quad \overset{\circ}{t} - \delta \leq t \leq \overset{\circ}{t} + \delta,$$

$$(9) \quad I(\overset{\circ}{t} + \delta, \overset{\nu}{P}) \in \omega^*.$$

Remarquons que  $\overset{\nu}{P} \in \tilde{E}_s \subset E_s$  pour  $\nu = 1, 2, \dots$ . Il existe donc des nombres  $\varepsilon > 0$  où  $\nu = 1, 2, \dots$  tels que

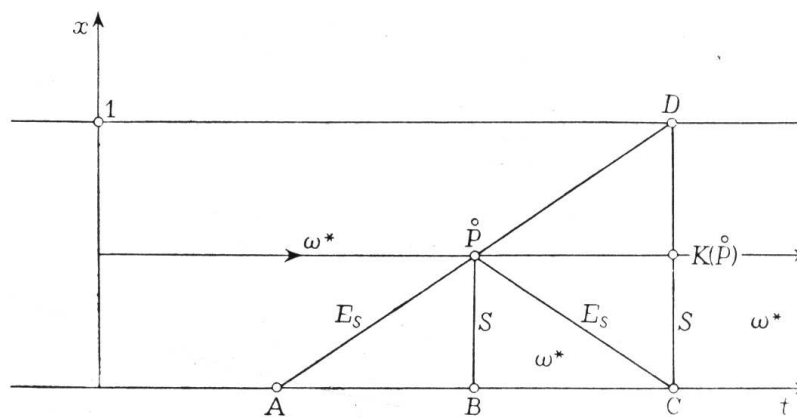
$$(10) \quad I(\overset{\nu}{t} + \varepsilon, \overset{\nu}{P}) \in \omega \quad \text{et} \quad \overset{\nu}{t} + \varepsilon < \overset{\circ}{t} + \delta \quad \text{pour } \nu = 1, 2, \dots$$

En vertu de (9) et (10), il existe pour tout  $\nu \geq N$  un nombre  $\tau$  tel que

$$(11) \quad \overset{\nu}{t} + \varepsilon < \tau < \overset{\circ}{t} + \delta \quad \text{et} \quad I(\tau, \overset{\nu}{P}) = \text{conséq}(\overset{\nu}{P}; \omega, \Omega) \quad \text{pour } \nu \geq N.$$

Or (11), (7) et (8) entraînent (6).

Remarque. L'hypothèse  $H_2$  intervenant dans le théorème 1 ne peut pas être supprimée. En effet, considérons l'équation  $dx/dt = 0$  dans l'ensemble plan  $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1\}$  et soit  $\omega$  la somme de deux triangles ouverts  $AB\overset{\circ}{P}$  et  $C\overset{\circ}{P}D$  (voir figure).



Il est évident que la transformation  $K(P)$  n'est pas continue au point  $\overset{\circ}{P}$ , malgré que l'on ait  $\overset{\circ}{P} \in E_s$  et que toutes les hypothèses du théorème 1, sauf l'hypothèse  $H_2$ , soient satisfaites.

THÉORÈME 2. *Admettons les hypothèses du théorème 1. Soient  $Z$  et  $S_1$  des ensembles satisfaisant aux conditions*

$$\begin{aligned} S_1 &\subset S, \quad Z \subset \omega \cup S_1 \cup \tilde{E}_s, \\ Z \cap S_1 &\text{ est un rétracte de } S_1, \\ Z \cap S_1 &\text{ n'est pas un rétracte de } Z. \end{aligned}$$

*Alors il existe au moins un point  $\overset{\circ}{P} \in Z \setminus S_1$  pour lequel ou bien on a  $\text{conséq}(\overset{\circ}{P}; \omega, \Omega) \in S \setminus S_1$ , ou bien le point  $\text{conséq}(P; \omega, \Omega)$  n'existe pas.*

Pour la démonstration du théorème 2 qui précède, il suffit de remplacer dans celle du théorème 1 de Ważewski le lemme 3 par le théorème 1 de la communication présente.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

*Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1966*