COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

SYSTÈMES DE COMMANDE ET ÉQUATIONS AU PARATINGENT À RETARDEMENT

PAR

E. CÂMPU ET A. HALANAY (BUCAREST)

Le but de cette communication est de montrer que les idées développées par Ważewski dans la théorie des systèmes de commande peuvent être utilisées dans l'étude des systèmes de commande à retardement.

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

I. Soient R l'ensemble des nombres réels, R^k l'espace euclidien réel de dimension k et $|x|$ la norme euclidienne usuelle dans R^k. Posons pour $A \subseteq R^k$ et $B \subseteq R^k$

$$\varrho^*(x, A) = \inf\{|x-a|;\ a\in A\},$$

$$\varrho^*(A, B) = \sup\{\varrho^*(a, B);\ a\in A\},$$

$$\varrho(A, B) = \max\{\varrho^*(A, B),\ \varrho^*(B, A)\}.$$

Pour $Y \subseteq R^k$, soit $\mathcal{K}(Y)$ la famille des ensembles non vides et fermés de Y. Enfin, soit $\mathcal{C}$ l'espace de Banach des fonctions continues $\varphi\colon [-\tau, 0] \to R^n$ avec la norme usuelle

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(t)|;\ t\in[-\tau, 0]\}.$$

II. Un domaine $G \subset \mathcal{C}$ et un ensemble fermé $Y \subset R^k$ étant donnés, on appelle *champ* une fonction $F\colon I(a)\times G \to \mathcal{K}(Y)$ où $I(a) = [t_0, t_0+a] \subset R$. Le champ F est dit *convexe* ou *compact* respectivement lorsque l'ensemble $F(t, \varphi)$ est convexe ou compact respectivement pour tout $(t, \varphi)\in I(a)\times G$. Le champ est dit *sémicontinu supérieurement* s'il existe pour tout $(t', \varphi')\in I(a)\times G$ et pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta(t', \varphi', \varepsilon) > 0$ tel que $|t'-t| < \delta$ et $\|\varphi'-\varphi\| < \delta$ entraînent $\varrho^*\big(F(t, \varphi), F(t', \varphi')\big) < \varepsilon$ pour tout $(t, \varphi)\in I(a)\times G$.

Le champ F est *continu* lorsqu'il a la même propriété quand on remplace ϱ^* par ϱ.

III. Soit $J(a) = [t_0 - \tau, t_0 + a]$. Pour toute fonction continue x: $J(a) \to R^n$ et pour tout $t \in I(a)$, soit x_t la fonction de $\mathscr{C}$ définie par la formule $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Etant donné un domaine $G \subset \mathscr{C}$, on appelle *équation au paratingent à retardement* tout couple $\{\varphi_0, F\}$ formé par une fonction initiale $\varphi_0 \in G$ et par un champ F: $I(a) \times G \to \mathscr{K}(R^n)$. On appelle *solution de l'équation au paratingent à retardement* tout couple $\{a', x\}$ où $a' \in (0, a]$, la fonction x: $J(a') \to R^n$ est continue, $x_{t_0} = \varphi_0$, $x_t \in G$ et $D^{**}x(t) \subseteq F(t, x_t)$ pour tout $t \in I(a')$, $D^{**}x(t)$ étant la dérivée paratingentielle de la fonction x au point t, c'est-à-dire l'ensemble des points $\lambda \in \bar{R}^n$ pour lesquels il existe deux suites (t_j') et (t_j'') telles que $t_j', t_j'' \in I(a)$, $t_j' \neq t_j''$ pour $j = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{j\to\infty} t_j' = \lim\limits_{j\to\infty} t_j'' = t$ et

$$\lim_{j\to\infty} \frac{x(t_j') - x(t_j'')}{t_j' - t_j''} = \lambda.$$

IV. Un domaine $G \subset \mathscr{C}$ et un ensemble fermé $\mathscr{U} \subset R^m$ étant donnés, on appelle *système de commande à retardement* tout triplet $\{\varphi_0, U, f\}$ où $\varphi_0 \in G$, U: $I(a) \times G \to \mathscr{K}(\mathscr{U})$ et f: $I(a) \times G \times \mathscr{U} \to R^n$. On appelle *solution d'un système de commande à retardement* tout triplet $\{a', x, u\}$ où $a' \in (0, a]$, la fonction x: $J(a') \to R^n$ est continue dans $J(a')$, absolument continue dans $I(a')$, la fonction u: $I(a') \to \mathscr{C}$ est mesurable Lebesgue, $x_{t_0} = \varphi_0$, $x_t \in G$, $u(t) \in U(t, x_t)$ pour tout $t \in I(a')$ et $dx(t)/dt = f\big(t, x_t, u(t)\big)$ presque partout dans $I(a')$.

L'équation $\{\varphi_0, E\}$ est dite *équation au paratingent à retardement associée au système de commande à retardement* lorsque $E(t, \varphi) = f\big(t, \varphi, U(t, \varphi)\big)$ pour tout $(t, \varphi) \in I(a) \times G$.

2. RELATIONS ENTRE LES SYSTÈMES DE COMMANDE À RETARDEMENT ET LES ÉQUATIONS AU PARATINGENT À RETARDAMENT

THÉORÈME 1. *Soit $\{\varphi_0, U, f\}$ un système de commande à retardement assujetti aux conditions*

(a) *la fonction f est continue,*

(b) *le champ U est compact et sémicontinu supérieurement,*

(c) *le champ E est convexe.*

Alors, $\{a', x, u\}$ étant une solution de ce système de commande, le couple $\{a', x\}$ est une solution de l'équation au paratingent associée et, réciproquement, $\{a', x\}$ étant une solution de l'équation au paratingent associée, il existe une fonction mesurable u: $I(a') \to \mathscr{U}$ telle que $\{a', x, u\}$ est une solution du système de commande.

La démonstration sera basée sur 6 lemmes.

LEMME 1. *Soit* x: $[t', t''] \to R^n$ *continue,* $F \subset R$ *convexe et compact. Si pour tout* $t \in [t', t'']$ *on a* $D^{**}x(t) \subseteq F$, *alors*

$$\frac{x(t')-x(t'')}{t'-t''} \in F.$$

Pour la démonstration voir [7], lemme II 5.

LEMME 2. *Soient* x: $[t', t''] \to R^n$ *une fonction absolument continue et* $F \subset R^n$ *un ensemble compact et convexe. Si* $x'(t) \in F$ *presque partout dans* $[t', t'']$, *on a*

$$\frac{x(t')-x(t'')}{t'-t''} \in F.$$

Pour la démonstration, voir [6], lemme 1.

LEMME 3. *Soient* F: $I(a) \times G \to \mathscr{K}(R^n)$ *un champ compact et supérieurement sémicontinu,* x: $J(a) \to R^n$ *une fonction continue telle que* $x_t \in G$ *pour tout* $t \in I(a)$. *Alors l'ensemble* $H = \mathrm{Co} \bigcup_{t \in [t', t'']} F(t, x_t)$ *où* $[t', t''] \subseteq I(a)$ *est compact.*

$\mathrm{Co}\, A$ désigne ici l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

Pour la démonstration, on remarquera que l'ensemble $\bigcup_{t \in [t', t'']} F(t, x_t)$ est compact, en utilisant la continuité de l'application $t \to x_t$ et les propriétés du champ F.

LEMME 4. *Soient* x: $J(a) \times R^n$ *une fonction continue telle que* $x_t \in G$ *pour tout* $t \in J(a)$ *et* E: $I(a) \times G \to \mathscr{K}(R^n)$ *un champ compact, convexe et supérieurement semicontinu. Alors les conditions*

(1) $D^{**}x(t) \subseteq E(t, x_t)$ *pour tout* $t \in I(a)$,

(2) *la fonction* x *est absolument continue sur* $I(a)$ *et* $x'(t) \in E(t, x_t)$ *presque partout dans* $I(a)$

sont équivalentes.

Démonstration. La condition (1) étant satisfaite, l'ensemble $H = \mathrm{Co} \bigcup_{t \in I(a)} E(t, x_t)$ est compact et convexe et $D^{**}x(t) \in H$ pour tout $t \in I(a)$. On a en vertu du lemme 1 $\big(x(t')-x(t'')\big)/(t'-t'') \in H$ pour $t', t'' \in I(a)$ et $t' \neq t''$, donc

$$|x(t')-x(t'')| \leqslant L|t'-t''| \quad \text{où} \quad L = \sup\{|h|, h \in H\}.$$

Il s'ensuit que la fonction x est absolument continue dans $I(a)$, donc dérivable presque partout dans $I(a)$ et on a $x'(t) \in D^{**}x(t) \subseteq E(t, x_t)$ dans les points t où x est dérivable. La condition (2) est ainsi satisfaite.

Réciproquement, la condition (2) étant satisfaite, soit $\tilde{t} \in I(a)$, $\varepsilon > 0$. Le champ E est supérieurement semicontinu et l'application $t \to x_t$ est continue. Il existe donc un intervalle fermé $V = [\tilde{t} - \delta, \tilde{t} + \delta]$ tel que

$\varrho^*\big(E(t, x_t), E(\tilde{t}, x_{\tilde{t}})\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in V$. Alors, l'ensemble compact et convexe $H_\varepsilon = \mathrm{Co} \bigcup\limits_{t \in V} E(t, x_t)$ est tel que $\varrho^*\big(H_\varepsilon, E(\tilde{t}, x_{\tilde{t}})\big) \leqslant \varepsilon$ et $x'(t) \in E(t, x_t) \subseteq H_\varepsilon$ presque partout dans V. On peut appliquer le lemme 2, ce qui donne $\big(x(t') - x(t'')\big)/(t' - t'') \in H_\varepsilon$, donc $D^{**}x(\tilde{t}) \subseteq H_\varepsilon$, et $\varrho^*\big(D^{**}x(\tilde{t}), E(\tilde{t}, x_{\tilde{t}})\big) \leqslant \varrho^*\big(H_\varepsilon, E(\tilde{t}, x_{\tilde{t}})\big) \leqslant \varepsilon$. Mais $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a $D^{**}x(\tilde{t}) \subseteq E(\tilde{t}, x_{\tilde{t}})$ et la condition (1) est satisfaite.

LEMME 5. *Si le système de commande à retardement satisfait aux conditions du théorème* 1, *le champ E associé est compact et semicontinu supérieurement.*

La première thèse est une conséquence immédiate de la continuité de la fonction f et de la compacité de l'ensemble $U(t, \varphi)$. La seconde thèse est aisée à démontrer par un raisonnement apagogique.

D é f i n i t i o n. Un ensemble $N \subset R^m$ étant compact, on appelle *minimum lexicographique* de N le point $L(N) = \big(l_1(N), \ldots, l_m(N)\big) \in R^m$ défini par récurrence comme il suit:

$$l_1(N) = \inf\{u_1;\ u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in N\},$$

$$l_k(N) = \inf\{u_k;\ u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_m) \in N \cap P_{k-1}\}$$

où $P_{k-1} = \{(u_1, \ldots, u_m) \in R^m;\ u_1 = l_1(N), \ldots, u_{k-1} = l_{k-1}(N)\}$.

LEMME 6. *Soient $B \subset R$ un ensemble compact et N: $B \to \mathscr{K}(R^m)$ un champ compact semicontinu supérieurement. Alors la fonction u: $B \to R^m$ définie par l'égalité $u(t) = L\big(N(t)\big)$ est mesurable dans B et on a $u(t) \in N(t)$ pour tout $t \in B$.*

Pour la démonstration, voir [5], théorème 1.

Les lemmes étant établis, passons à la démonstration du théorème 1. La première thèse de ce théorème est une conséquence directe des lemmes 4 et 5. Pour la seconde thèse, $\{a', x\}$ étant une solution de l'équation au paratingent, on déduit du lemme 4 que la fonction x est absolument continue dans $I(a')$ et que $x'(t) \in E(t, x_t) = f\big(t, x_t, U(t, x_t)\big)$ presque partout dans $I(a')$. Il existe donc une fonction v: $I(a') \to \mathscr{U}$ telle que $v(t) \in U(t, x_t)$ pour tout $t \in I(a')$ et que $x'(t) = f\big(t, x_t, v(t)\big)$ presque partout dans $I(a')$. Reste donc à prouver que la fonction v peut être remplacée par une fonction mesurable u. Soit $Z \subset I(a')$ l'ensemble des points où la fonction x n'est pas dérivable. Pour $t \in I(a') - Z$ soit $N(t) = \{w; x'(t) = f(t, x_t, w),\ w \in U(t, x_t)\}$. Ainsi défini, l'ensemble $N(t)$ est compact et non vide. Définissons la fonction u: $I(a') \to \mathscr{U}$ par les conditions: $u(t) = L\big(N(t)\big)$ pour $t \in I(a') - Z$ et $u(t) \in U(t, x_t)$ pour $t \in Z$. Ainsi définie, la fonction u est mesurable et on a $x'(t) = f\big(t, x_t, u(t)\big)$ presque partout dans $I(a')$. En effet, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $B(\varepsilon) \subseteq I(a') - Z$ tel que mes $\big(I(a') - Z - B(\varepsilon)\big) \leqslant \varepsilon$ et que la dérivée x' est continue dans $B(\varepsilon)$. Le champ N étant supérieurement semicontinu dans $B(\varepsilon)$, on peut appliquer le lemme 6 dont il s'ensuit que u est mesurable dans $B(\varepsilon)$. En admettant que $\varepsilon \to 0$, on conclut que u est mesurable dans $I(a')$.

3. CAS DES SYSTÈMES À ARGUMENT RETARDÉ

Soient $\tau_j\colon I(a) \to [0, \tau]$ des fonctions continues pour $j = 1, 2, \ldots, p$, $\varphi_0 \in \mathscr{C}$, $\mathscr{U} \subset R^m$ un ensemble fermé, $G \subseteq R^{np}$ un domaine tel que $\mathscr{C}(\beta) \subseteq G$ où $\beta > 0$ et $\mathscr{C}(\beta)$ est l'ensemble des points $(z_1, \ldots, z_p) \in R^{np}$ où $z_j \in R^n$ pour lesquels il existe des nombres $\theta_j \in [-\tau, 0]$ tels que $|z_j - \varphi_0(\theta_j)| \leqslant \beta$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$.

Quelle que soit la fonction continue $x\colon J(a) \to R^n$ et le point $t \in I(a)$, soit $\tilde{x}_t \in R^{np}$ la fonction définie par la formule

$$\tilde{x}_t \doteq \big(x(t-\tau_1(t)),\ x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_p(t))\big).$$

On appelle *équation au paratingent à argument retardé* l'ensemble $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, F\}$ où $F\colon I(a) \times G \to \mathscr{K}(R^n)$.

On appelle *solution* de cette équation tout couple $\{a', x\}$ tel que $a' \in (0, a]$ et que la fonction $x\colon J(a') \to R^n$ est continue, $x_{t_0} = \varphi_0$, $x_t \in G$ et $D^{**}x(t) \subseteq F(t, \tilde{x}_t)$ pour tout $t \in J(a')$.

On appelle *système de commande à argument retardé* tout ensemble $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, U, F\}$ où $U\colon\ I(a) \times G \to \mathscr{K}(\mathscr{U})$ et $f\colon\ I(a) \times G \times \mathscr{U} \to R^n$.

On appelle *solution* de ce système tout triplet $\{a', x, u\}$ où $a' \in (0, a]$, la fonction $x\colon J(a') \to R^n$ est continue dans $J(a')$ et absolument continue dans $I(a')$, la fonction $u\colon\ I(a') \to \mathscr{U}$ est mesurable, $x_{t_0} = \varphi_0$, $\tilde{x}_t \in G$, $u(t) \in U(t, \tilde{x}_t)$ pour tout $t \in I(a')$ et $x'(t) = f\big(t, \tilde{x}_t, u(t)\big)$ presque partout dans $I(a')$.

On appelle *équation au paratingent à argument retardé associée au système de commande* l'équation $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, E\}$ où $E(t, \xi) = f\big(t, \xi, U(t, \xi)\big)$ pour tout $(t, \xi) \in I(a) \times G$.

Dans ce qui suit l'ensemble F sera supposé compact, convexe, semi-continu supérieurement et pour lequel il existe un $K > 0$ tel que $\sup\{|x|, x \in F(t, \xi), (t, \xi) \in I(a) \times G\} \leqslant K$.

Soit $\delta > 0$ tel que $|\varphi_0(\theta') - \varphi_0(\theta'')| \leqslant \beta/2$ pour $\theta', \theta'' \in [-\tau, 0]$.

Les théorèmes suivants (énoncés d'une façon un peu différente) ont été établis par Myškis (voir [3]):

a. *Il existe au moins une solution $\{a^*, x\}$ de l'équation au paratingent à argument retardé, $a^* = \{\min a, \delta, \beta/2k\}$.*

b. *Toute solution $\{a', x\}$ où $a' < a^*$ peut être prolongée à une solution $\{a^*, y\}$.*

c. *L'ensemble des fonctions x telles que $\{a^*, x\}$ est une solution de l'équation en question est compact dans l'espace des fonctions à valeurs dans R^n et continues dans l'intervalle fermé $[t_0, t_0 + a^*]$.*

d. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\eta(\varepsilon) > 0$ *tel que toute équation* $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_p, \tilde{F}\}$, *où* $\|\tilde{\varphi}_0 - \varphi_0\| \leqslant \eta$, $\|\tilde{\tau}_j - \tau_j\| \leqslant \eta$ *et* $\tilde{F}$: $I(a) \times G \to \mathscr{K}(R^n)$, *la fonction* $\tilde{F}$ *étant compacte, convexe, semicontinue supérieurement et telle que* $\varrho^*\big(\tilde{F}(\tilde{t}, \tilde{\xi}), \bigcup\limits_{\substack{|t-\tilde{t}|\leqslant\eta \\ |\xi-\tilde{\xi}|\leqslant\eta}} F(t, \xi)\big) \leqslant \eta$, *a les propriétés suivantes*:

1° *Toute solution* $\{\tilde{a}, \tilde{x}\}$, $\tilde{a} \in (0, a^*]$ *de* $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_p, F\}$ *peut être prolongée jusqu'à une solution* $\{a^*, \tilde{y}\}$.

2° *Pour toute solution* $\{a^*, \tilde{x}\}$ *de* $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_p, \tilde{F}\}$, *il existe une solution* $\{a^*, x\}$ *de* $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, F\}$ *telle que* $|\tilde{x} - x| \leqslant \varepsilon$.

e. *Soit la zone d'émission* $Z(\varphi_0)$ *l'ensemble des points* $\big(t, x(t)\big) \in I(a^*) \times R^n$ *tels que* $\{a^*, x\}$ *est une solution de* $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, F\}$. *Alors l'ensemble* $Z(\varphi_0)$ *est compact, connexe et son intersection avec l'ensemble* $t = \tilde{t}$ $\big($*où* $\tilde{t} \in I(a^*)\big)$ *est compacte et connexe.*

Le théorème 1 permet d'en déduire les propriétés correspondantes des systèmes de commande à argument retardé. Admettons en effet que la fonction f est continue, que le champ U est compact semicontinu supérieurement, que le champ E est convexe et qu'il existe un $K > 0$ tel que $|w| \leqslant K$ pour tout $w \in \mathscr{U}$. Alors le champ E est compact, semicontinu supérieurement et il existe un $K_1 > 0$ tel que $|x| \leqslant K_1$ pour tout $x \in E(t, \xi)$ où $(t, \xi) \in I(a) \times C(\beta)$. On peut donc appliquer les théorèmes a et 1, ce qui entraîne l'existence d'une solution $\{\tilde{a}, x, u\}$ du système de commande où $\tilde{a} = \inf\{a, \delta, \beta/2K_1\}$. En vertu des théorèmes b et 1, toute solution $\{a', x, u\}$ peut être prolongée à une solution $\{\tilde{a}, y, v\}$. En vertu du théorème c, l'ensemble des fonctions x pour lesquelles il existe une fonction u telle que $\{\tilde{a}, x, u\}$ est une solution du système de commande est compact dans l'espace des fonctions continues dans $I(\tilde{a})$. Si l'on définit la zone d'émission $W(\varphi_0)$ du système de commande comme l'ensemble des points $\big(t, x(t)\big) \in I(\tilde{a}) \times R^n$ pour lequel il existe une fonction u telle que $\{\tilde{a}, x, u\}$ est une solution du système de commande, on conclut que $W(\varphi_0)$ est compact et connexe et toute section de $W(\varphi_0)$ par un plan $t = \tilde{t}$ (où $\tilde{t} \in I(\tilde{a})$) est également compacte et connexe.

Ważewski a remarqué que l'on peut déduire de ces propriétés l'existence d'une commande optimale.

Soit en effet A: $I(\tilde{a}) \to \mathscr{K}(R^n)$ un champ compact et semicontinu supérieurement. Un ensemble A est *accessible* lorsqu'il existe un point $t \in I(\tilde{a})$ tel que $W_t(\varphi_0) \cap A(t) \neq \emptyset$, où $W_t(\varphi_0)$ est l'ensemble des points $x(t) \in R^n$ tels que $\big(t, x(t)\big) \in W(\varphi_0)$. On dit que t^* est le *temps minimum de rencontre avec* A lorsqu'il existe un $t^* \in I(\tilde{a})$, minimum pour lequel $W_{t^*}(\varphi_0) \cap A(t^*) \neq \emptyset$. Convenons d'appeler *solution optimale de rencontre avec* A toute solution $\{\tilde{a}, x, u\}$ telle que $x(t^*) \in A(t^*)$. On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $\{\varphi_0, \tau_1, \ldots, \tau_p, U, f\}$ *un système de commande où la fonction* f *est continue, le champ* U *est compact et semicontinu supérieurement, le champ* E *est convexe,* $|w| \leqslant K$ *pour* $w \in \mathscr{U}$. *Soit en outre* $A\colon I(\tilde{a}) \to \mathscr{K}(R^n)$ *un champ compact et semicontinu supérieurement pour lequel* $\varphi_0(0) \notin A(t_0)$. *Alors si* A *est accessible, il existe au moins une solution optimale de rencontre avec* A.

Dans le cas particulier où l'ensemble A est constant et se réduit à un point, le théorème 2 est du type de Filippov (voir [1]).

Remarque. Le cas particulier des systèmes de commande à argument retardé et celui des équations au paratingent à argument retardé sont plus simples que le cas général des systèmes à retardement, du fait que le domaine de définition G appartient à un espace de dimension finie dans le premier cas et à un espace de Banach de fonctions continues dans le second. C'est pourquoi les résultats de Myškis (voir [3], p. 122-133) ne se laissent pas étendre directement au cas général.

TRAVAUX CITÉS

[1] А. Ф. Филиппов, *О некоторых вопросах теории оптимального регулирования*, Вестник Московского Университета 14 (1959), № 2, p. 25-32.

[2] A. M. Marchaud, *Sur les champs de demi-cônes et les équations différentielles du premier ordre*, Bulletin de la Société Mathématique de France 62 (1934), p. 1-38.

[3] А. Д. Мышкис, *Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Успехи Математических Наук 4 (1949), вып. 5, p. 99-141.

[4] T. Ważewski, *Systèmes de commande et équations au contingent*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences math., astr. et phys., 9 (1961), p. 151-155.

[5] — *Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables*, ibidem 9 (1961), p. 861-863.

[6] — *Sur une condition équivalente à l'équation au contingent*, ibidem 9 (1961), p. 865-867.

[7] S. K. Zaremba, *Sur les équations au paratingent*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 60 (1936), p. 139-160.

Reçu par la Rédaction le 3. 1. 1966