COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR D'ÉVOLUTION

PAR

R. CONTI (FLORENCE)

1. Etant donnée une matrice carrée réelle d'ordre n, $A(t)$, fonction continue de la variable réelle t dans un intervalle ouvert $]a, \omega[$ on définit la série en matrices

$$(1)\quad \Phi(t, s) = E+\int_s^t A(\tau_1)d\tau_1+\int_s^t\int_s^{\tau_1} A(\tau_1)A(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\ldots, \qquad t, s\in\,]a, \omega[,$$

où E est la matrice identité. Cette définition s'étend au cas où $A(t)$ est seulement localement intégrable au sens de Lebesgue dans $]a, \omega[$, les intégrales dans (1) étant celles de Lebesgue. La famille de matrices $\Phi(t, s)$ est appellée *opérateur d'évolution*.

Nous dirons que $\Phi(t, s)$ vérifie la *propriété* P_q, avec $q\geqslant 1$, s'il existe une fonction $k_q(s)>0$ telle que

$$(2)\qquad \Big(\int_s^t |\Phi(t, \sigma)|^q d\sigma\Big)^{1/q}\leqslant k_q(s), \qquad a< s\leqslant t<\omega,$$

où $|\Phi(t, \sigma)| = \sup\limits_x \|\Phi(t, \sigma)x\|/\|x\|$, $x\in\boldsymbol{R}^n$ et $\|x\|$ est la norme euclidienne dans $\boldsymbol{R}^n$, $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

Nous dirons encore que $\Phi(t, s)$ vérifie la *propriété* P_∞ s'il existe une fonction $k_\infty(s)>0$ telle que

$$(3)\qquad |\Phi(t, \sigma)|\leqslant k_\infty(s), \qquad a< s\leqslant \sigma\leqslant t<\omega.$$

Evidemment, la propriété P_∞ peut être considérée comme cas limite de P_q lorsque $q\to\infty$.

Enfin $\Phi(t, s)$ vérifie la *propriété* $P_{e,q}$ lorsqu'il existent des fonctions $h_q(s)>0$ et $\lambda(s)>0$, telles que

$$(4)\qquad |\Phi(t, \sigma)|\leqslant h_q(s)\exp[-\lambda(s)(t-\sigma)^{1/q}], \qquad a< s\leqslant \sigma\leqslant t<\omega.$$

Le but de cette communication est celui de préciser des relations parmi ces trois propriétés qui jouent un rôle central dans l'étude du comportement asymptotique (pour $t\to\omega$) des solutions des équations différentielles linéaires. Pour cela nous ne nous servirons pas de la définition (1) de $\Phi(t, s)$, mais plûtot des identités bien connues

$$\Phi(t, s) = E + \int_s^t \Phi(t, \sigma) A(\sigma) d\sigma, \qquad t, s \in]a, \omega[, \tag{5}$$

$$\Phi(t, s)\Phi(s, r) = \Phi(t, r), \qquad t, s, r \in]a, \omega[, \tag{6}$$

que l'on tire aisément de (1). Cela donne la possibilité d'étendre les résultats au cas où $\Phi(t, s)$ est, pour chaque couple t, s, un opérateur linéaire dans un espace linéaire plus général que $\boldsymbol{R}^n$.

2. Les propriétés P_q et P_∞ sont indépendantes. Il est évident que $P_\infty \not\Rightarrow P_q$, mais non que $P_q \not\Rightarrow P_\infty$: cela a été démontré pour $q = 1$ par Coppel [3], p. 73, en adaptant un exemple de Massera et Schäffer [5] (Ex. 5.1, p. 536). Pour $q \geqslant 1$ quelconque on peut définir $A(t)$ comme suit.

Soit $n = 1$, $a = -\infty$, $\omega = +\infty$, $J_k = [k - 2^{-4qk}, k + 2^{-4qk}]$, $k = 1, 2, \ldots$, et soit $\lambda(t)$ une fonction continue, $= 1$ en dehors des J_k, $\lambda(k) = 2^{2k}$, $\lambda(t)$ linéaire ailleurs. Enfin $A(t) = -[1 + \dot{\lambda}(t)/\lambda(t)]$. On trouve alors

$$\int_0^t |\Phi(t, \sigma)|^q d\sigma \leqslant 1/q + 2/(2^{2q} - 1),$$

$$\Phi(k + 2^{-4qk}, k) = 2^{2k} \exp(-2^{-4qk}),$$

donc $P_q \not\Rightarrow P_\infty$.

Cependant on a $P_q \Rightarrow P_\infty$ si, pour $p^{-1} = 1 - q^{-1}$, il existe une fonction $a_p(s) > 0$ telle que

$$\Big(\int_s^t |A(\sigma)|^p d\sigma\Big)^{1/p} \leqslant a_p(s), \qquad a < s \leqslant t < \omega. \tag{7}$$

En effet de (5) on tire ($s \leqslant \sigma \leqslant t$)

$$|\Phi(t, \sigma)| \leqslant 1 + \int_s^t |\Phi(t, \sigma)|\,|A(\sigma)| d\sigma \leqslant 1 + \Big(\int_s^t |\Phi(t, \sigma)|^q d\sigma\Big)^{1/q} \Big(\int_s^t |A(\sigma)|^p d\sigma\Big)^{1/p}$$

et l'on obtient (3) avec $k_\infty(s) = 1 + k_q(s) a_p(s)$.

Pour $q = 1$ (c'est-à-dire $A(t)$ bornée), cela a été démontré par Bridgland [2], p. 273, et, d'une façon différente, par Halanay [4], p. 120.

3. Il est évident que $P_{e,q} \Rightarrow P_q \cap P_\infty$, c'est-à-dire que $P_{e,q} \Rightarrow P_q$ et $P_{e,q} \Rightarrow P_\infty$. Le contraire, $P_q \cap P_\infty \Rightarrow P_{e,q}$ peut être démontré par une technique indiquée par Bellman [1], p. 521, qui a été développée par Bridgland [2], p. 16, dans le cas $q = 1$. En partant de l'identité (6) on a pour $a < s \leqslant \sigma \leqslant t < \omega$

$$(t - \sigma)|\Phi(t, \sigma)| = \int_\sigma^t |\Phi(t, \tau)\Phi(\tau, \sigma)| d\tau \leqslant k_\infty(s) k_q(s) (t - \sigma)^{1/p}$$

avec $p^{-1} = 1-q^{-1}$, donc

$$(t-\sigma)^{1/q}|\Phi(t,\sigma)| \leqslant k_\infty(s)k_q(s).$$

On en tire

$$(1+1/q)^{-1}(t-\sigma)^{1+1/q}|\Phi(t,\sigma)|$$

$$= \int_\sigma^t (\tau-\sigma)^{1/q}|\Phi(t,\tau)\Phi(\tau,\sigma)|\,d\tau \leqslant k_\infty(s)k_q^2(s)(t-\sigma)^{1/q}.$$

Donc

$$(1+1/q)^{-1}(t-\sigma)^{2/q}|\Phi(t,\sigma)| \leqslant k_\infty(s)k_q^2(s).$$

En général $(m = 2, 3, \ldots)$:

$$(1+1/q)^{-1}\ldots\big(1+(m-1)/q\big)^{-1}(t-\sigma)^{m/q}|\Phi(t,\sigma)| \leqslant k_\infty(s)k_q^m(s)$$

et pourtant on a $(m = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{[\lambda_q(s)(t-\sigma)^{1/q}]^m}{m!}|\Phi(t,\sigma)| \leqslant k_\infty(s)[\lambda_q(s)k_q(s)]^m$$

où $0 < \lambda_q(s) < k_q^{-1}(s)$. En sommant par rapport à m on obtient (4) avec $h_q(s) = k_\infty(s)[1-\lambda_q(s)k_q(s)]^{-1}$.

COROLLAIRE. *Sous l'hypothèse* (7) *on a* $P_{e,q} \Leftrightarrow P_q$.

TRAVAUX CITÉS

[1] R. Bellman, *On an application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations*, Annals of Mathematics 49 (1948), p. 515-522.

[2] T. F. Bridgland, Jr., *Stability of linear signal transmission systems*, SIAM Review 5 (1963), p. 7-32 and 273.

[3] W. A. Coppel, *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston 1965.

[4] A. Halanay, *Théorie qualitative des équations différentielles* (en roumain), Bucarest 1963.

[5] J. L. Massera et J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis, I*, Annals of Mathematics 67 (1958), p. 517-573.

Reçu par la Rédaction le 3. 1. 1966