COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

SUR LES FORMULES ASYMPTOTIQUES CONCERNANT LES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

MILOŠ RÁB (BRNO)

Le théorème suivant a été établi dans mon travail récent (1):

Soient dans le système

$$\text{(S)} \qquad x_i' = a_{i1}(\tau)x_1 + a_{i2}(\tau)x_2 \ldots a_{in}(\tau)x_n \qquad \text{où} \qquad i = 1, \ldots, n$$

les fonctions $a_{ij}(\tau)$ *continues pour* $\tau \geqslant \tau_0$, *telles que*

$$\int_{\tau_0}^{\infty} |a_{ij}(\tau)|\,d\tau < \infty \qquad \text{pour} \qquad i \neq j$$

assujetties pour $i, j = 1, \ldots, n$ *à l'une au moins des deux inégalités*

$$\inf_{\tau_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \operatorname{Re}[a_{ii}(\tau) - a_{jj}(\tau)]\,d\tau > -\infty,$$

$$\sup_{\tau_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \operatorname{Re}[a_{ii}(\tau) - a_{jj}(\tau)]\,d\tau < \infty.$$

Il existe alors n solutions indépendantes x_k *du système* (S) *telles que*

$$x_k(\tau) = \exp\left\{\int_{\tau_0}^{\tau} a_{kk}(\tau)\,d\tau\right\}\big(c_k + o(1)\big) \qquad \text{pour} \qquad k = 1, \ldots, n,$$

tout c_k *étant un vecteur constant différent de* 0.

Ici, ce théorème sera appliqué pour déduire des formules asymptotiques concernant les solutions du système

$$\text{(1)} \qquad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},$$

où

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

(1) M. Ráb, *Les formules asymptotiques pour les solutions d'un système d'équations différentielles*, Archivum Mathematicum (Brno) 1 (1965), (3), p. 199-212.

est une matrice dont les éléments $a_{ij}(t)$ sont des fonctions continues dans un intervalle $I = \langle a, \infty)$. En transformant le système (1) par la substitution

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{y},$$

où $\boldsymbol{B}(t)$ est une matrice carrée aux éléments $b_{ij}(t)$ pour $i, j = 1$ et 2 différentiables dans I, on obtient le système

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{y} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}'.$$

Or en vertu des formules

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\varDelta} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} b_{22}b_{11}a_{11} - b_{12}b_{11}a_{21} + b_{22}b_{21}a_{12} - b_{12}b_{21}a_{22} & b_{22}b_{12}a_{11} - b_{12}^2a_{21} + b_{22}^2a_{12} - b_{12}b_{22}a_{22} \\ -b_{21}b_{11}a_{11} + b_{11}^2a_{21} - b_{21}^2a_{12} + b_{11}b_{21}a_{22} & -b_{21}b_{12}a_{11} + b_{11}b_{12}a_{21} - b_{21}b_{22}a_{12} + b_{11}b_{22}a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}' = \frac{1}{\varDelta} \begin{pmatrix} b_{22}b_{11}' - b_{12}b_{21}' & b_{22}b_{12}' - b_{12}b_{22}' \\ -b_{21}b_{11}' + b_{11}b_{21}' & -b_{21}b_{12}' + b_{11}b_{22}' \end{pmatrix},$$

où $\varDelta = \det \boldsymbol{B}$, on a les expressions suivantes pour les éléments c_{ij} de la matrice C:

$$c_{11} = \frac{1}{\varDelta}(b_{22}b_{11}a_{11} - b_{12}b_{11}a_{21} + b_{22}b_{21}a_{12} - b_{12}b_{21}a_{22} + b_{12}b_{21}' - b_{22}b_{11}'),$$

$$c_{12} = \frac{1}{\varDelta}(b_{22}b_{12}a_{11} - b_{12}^2a_{21} + b_{22}^2a_{12} - b_{12}b_{22}a_{22} + b_{12}b_{22}' - b_{22}b_{12}'),$$

$$c_{21} = \frac{1}{\varDelta}(-b_{21}b_{11}a_{11} + b_{11}^2a_{21} - b_{21}^2a_{12} + b_{11}b_{21}a_{22} + b_{21}b_{11}' - b_{11}b_{21}'),$$

$$c_{22} = \frac{1}{\varDelta}(-b_{21}b_{12}a_{11} + b_{11}b_{12}a_{21} - b_{21}b_{22}a_{12} + b_{11}b_{22}a_{22} + b_{21}b_{12}' - b_{11}b_{22}').$$

Admettons que

$$b_{12}(t)b_{21}(t) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t \in I$$

et posons

$$\frac{b_{22}}{b_{12}} = \xi, \qquad \frac{b_{11}}{b_{21}} = \eta;$$

on peut alors exprimer c_{ij} dans la forme

$$c_{11} = -\frac{b_{21}'}{b_{21}} - \frac{1}{\xi\eta - 1}(\xi\eta' - a_{11}\xi\eta + a_{21}\eta - a_{12}\xi + a_{22}), \tag{2}$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}}{b_{21}(\xi\eta - 1)}\big(\xi' + a_{12}\xi^2 + (a_{11} - a_{22})\xi - a_{21}\big), \tag{3}$$

$$(4) \qquad c_{21} = \frac{b_{21}}{b_{12}(\xi\eta - 1)}\big(\eta' + a_{21}\eta^2 + (a_{22} - a_{11})\eta - a_{12}\big),$$

$$(5) \qquad c_{22} = -\frac{b'_{12}}{b_{12}} - \frac{1}{\xi\eta - 1}(\eta\xi' - a_{22}\xi\eta - a_{21}\eta + a_{12}\xi - a_{11}).$$

Nous allons montrer que, par un choix convenable des fonctions ξ et η, on peut approcher les solutions du système (1) par celles du système

$$z'_1 = c_{11}(t)z_1, \qquad z'_2 = c_{22}(t)z_2.$$

La démonstration sera basée sur le lemme suivant et qui est facile à établir:

LEMME. *Soient $a_{ij}(t)$, où $i, j = 1$ et 2, des fonctions définies dans l'intervalle I et telles que*

$$a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0.$$

Alors, en posant

$$(6) \qquad D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21},$$

$$(7) \qquad \xi_i = \frac{1}{2a_{12}}(a_{22} - a_{11} + \varepsilon_i\sqrt{D}), \qquad \eta_i = \frac{1}{2a_{21}}(a_{11} - a_{22} + \varepsilon_i\sqrt{D}),$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} - \varepsilon_i\sqrt{D}),$$

où $i = 1$ et 2, $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$, on a

$$(8) \qquad \xi_i\eta_i = 1,$$

$$(9) \qquad a_{12}\xi_i + a_{11} = a_{21}\eta_i + a_{22} = \lambda_i,$$

$$(10) \qquad a_{12}\xi_i^2 + (a_{11} - a_{22})\xi_i - a_{21} = 0,$$

$$(11) \qquad a_{21}\eta_i^2 + (a_{22} - a_{11})\eta_i - a_{12} = 0,$$

$$(12) \qquad \lambda_i^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_i + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

THÉORÈME. *Soient $a_{ij}(t)$, où $i, j = 1$ et 2, des fonctions différentiables dans l'intervalle I et telles que*

$$(13) \qquad a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0, \qquad \big(a_{11}(t) - a_{22}(t)\big)^2 + 4a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0.$$

Les fonctions ξ_i, η_i et λ_i étant définies par les formules (7) *et (α, β) désignant $(1, 2)$ ou bien $(2, 1)$, admettons que*

$$(14) \qquad \int_a^\infty \left(\left| \frac{\xi'_\alpha(t)}{\xi_\alpha(t)\eta_\beta(t) - 1} \right| + \left| \frac{\eta'_\beta(t)}{\xi_\alpha(t)\eta_\beta(t) - 1} \right| \right) dt < \infty$$

et que la fonction

$$F(t) = \mathrm{Re}\left[\lambda_\beta(t) - \lambda_\alpha(t) + \frac{\xi'_\alpha(t)}{\xi_\alpha(t) - \xi_\beta(t)} - \frac{\eta'_\beta(t)}{\eta_\beta(t) - \eta_\alpha(t)}\right]$$

***satisfait** à l'une au moins des inégalités suivantes:*

$$\inf_{a \leqslant \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(t)\,dt > -\infty, \quad \sup_{a \leqslant \tau_1 < \tau_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(t)\,dt < \infty. \tag{15}$$

Alors, il existe de constantes $c_1, \ldots, c_4$ permettant d'écrire un système fondamental des solutions du système (1) *sous la forme*

$$X = BY,$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \eta_\beta & 1 \\ 1 & \xi_\alpha \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} \exp\left\{\int_a^t \left[\lambda_\beta(s) - \frac{\eta'_\beta(s)}{\eta_\beta(s) - \eta_\alpha(s)}\right] ds\right\}(c_1 + \sigma(1)) & \exp\left\{\int_a^t \left[\lambda_s(s) - \frac{\xi'_\alpha(s)}{\xi_\alpha(s) - \xi_\beta(s)}\right] ds\right\}(c_3 + \sigma(1)) \\ \exp\left\{\int_a^t \left[\lambda_\beta(s) - \frac{\eta'_\beta(s)}{\eta_\beta(s) - \eta_\alpha(s)}\right] ds\right\}(c_2 + \sigma(1)) & \exp\left\{\int_a^t \left[\lambda_\alpha(s) - \frac{\xi'_\alpha(s)}{\xi_\alpha(s) - \xi_\beta(s)}\right] ds\right\}(c_4 + \sigma(1)) \end{pmatrix} \tag{16}$$

Démonstration. Il résulte de (13) et (7) que $\xi_\alpha(t) \neq \xi_\beta(t)$ pour tout t de l'intervalle I. En vertu de la thèse (8) du lemme on a dans cet intervalle $\xi_i(t) \neq 0$ pour $i = 1$ et 2. Transformons le système (1) par la substitution

$$x = By. \tag{17}$$

En posant

$$b_{12} = b_{21} = 1, \quad b_{22} = \xi_\alpha(t) \quad \text{et} \quad b_{11} = \frac{1}{\xi_\beta(t)} = \eta_\beta(t),$$

on obtient facilement les coefficients du système transformé

$$y' = Cy. \tag{18}$$

On a tout d'abord

$$\Delta(t) = \frac{\xi_\alpha(t)}{\xi_\beta(t)} - 1 \neq 0$$

dans I. Les fonctions $\xi_\alpha(t)$ et $\xi_\beta(t)$ satisfaisant aux équations (10) et (11) respectivement, les formules (2)-(5) donnent

$$c_{12} = \frac{\xi'_\alpha}{\xi_\alpha \eta_\beta - 1}, \qquad c_{21} = \frac{\eta'_\beta}{\xi_\alpha \eta_\beta - 1},$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\xi_\alpha \eta_\beta - 1}\big(-\xi_\alpha \eta'_\beta + a_{11}\xi_\alpha \eta_\beta - a_{21}\eta_\beta + a_{12}\xi_\alpha - a_{22} + a_{21}\eta_\beta^2 \xi_\alpha + \\ &\qquad + (a_{22} - a_{11})\eta_\beta \xi_\alpha - a_{12}\xi\big) \\ &= \frac{\xi_\alpha \eta'_\beta}{\xi_\alpha \eta_\beta - 1} + a_{22} + a_{21}\eta_\beta, \end{aligned}$$

d'où en vertu de (9)

$$c_{11} = -\frac{\eta'_\beta}{\eta_\beta - \eta_\alpha} + \lambda_\beta .$$

On trouve d'une manière analogue

$$c_{22} = -\frac{\xi'_\alpha}{\xi_\alpha - \xi_\beta} + \lambda_\alpha .$$

En se servant de (14) et (15), on déduit du théorème cité au début qu'il existe de constantes $c_1, \ldots, c_4$ pour lesquelles la matrice d'un système fondamental des solutions du système (18) est de la forme (16), ce qui achève la démonstration en vertu de (17).

Reçu par la Rédaction le 28. 12. 1965