COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 2

UNE REMARQUE SUR L'ORTHOGONALISATION DES BASES DE SCHAUDER DANS L'ESPACE C

PAR

W. SZLENK (VARSOVIE)

Soit $\{t_{n,i}\}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, un système de nombres tels que $t_{0,0} = 0$, $t_{0,1} = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$

$$t_{n+1,2i} = t_{n,i}, \quad t_{n,i} < t_{n+1,2i+1} < t_{n,i+1}.$$

Soit $\{\varphi_{n,i}(t)\}$ un système de fonctions définies dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$ comme il suit:

$$\varphi_{0,0}(t) = 1, \quad \varphi_{0,1}(t) = t,$$

$$\varphi_{n,i}(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad t \leqslant t_{n,2i} \quad \text{et} \quad t \geqslant t_{n,2i+2}, \\ 1 \quad \text{pour} \quad t = t_{n,2i+1}, \\ \text{linéaire dans les intervalles} \quad \langle t_{n,2i}, t_{n,2i+1}\rangle \\ \text{et} \quad \langle t_{n,2i+1}, t_{n,2i+2}\rangle, \end{cases}$$

où $i = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1$ et $n = 1, 2, \ldots$ Posons

$$\varphi_1(t) = \varphi_{0,0}(t), \quad \varphi_2(t) = \varphi_{0,1}(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{2^{n-1}+i+2}(t) = \varphi_{n,i}(t)$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ et $i = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1$.

Le système $(\varphi_n) = (\varphi_n(t))$ sera dit *système de Schauder* par rapport à l'ensemble $\{t_{n,i}\}$.

Schauder [6] a démontré en 1928 que si l'ensemble $\{t_{n,i}\}$ est dense dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, le système (φ_n) est une base de Schauder dans l'espace C des fonctions continues dans cet intervalle. Franklin [2] a démontré en même année que si $t_{n,i} = i/2^n$ pour tout n et tout i, le système (f_n) résultant du système (φ_n) par l'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt est également une base de Schauder dans C. En 1963, Ciesielski [1] a généralisé ce théorème en montrant que si $\{t_{n,i}\}$ est dense dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$, tout système (f_n) résultant d'un système quelconque de Schauder (φ_n) par l'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt est une base dans C.

Je vais construire un exemple de base (ψ_n) dans l'espace C telle que le système (g_n) résultant de (ψ_n) par l'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt n'est pas une base dans C, et plus encore, que la base (ψ_n) peut être choisie aussi près que l'on veut d'un système de Schauder (φ_n), à savoir que pour toute suite de nombres positifs (ε_n) convergente rapidement (voir Théorème) vers 0 on peut choisir les systèmes (ψ_n) et (φ_n) de façon que l'on ait $\|\psi_n-\varphi_n\|\leqslant\varepsilon_n$ pour tout $n=1,2,\ldots$ (la norme étant entendue au sens de l'espace C).

Considérons un système $\{t_{n,i}\}$ tel que

$$t_{1,1}=d_1=\tfrac{1}{2},\qquad t_{n,1}=d_n,\qquad t_{n,2i+1}=\tfrac{1}{2}(t_{n-1,i}+t_{n-1,i+1}),\tag{1}$$

pour $i=1,2,\ldots,2^{n-1}-1$ et $n=1,2,\ldots$, la suite (d_n) étant décroissante et convergente vers 0. Il est clair que l'ensemble des nombres $\{t_{n,i}\}$ est dense dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. Posons

$$\begin{cases}\psi_{0,0}(t)=\varphi_{0,0}(t), \quad \psi_{0,1}(t)=\varphi_{0,1}(t), \quad \psi_{1,0}(t)=\varphi_{1,0}(t),\\ \psi_{n,0}(t)=\varphi_{n,0}(t)+\varepsilon_n\varphi_{n,2^{n-1}-1}(t) \quad \text{pour} \quad n=2,3,\ldots,\\ \psi_{n,i}(t)=\varphi_{n,i}(t) \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,2^{n-1}-1,\ n=2,3,\ldots,\end{cases}\tag{2}$$

où (φ_n) est le système de Schauder par rapport à l'ensemble $\{t_{n,i}\}$ déterminé par (1) et (ε_n) est une suite quelconque de nombres positifs. Désignons par (ψ_n) la suite des fonctions $\psi_{n,i}(t)$ ordonnées comme les fonctions $\varphi_{n,i}(t)$. Soit $\sum_{k=1}^{m}c_k\psi_k$ une combinaison linéaire des fonctions $\psi_1,\ldots,\psi_m$, telle que

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_m}\int_0^1\Big(\varphi_{n+1,2^n-1}-\sum_{k=1}^{m}\xi_k\psi_k\Big)^2dt=\int_0^1\Big(\varphi_{n+1,2^n-1}-\sum_{k=1}^{m}c_k\psi_k\Big)^2dt.\tag{3}$$

LEMME. *Si* $d_n<\varepsilon_{n+1}^2/3\cdot 2^{n+4}$ *pour* $n=2,3,\ldots$ *et si la fonction* $\sum_{k=1}^{m}c_k\psi_k$ *satisfait à la condition* (3), *on a pour* $m=2^n+2$

$$|c_{2^n+2}|\geqslant\frac{1}{2\varepsilon_{n+1}}.$$

Démonstration. On a d'après (2) $\psi_{2^n+2}(t)=\psi_{n+1,0}(t)$ et $\varphi_{n+1,0}(t)=0$ dans l'intervalle $\langle t_{n+1,2^{n+1}-2},\,t_{n+1,2^{n+1}}\rangle=\langle 1-1/2^n,1\rangle$, donc

$$\int_0^1\Big(\varphi_{n+1,2^n-1}-\sum_{k=1}^{2^n+1}\xi_k\psi_k-c_{2^n+2}\psi_{2^n+2}\Big)^2dt$$

$$=\int_0^1\Big(\varphi_{n+1,2^n-1}-\sum_{k=1}^{2^n+1}\xi_k\psi_k-c_{2^n+2}\varphi_{n+1,0}-c_{2^n+2}\varepsilon_{n+1}\varphi_{n+1,2^n-1}\Big)^2dt$$

$$\geqslant\int_{1-1/2^n}^{1}\Big[(1-c_{2^n+2}\varepsilon_{n+1})\varphi_{n+1,2^n-1}-\sum_{k=1}^{2^n+1}\xi_k\psi_k\Big]^2dt=I.$$

Les plus petits sous-espaces de C engendrés par les vecteurs $\psi_1, \ldots, \psi_{2^n+1}$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^n+1}$ respectivement étant identiques ($\psi_{2^n+1} = \psi_{n,2^{n-1}-1}$, $\varphi_{2^n+1} = \varphi_{n,2^{n-1}-1}$) et l'espace C étant en vertu du théorème 2.4.3 de [3] celui des fonctions continues linéaires dans tout intervalle $\langle t_{n,i}, t_{n,i+1}\rangle$ où $i = 0, \ldots, 2^n-1$, la fonction $\sum_{k=1}^{2^n+1} \xi_k \psi_k$ est linéaire dans l'intervalle $\langle 1-1/2^n, 1\rangle$. En calculant le minimum de l'intégrale I par rapport à la fonction $\sum_{k=1}^{2^n+1} \xi_k \psi_k$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\min_{\xi_1,\ldots,\xi_{2^n+1}} \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \sum_{k=1}^{2^n+2} \xi_k \psi_k\Big)^2 dt \\
&= \min_{\xi_1,\ldots,\xi_{2^n+1}} \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \sum_{k=1}^{2^n+1} \xi_k \psi_k - c_{2^n+2}\psi_{2^n+2}\Big)^2 dt \\
&\geqslant \min_{\xi_1,\ldots,\xi_{2^n+1}} I = (1-c_{2^n+2}\varepsilon_{n+1})^2 \frac{1}{3\cdot 2^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Or en supposant que $|c_{2^n+2}| < 1/2\varepsilon_{n+1}$, on aurait

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_{2^n+2}} \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \sum_{k=1}^{2^n+2} \xi_k \psi_k\Big)^2 dt \geqslant \frac{1}{3\cdot 2^{n+4}}; \tag{4}$$

comme $\varphi_{n+1,0}(t) = 0$ pour tout $t \notin \langle 0, d_n\rangle$ et $|\varphi_{n+1,0}(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \langle 0, d_n\rangle$, il vient

$$\begin{aligned}
(5)\quad &\min_{\xi_1,\ldots,\xi_{2^n+2}} \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \sum_{k=1}^{2^n+2} \xi_k \psi_k\Big)^2 dt \leqslant \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\psi_{2^n+2}\Big)^2 dt \\
&= \int_0^1 \Big(\varphi_{n+1,2^n-1} - \frac{1}{\varepsilon_{n+1}}\varphi_{n+1,0} - \varphi_{n+1,2^n-1}\Big)^2 dt = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}^2}\int_0^1 (\varphi_{n+1,0})^2 dt \\
&= \frac{1}{\varepsilon_{n+1}^2}\int_0^{d_n} (\varphi_{n+1,0})^2 dt \leqslant \frac{d_n}{\varepsilon_{n+1}^2} < \frac{1}{3\cdot 2^{n+4}}.
\end{aligned}$$

Les formules (4) et (5) étant contradictoires, on a

$$|c_{2^n+2}| \geqslant \frac{1}{2\varepsilon_{n+1}}.$$

Soit $x = x(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$; soit $\|x\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$.

THÉORÈME. *Si* $\varepsilon_n \leqslant 1/2^{n+2}$, $d_n < \varepsilon_{n+1}^2/3\cdot 2^{n+4}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$ *et* (φ_n) *est le système de Schauder par rapport à l'ensemble* $\{t_{n,i}\}$ *donné par* (1), *le système* (ψ_n) *donné par* (2) *a les propriétés suivantes:*

(i) (ψ_n) *est une base de Schauder équivalente* ([1]) *dans l'espace* C *à la base* (φ_n);

(ii) $\|\psi_n - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon_n$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$;

(iii) *le système* (g_n) *résultant du système* (ψ_n) *par l'orthogonalisation d'Hilbert-Schmidt n'est pas une base dans* C ([2]).

Démonstration. (i) et (ii). Considérons les fonctions φ_n (où $n = 1, 2, \ldots$) comme des éléments de l'espace C. Soit (Φ_n) la suite des fonctionnelles linéaires, biorthogonale par rapport au système (φ_n). Comme $\|\Phi_n\| = 2$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, on a $\varepsilon_n \leqslant 1/2^{n+1}\|\Phi_n\|$ et il résulte immédiatement de (2) que $\|\psi_n - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon_n$; le système (ψ_n) est alors une base équivalente à la base (φ_n) en vertu du théorème de Krein-Milman-Rutman [5] (voir également [4], théorème 9.9.9).

(iii). Soit

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n,i}\psi_i \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Posons

$$S_m[x] = \sum_{n=1}^{m} a_n g_n \quad \text{où} \quad a_n = \int_0^1 x(t) g_n(t)\,dt.$$

$S_m[x]$ est évidemment une application linéaire de l'espace C dans lui-même; les combinaisons linéaires de g_n (où $n = 1, 2, \ldots$) étant denses dans C, tout revient, en vertu du théorème de Banach et Steinhaus, à prouver que

$$\overline{\lim_m} \|S_m\| = +\infty \tag{6}$$

où $\|S_m\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|S_m[x]\|$.

En effet, posons $m = 2^n + 2$ (où $n = 1, 2, \ldots$) et $x = \varphi_{n+1, 2^n-1}(t)$. On a en vertu de l'inégalité de Bessel et de la formule (3)

$$S_{2^n+2}[\varphi_{n+1,2^n-1}] = \sum_{k=1}^{2^n+2} c_k \psi_k.$$

([1]) c'est-à-dire que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \psi_n$ entraîne la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \varphi_n$ et réciproquement.

([2]) Si l'on suppose seulement que $\lim_n \varepsilon_n = 0$, la condition (i) prend la forme: (ψ_n) est une base de Schauder dans C (pas nécessairement équivalente à la base (φ_n)).

Les conditions (ii) et (iii) ne changeront pas.

Comme $\psi_{2^n+2}(t) = \varphi_{n+1,0}(t)$, $\psi_{n+1,0}(0) = \psi_{n+1,0}(t_{n+1,2}) = 0$, $\psi_{n+1,0}(t_{n+1,1}) = 1$ et la fonction $\sum_{k=1}^{2^n+1} c_k\psi_k$ est linéaire dans l'intervalle $\langle 0, t_{n+1,2}\rangle$, on peut montrer facilement que

$$\|S_{2^n+2}[\varphi_{n+1,2^n-1}]\| \geqslant \max\left(\left|\sum_{k=1}^{2^n+2} c_k\psi_k(0)\right|, \left|\sum_{k=1}^{2^n+2} c_k\psi_k(t_{n+1,1})\right|, \left|\sum_{k=1}^{2^n+2} c_k\psi_k(t_{n+1,2})\right|\right) \geqslant \frac{|c_{2^n+2}|}{2}.$$

Comme $\|\varphi_{n+1,2^n-1}\| = 1$, il vient en vertu de la dernière inégalité et du lemme

$$\|S_{2^n+2}\| \geqslant \|S_{2^n+2}[\varphi_{n+1,2^n-1}]\| \geqslant \frac{1}{4\varepsilon_{n+1}}.$$

On a par conséquent (6), ce qui achève la démonstration.

TRAVAUX CITÉS

[1] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Mathematica 23 (1963), p. 163-174.

[2] Ph. Franklin, *A set of continuous orthogonal functions*, Mathematische Annalen 100 (1928), p. 522-529.

[3] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935.

[4] С. Качмаж и Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Москва 1958.

[5] М. Крейн, Д. Мильман и М. Рутман, *Об одном свойстве базиса в пространствах Банаха*, Записки Харьковского Математического Общества (4) 16 (1940), p. 106-108.

[6] J. Schauder, *Einige Eigenschaften des Haarschen Orthogonalsystems* Mathematische Zeitschrift 28 (1928), p. 317-320.

Reçu par la Rédaction le 7. 9. 1964