COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIV 1975 FASC. 1

SUR LA COMPARAISON DE CERTAINES TOPOLOGIES MIXTES DANS LES ESPACES BI-NORMÉS

PAR

B. PERROT (BORDEAUX)

0. Introduction. Alexiewicz et Semadeni ([1], [2] et [3]) ont introduit la notion d'espaces bi-normés $(E, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$: espace vectoriel E muni de deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^*$ avec $\|\cdot\|^*$ moins fine que $\|\cdot\|$. Dans un tel espace, on a d'une manière naturelle un mode de convergence séquentiel γ: une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers un point x de E pour γ si et seulement si $\|x_n - x\|^* \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $\sup \|x_n\| < \infty$. Le cadre naturel qui généralise ces notions s'obtient en munissant E d'une topologie localement convexe séparée τ_1 et d'une bornologie convexe β au sens de [6] formée de parties bornées pour τ_1. Du point de vue topologique ([5], [9] et [10]) on introduit les trois topologies suivantes: la „topologie mixte localement convexe τ", qui est la topologie localement convexe la plus fine qui induit la même topologie que τ_1 sur les parties de β, la „topologie mixte vectorielle τ^v" (resp.: générale τ^g), qui est la topologie vectorielle (resp.: générale) la plus fine qui induit la même topologie que τ_1 sur les parties de β.

Dans le cadre d'une étude du mode de convergence mixte et des topologies mixtes faisant intervenir systématiquement la théorie des bornologies, nous avons été amenés au présent travail après la lecture de [5] essentiellement pour obtenir un exemple d'une space bi-normé dans lequel τ est strictement moins fine que τ^g, ce qui répond à une question de Garling [5], p. 23.

Dans le premier paragraphe nous donnerons une interprétation originale de la topologie τ^g qui nous permettra d'obtenir une construction effective d'un système fondamental de voisinages de l'origine; dans le second paragraphe nous en déduisons quelques propriétés sur l'égalité $\tau = \tau^g$, et enfin dans le trosième paragraphe nous obtenons l'exemple annoncé précédemment.

On a évidemment $\tau \leqslant \tau^v \leqslant \tau^g$. Nous allons voir tout de suite que l'étude se ramène essentiellement à la comparaison entre τ et τ^g.

Si β est une bornologie à base dénombrable, on a $\tau = \tau^v$ d'après la proposition 5 de [5]. Si on n'impose pas cette hypothèse, on peut obtenir facilement un contre-exemple en prenant pour E un Banach quelconque et β la bornologie de dimension finie (une partie B de E appartient à β si et seulement si elle est contenue dans un sous-espace de dimension finie et si elle est bornée pour la bornologie canonique de celui-ci). Alors τ^v est la topologie vectorielle la plus fine sur E; elle n'est pas convexe car E est de dimension algébrique non dénombrable (voir [4], ex. 15; 2; § 4) donc τ est strictement moins fine que τ^v.

Étant donné les considérations précédentes, nous nous intéresserons à la comparaison entre τ et τ^g; même si β est à base dénombrable et si τ_1 est métrisable, on n'a pas obligatoirement l'égalité $\tau = \tau^g$. Garling donne le contre-exemple suivant:

$$E = \bigoplus_{N} l^\infty$$

muni de la topologie métrisable induite par celle de $\prod_N l^\infty$ et de la bornologie somme directe au sens habituel [6]. Il se demande alors si l'on peut trouver encore un tel exemple dans le cas d'un espace bi-normé. Il faut remarquer que dans ce cas particulier les phénomènes ne pourront être analogues car si l'on regarde les deux exemples déjà cités dans ce travail, on s'aperçoit que ce qui intervient fondamentalement dans le fait que les topologies sont différentes, c'est que pour tout borné B de β le sous-espace vectoriel E_B engendré par B est „petit" dans E: dans le premier exemple E_B est de dimension finie dans E qui est de dimension non dénombrable, et dans le second E_B est une somme directe finie dans E qui est une somme directe infinie; mais par contre dans le cas des espaces bi-normés, B étant la boule unité de $\|\cdot\|$ E_B sera toujours l'espace E tout entier.

1. La topologie τ^g interprétée comme topologie de la γ-fermeture. E étant muni d'une topologie τ_1 localement convexe séparée et d'une bornologie convexe β formée de parties bornées pour τ_1, on dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E *converge au sens de γ vers un point x de E* si la suite converge vers x pour la topologie τ_1 et si elle est bornée pour la bornologie β. Ce mode de convergence γ fait de E un espace vectoriel de type L au sens de [7]; alors d'une manière standard, on définit les parties γ-fermées comme étant les parties F telles que les limites au sens de γ de toutes suites de points de F appartiennent à F; la topologie de la γ-fermeture est alors la topologie obtenue en prenant comme famille de parties fermées les parties γ-fermées.

Cette topologie rend continues les homothéties et les translations; il nous suffira d'en connaître un système fondamental de voisinages de l'origine; on remarque qu'on peut toujours prendre celui-ci formé de parties absorbantes et équilibrées.

Ce qui nous servira essentiellement dans le § 3 c'est que d'une manière analogue à ce qui a été fait pour la topologie de la Mackey-fermeture dans [8], on peut construire *d'une manière effective* un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie de la γ-fermeture.

Définition. On appellera *partie γ-fondamentale,* toute partie qui contient presque tous les termes (tous sauf au plus un nombre fini) de toutes suites qui convergent en 0 pour γ.

PROPOSITION 1. *Toute partie qui contient une partie de la forme* $\bigcup_{B\in\beta} B\cap V_B$ *(où les V_B sont des voisinages de l'origine pour τ_1) est une partie γ-fondamentale. Réciproquement, si τ_1 est métrisable, toute partie γ-fondamentale contient une partie de la forme citée ci-dessus.*

La partie directe est immédiate. Réciproquement, soit $(V_n)_n$ un système fondamental de voisinages de l'origine pour τ_1 et soit P une partie γ-fondamentale; s'il existe $B\in\beta$ telle que pour tout n $B\cap V_n \not\subset P$, alors on obtient une suite $(x_n)_n$ qui converge vers 0 pour γ et telle que $x_n \notin P$, ce qui est en contradiction avec le fait que P est une partie γ-fondamentale. Maintenant nous allons donner une construction effective d'un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie de la γ-fermeture. Soit une partie γ-fondamentale quelconque; nous l'appellerons: partie γ-fondamentale d'ordre 1 et nous la noterons $P^{(1)}$. A tout élément x de $P^{(1)}$ on associe d'une manière arbitraire une partie γ-fondamentale $P(x)$. On forme alors la partie γ-fondamentale d'ordre 2

$$P^{(2)} = \bigcup_{x\in P^{(1)}} \{x\} + P(x)$$

et ainsi de suite. Ainsi, on forme par récurrence les parties γ-fondamentales d'ordre n,

$$P^{n} = \bigcup_{x\in P^{(n-1)}} \{x\} + P(x).$$

On obtient une suite croissante pour l'inclusion de parties γ-fondamentales $(P^{(n)})_n$. On appellera *chaîne cohérente* de parties γ-fondamentales la partie

$$P = \bigcup_{n\in N^*} P^{(n)}.$$

On emploie l'adjectif „cohérente" pour bien désigner que chaque $P^{(n)}$ de la suite est fabriqué à partir du $P^{(n-1)}$ de cette même suite.

THÉORÈME 1. *Les chaînes cohérentes de parties γ-fondamentales forment un système fondamental de voisinages ouverts de l'origine pour la topologie de la γ-fermeture.*

Soit $\mathscr{U}$ un voisinage ouvert de 0. C'est une partie γ-fondamentale. Prenons $P^{(1)} = \mathscr{U}$; pour tout élément x de $P^{(1)}$ la partie $\mathscr{U} - \{x\}$, translatée de $\mathscr{U}$ par $(-x)$, est encore une partie γ-fondamentale. Prenons $P(x) = \mathscr{U} - \{x\}$, alors $P^{(2)} = P^{(1)} = \mathscr{U}$. On forme ainsi une suite stationnaire $P^{(n)} = \mathscr{U}$. La chaîne cohérente associée est donc égale à $\mathscr{U}$. Réciproquement, soit P une chaîne cohérente de parties γ-fondamentales. On va vérifier que $\complement P$ (le complémentaire de P dans E) est une partie γ-fermée, ce qui achèvera la démonstration car une partie γ-fondamentale contient toujours l'origine. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de $\complement P$ qui converge pour γ vers x. Si $x \in P$, alors il existe un entier n tel que $x \in P^{(n)}$; mais quelque soit la partie γ-fondamentale $P(x)$ presque tous les termes $(x_n - x) \in P(x)$, donc presque tous les termes

$$x_n \in \{x\} + P(x) \subset P^{(n+1)} \subset P,$$

ce qui entraîne la contradiction; donc $\complement P$ est γ-fermée.

THÉORÈME 2. *Si τ_1 est métrisable (ou plus généralement, si les restrictions de τ_1 à toutes parties de β sont séquentielles), alors la topologie τ^g et la topologie de la γ-fermeture coïncident.*

Dans les conditions décrites on vérifie aisément que ces deux topologies ont les mêmes parties fermées.

2. Applications des résultats précédents à la comparaison entre τ et τ^g.

PROPOSITION 2. *Si β est à base dénombrable, ou si β est une bornologie topologique, alors les suites qui convergent au sens de γ sont exactement celles qui convergent pour la topologie de la γ-fermeture.*

Les suites qui convergent pour la topologie de la γ-fermeture sont données par un théorème de Kisyński [7]; ce sont les suites telles que de toute sous-suite on puisse extraire une sous-suite qui converge pour γ. Avec l'une ou l'autre des conditions imposées sur β, on vérifie aisément que ce sont celles qui convergent pour γ.

Persson dans [9] introduit les conditions suivantes: b-normal: β admet une base dénombrable formée de parties fermées pour τ_1; c-normal: β est une bornologie topologique et la topologie associée admet un système fondamental de voisinages de l'origine fermés pour τ_1. Il démontre qu'avec l'une ou l'autre des conditions b-normal ou c-normal, les suites qui convergent au sens de γ sont exactement celles qui convergent pour la topologie τ.

PROPOSITION 3. *On suppose τ_1 métrisable. Sous l'une des deux conditions b-normal ou c-normal, on a $\tau = \tau^g$ si et seulement si τ est une topologie séquentielle.*

Remarquons d'abord que la proposition de Persson citée précédemment, avec la proposition 2 et le théorème 2 entraînent que les topologies τ et τ^g ont les mêmes suites convergentes. On rappelle qu'on dit qu'une topologie est *séquentielle* si toute partie séquentiellement fermée est fermée; on voit aisément que la topologie de la γ-fermeture est toujours séquentielle, ce qui permet de conclure.

PROPOSITION 4. *On suppose τ_1 métrisable et β à base dénombrable. S'il existe une partie B de β telle que la fermeture $\bar{B}$ de B pour τ_1 n'appartienne plus à β, alors τ est strictement moins fine que τ^g.*

Soit $(B_n)_n$ une base de β. Alors $(nB_n)_n$ est encore une base de β donc pour tout n $\bar{B} \not\subset nB_n$; il existe donc une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n/n \notin B_n$ et $x_n \in \bar{B}$, B appartient à β, donc $\bar{B}$ est bornée pour τ_1, la suite $(x_n/n)_n$ converge donc vers 0 pour la topologie τ_1, elle converge donc pour $\bar{\gamma}$ le mode de convergence associé à τ_1 et à la bornologie $\bar{\beta}$ engendrée par les fermetures pour τ_1 des parties de β. Mais $\bar{\beta}$ vérifie la condition b-normal donc la suite $(x_n/n)_n$ converge vers 0 pour $\bar{\tau}$ la topologie mixte localement convexe associée à τ_1 et $\bar{\beta}$. Le théorème 1 dans [5] montre que $\bar{\tau} = \tau$; donc la suite $(x_n/n)_n$ converge vers 0 pour τ. Cette suite n'étant pas bornée pour β elle ne converge pas pour γ, donc elle ne converge pas pour τ^g d'après la proposition 2 et le théorème 2.

Dans le cas des espaces bi-normés $(E, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$ la proposition 4 nous dit que si la fermeture pour $\|\cdot\|^*$ de la boule unité de $\|\cdot\|$ n'est pas bornée pour la norme $\|\cdot\|$, alors τ est strictement moins fine que τ^g. Il existe de tels espaces bi-normés que l'on peut construire d'une manière abstraite; mais c'est contraire à la condition habituelle sur les espaces bi-normés qui veut que la boule unité de $\|\cdot\|$ soit fermée pour $\|\cdot\|^*$, condition que vérifient tous les espaces bi-normés usuels.

On peut voir directement ou comme cas particulier du théorème 8 de [10] que si τ_1 est métrisable et si β admet une base dénombrable formée de parties compactes pour τ_1, alors $\tau = \tau^g$, ce qui nous donne des cas non triviaux où ces deux topologies coïncident.

3. Exemple répondant à la question de Garling ([5], p. 23). Soit E l'ensemble des suites de nombres réels dont presque toutes les composantes sont nulles.

E étant un sous-espace de l'espace de Banach l^∞ des suites bornées, on notera $\|\cdot\|^*$ la norme induite sur E par la norme $\|x\|_\infty = \sup|x_n|$ et on appellera V la *boule unité* de E muni de cette norme. E étant d'autre part un sous-espace de l'espace de Banach l^1 des suites absolument sommables, on notera $\|\cdot\|$ la norme induite sur E par la norme $\|x\|_1 = \sum_1^\infty |x_n|$ et on appellera B la *boule unité* de E muni de cette norme.

$(E, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$ est un espace bi-normé vérifiant les deux conditions habituelles $\|\cdot\|^* \leqslant \|\cdot\|$ et B est fermée pour $\|\cdot\|^*$. Montrons que τ est strictement moins fine que τ^g. Pour cela nous allons construire un voisinage de l'origine pour τ^g avec la méthode des chaînes cohérentes de parties

γ-fondamentales exposée dans le paragraphe 1, puis nous montrerons qu'il ne peut pas être un voisinage pour τ.

Notations particulières. Soit $x = (x_n)_n$ un élément de E.

On appelle $l(x)$ le *premier entier* tel que $x_n = 0$ pour tout $n > l(x)$.

Si $x \neq 0$, on note

$$\omega(x) = \inf_{x_n \neq 0}(|x_n|, 1)$$

c'est-à-dire l'inf de 1 et de la plus petite valeur absolue des composantes non nulles de x; on a alors $0 < \omega(x) \leqslant 1$.

Nous allons maintenant construire une chaîne cohérente de parties γ-fondamentales. Soit la partie γ-fondamentale d'ordre 1

$$P^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB \cap \frac{1}{2^n} V.$$

À partir de $P^{(1)}$ on construit la suite par récurrence. $P^{(k-1)}$ étant donné, on obtient $P^{(k)}$ de la manière suivante: à tout élément $x \neq 0$ de $P^{(k-1)}$ on associe

$$P_k(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB \cap \frac{\omega(x)}{2^{n+k} l(x)} V$$

et à l'élément 0 on associe $P_k(0) = P^{(1)}$; ainsi on a

$$P^{(k)} = \bigcup_{x \in P^{(k-1)}} \{x\} + P_k(x).$$

Montrons que la chaîne cohérente $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$ ainsi construite qui est un voisinage de 0 pour τ^g d'après le § 1, n'est pas un voisinage de 0 pour τ c'est-à-dire ne contient aucune partie de la forme

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(B \cap \frac{1}{\lambda_1} V + 2B \cap \frac{1}{\lambda_2} V + \ldots + nB \cap \frac{1}{\lambda_n} V \right)$$

(d'après [10] par exemple); on peut évidemment se limiter au cas où $(\lambda_n)_n$ est une suite d'entiers strictement croissante avec $\lambda_1 \geqslant 2$.

Soit x^1 l'élément de E tel que ses λ_2 premières composantes sont nulles, les λ_1 suivantes valant $1/\lambda_1$ et les autres étant toutes nulles. Ainsi

$$x^1 \in B \cap \frac{1}{\lambda_1} V.$$

Soit x^2 l'élément de E tel que ses $(\lambda_2+\lambda_1+\lambda_3)$ premières composantes sont nulles, les $2\lambda_2$ suivantes valant $1/\lambda_2$ et les autres étant toutes nulles. Ainsi

$$x^2 \in 2B \cap \frac{1}{\lambda_2} V.$$

De même, pour $1 \leqslant k \leqslant \lambda_{\lambda_1}$, soit x^k l'élément de E tel que ses

$$\big(\lambda_2+\lambda_1+\lambda_3+2\lambda_2+\lambda_4+3\lambda_3+\ldots+(k-1)\lambda_{k-1}+(k+1)\big)$$

premières composantes sont nulles; les $k\lambda_k$ suivantes valant $1/\lambda_k$ et les autres étant toutes nulles. Ainsi

$$x^k \in kB \cap \frac{1}{\lambda_k} V.$$

Alors l'élément $x = x^1+x^2+\ldots+x^{\lambda_{\lambda_1}}$ appartient à la partie

$$\left(B \cap \frac{1}{\lambda_1} V + 2B \cap \frac{1}{\lambda_2} V + \ldots + \lambda_1 B \cap \frac{1}{\lambda_{\lambda_1}} V\right).$$

x admet donc la représentation suivante:

$$x = \overbrace{0\ldots0}^{\lambda_2}\underbrace{\frac{1}{\lambda_1}\ldots\frac{1}{\lambda_1}}_{\lambda_1}\overbrace{0\ldots0}^{\lambda_3}\underbrace{\frac{1}{\lambda_2}\ldots\frac{1}{\lambda_2}}_{2\lambda_2}\overbrace{0\ldots0}^{\lambda_4}\underbrace{\frac{1}{\lambda_3}\ldots\frac{1}{\lambda_3}}_{3\lambda_3}0\ldots0\underbrace{\frac{1}{\lambda_{\lambda_1}}\ldots\frac{1}{\lambda_{\lambda_1}}}_{\lambda_1\lambda_{\lambda_1}}0\ldots,$$

Il nous reste, pour achever la démonstration, à montrer que $x \notin P$. Si x appartient à P, il existe un entier k tel que x appartient à

$$P^{(k)} = \bigcup_{y \in P^{(k-1)}} y + P_k(y)$$

donc $x = y + y_k$ avec $y_k \in P_k(y)$ et $y \in P^{(k-1)}$.

On décompose de même l'élément y et ainsi de suite. On obtient finalement

$$x = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$$

avec $y_k \in P_k(y_1+\ldots+y_{k-1})$, $y_{k-1} \in P_{k-1}(y_1+\ldots+y_{k-2})$, $\ldots$, $y_1 \in P^{(1)}$.

R e m a r q u e. Pour tout $a \in \boldsymbol{N}$, $l(y_1+\ldots+y_p) \geqslant a$ implique

$$l(y_1+\ldots+y_p+y_{p+1}) \geqslant a.$$

En effet,

$$y_{p+1} \in P_{p+1}(y_1+\ldots+y_p) \subset \omega(y_1+\ldots+y_p)\frac{V}{2},$$

donc la plus grande composante de y_{p+1} est en valeur absolue strictement plus petite que la plus petite composante non nulle de $(y_1+\ldots+y_p)$. Alors la longueur de l'élément ne peut que diminuer lorsqu'on ajoute y_{p+1}.

On appelle y' la première des sommes $y_1, (y_1+y_2), \ldots, (y_1+\ldots+y_p)$ telle que $l(y_1+\ldots+y_p) \geqslant \lambda_2$. Celle-ci existe et on a $p \leqslant k$.

Nous allons envisager plusieur cas. Admettons $\lambda_2 \leqslant l(y') < \lambda_3$. Alors

$$y_{p+1} \in P_{p+1}(y') \subset \frac{1}{2^2 l(y')} V \subset \frac{1}{2^2 \lambda_2} V,$$

$$y_{p+2} \in P_{p+2}(y'+y_{p+1}) \subset \frac{1}{2^3 l(y'+y_{p+1})} V \subset \frac{1}{2^3 \lambda_2} V$$

car d'après la remarque précédente $l(y'+y_{p+1}) \geqslant \lambda_2$.

On obtient de même

$$y_{p+h} \in \frac{1}{2^{h+1}\lambda_2} V \quad \text{pour } 1 \leqslant h \leqslant k-p,$$

donc

$$x-y' = y_{p+1}+\ldots+y_k \in \frac{1}{2\lambda_2} V;$$

mais les composantes de rang supérieur ou égal à λ_3 de l'élément y' sont nulles, donc les composantes de rang supérieur ou égal à λ_3 de l'élément x sont plus petites que $1/2\lambda_2$, ce qui est en contradiction avec la forme de x.

On obtient la contradiction d'une manière analogue dans les cas

$$\begin{gathered} \lambda_3 \leqslant l(y') < \lambda_4, \\ \lambda_4 \leqslant l(y') < \lambda_5, \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{\lambda_1} \leqslant l(y') < l(x). \end{gathered}$$

Il ne reste plus qu'à étudier le cas $l(x) \leqslant l(y')$ qui en fait se réduit à l'égalité d'après la remarque déjà faite.

Le même calcul que dans les cas précédents montre ici que

$$x-y' = y_{p+1}+\ldots+y_k \in \frac{1}{2l(x)} V.$$

Si on regarde les i-èmes composantes, on a

$$|x_i - y_i'| \leqslant \frac{1}{2l(x)}.$$

Compte tenu des termes que l'on sait être positifs cela donne ici:

$$|y_i'| \geqslant x_i - \frac{1}{2l(x)}.$$

Or d'après la définition de y', on a $l(y_1+\ldots+y_{p-1}) < \lambda_2$ donc les composantes de rang supérieur ou égal à λ_2 de l'élément $y_1+\ldots+y_{p-1}$

sont nulles. Ainsi pour $i \geqslant \lambda_2$ on a $y_{p,i} = y'_i$. D'après ce qui précède,

$$\|y_p\|_1 \geqslant \sum_{i\geqslant\lambda_2}^{l(x)} |y_{p,i}| = \sum_{i\geqslant\lambda_2}^{l(x)} |y'_i| \geqslant \sum_{i\geqslant\lambda_2}^{l(x)} \left(x_i - \frac{1}{2l(x)}\right) \geqslant \|x\|_1 - \frac{1}{2},$$

donc

(A) $$\|y_p\|_1 \geqslant \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)}{2} - \frac{1}{2} \geqslant \lambda_1.$$

Or

$$y_p \in P_p(y_1 + \ldots + y_{p-1}) \subset P^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB \cap \frac{1}{2^n} V,$$

donc d'après l'inégalité (A) on obtient

$$y_p \in \frac{1}{2^{\lambda_1}} V,$$

(B) $$\|y_p\|^* = \|y_p\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{\lambda_1}} \leqslant \frac{1}{2\lambda_1}.$$

Pour $i = \lambda_2 + 1$ on a

$$|y_{p,\lambda_2+1}| = |y'_{\lambda_2+1}| \geqslant x_{\lambda_2+1} - \frac{1}{2l(x)} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{2l(x)},$$

donc

(C) $$\|y_p\|_\infty \geqslant \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{2l(x)}.$$

Alors (B) et (C) donne $l(x) \leqslant \lambda_1$ ce qui est en contradiction avec la forme de x.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Alexiewicz, *On the two-norm convergence*, Studia Mathematica 14 (1954), p. 49-56.

[2] — et Z. Semadeni, *Linear functions on the two-norm spaces*, ibidem 17 (1958), p. 121-140.

[3] — *The two-norm spaces and their conjugate spaces*, ibidem 18 (1959), p. 275-293.

[4] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, fasc. 15, Paris.

[5] D. J. H. Garling, *A generalized form of inductive limit topology for vector spaces*, Proceedings of the London Mathematical Society 14 (1964), p. 1-28.

[6] H. Hogbe-Nlend, *Théorie des bornologies et applications*, Lecture Notes in Mathematics 213, Berlin.

[7] J. Kisyński, *Convergence de type L*, Colloquium Mathematicum 7 (1960), p. 205-211.

[8] B. Perrot, *Sur un problème de convergence en bornologie*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Série Mémoire 31-32, p. 271-277.

[9] A. Persson, *A generalization of two-norm spaces*, Arkiv för Matematik 5 (1963), p. 27-36.

[10] W. Roelcke, *On the finest locally convex topology agreeing with a given topology on a sequence of absolutely convex sets*, Mathematische Annalen 198 (1972), p. 57-80.

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1974