COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 2

SUR LA MESURE PARABOLIQUE

PAR

J. CHABROWSKI (KATOWICE)

Considérons l'équation linéaire normale parabolique homogène

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} + c(t,x)u - u_t = 0, \tag{1}$$

où $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots, n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$, dont les coefficients sont définis dans une couche $H = (0, T_0] \times E_n$, E_n étant l'espace euclidien à n dimensions et T_0 un nombre positif. Ces coefficients sont supposés des fonctions réelles. Krzyżański a démontré sous certaines hypothèses que toute solution $u(t, x)$ du problème de Cauchy assujettie à la condition initiale $u(0, x) = \varphi(x)$ est donnée par la formule

$$u(t,x) = \int_{E_n} \varphi(y)\mu(t,x;dy),$$

où $\mu(t, x; E)$ est une mesure dans la classe des ensembles boréliens $E \subset E_n$ introduite grâce au théorème de F. Riesz sur la représentation d'une fonctionnelle linéaire. Il sera montré dans la communication présente que le résultat de Krzyżański subsiste sous des hypothèses plus faibles.

1. Introduisons d'abord les définitions et hypothèses. Soit $A(s)$ une fonction de classe C^1 dans $[1, \infty)$ et ayant les propriétés suivantes:

$$\text{(a)}\quad A(s) > 0 \text{ pour } s \geqslant 1, \qquad \text{(b)}\quad \int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} = \infty,$$

$$\text{(c)}\quad \sqrt{A(s)} \leqslant M_1 s \int_1^s \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}, \qquad \text{(d)}\quad \left|\frac{d}{ds}\big(\sqrt{A(s)}\big)\right| \leqslant M_2 \int_1^s \frac{ds}{\sqrt{A(s)}},$$

M_1 et M_2 étant des constantes positives.

Une fonction $\Psi(t, x)$ sera dite *de classe* $E_A(M, K)$ *dans la couche* $\bar{H}$ (M et K étant des constantes positives) lorsque

$$|\Psi(t,x)| \leqslant M \exp K\left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 \quad \text{pour } (t,x) \in \bar{H},$$

où $r(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\right)^{1/2} = (|x|^2+2)^{1/2}$.

Une fonction $\varphi(x)$ sera dite *de classe* $E_A(M, K)$ *dans* E_n lorsque la fonction $\Psi(t, x) = \varphi(x)$ est de classe $E_A(M, K)$ dans $\bar{H}$.

Une fonction $\Psi(t, x)$ sera dite *de classe* E_A *dans la couche* $\bar{H}$ lorsqu'il existe deux constantes positives M et K pour lesquelles elle est de classe $E_A(M, K)$ dans $\bar{H}$.

Les coefficients de l'équation (1) satisferont aux deux hypothèses qui suivent

I. $|a_{ij}(t, x)| \leqslant L_1 A(r), \qquad |b_i(t, x)| \leqslant L_2 \sqrt{A(r)} \int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}},$

$$c(t, x) \leqslant L_3 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2,$$

où L_1, L_2 et L_3 sont des constantes positives.

II. La forme quadratique $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j$ est définie positive.

Posons

$$H(t, x, K, \nu) = \exp\left\{K\left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 e^{\nu t}\right\}.$$

Il en résulte par un calcul simple en vertu des hypothèses I et II que

$$LH(t, x, K, \nu) \leqslant \left\{4n^2 e^{2\nu t} K^2 L_1 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + 2n^2 e^{\nu t} K L_1 + \right.$$
$$+ 2n^2 e^{\nu t} K L_1 M_2 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + 2n^2 e^{\nu t} K L_1 M_1 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 +$$
$$+ 2n e^{\nu t} K L_1 M_1 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + 2n e^{\nu t} K L_2 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 +$$
$$\left. + L_3 \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 - \nu e^{\nu t} K \left[\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\} H(t, x, K, \nu).$$

On peut supposer, vu que $r_1(x) > \sqrt{2}$, que

$$\int\limits_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \geqslant 1;$$

on peut donc choisir le nombre ν_1 de façon que l'on ait

$$LH(t, x, K, \nu_1) < 0 \tag{2}$$

dans la couche $H_1 = (0, 1/\nu_1] \otimes E_n$ $(1/\nu_1 \leqslant T_0)$ dont la hauteur $1/\nu_1$ dépend des nombres K, L_1, L_2, L_3, M_1 et M_2.

Remarque. Si $A(s) = s^{2-\lambda}$ $(0 < \lambda \leqslant 2)$, on a

$$|a_{ij}(t, x)| = O[(|x|^2+1)^{(2-\lambda)/2}],$$
$$|b_i(t, x)| = O[(|x|^2+1)^{1/2}],$$
$$c(t, x) = O([|x|^2+1)^{\lambda/2}].$$

L'unicité des solutions de l'équation (1) sous ces hypothèses a été traitée par Aronson et Besala (voir [1]) et par Bodanko (voir [2]).

Le problème envisagé ici sera celui de Cauchy, à savoir de trouver pour l'équation (1) une solution $u(t, x)$ régulière dans une couche $\bar{H}$, c'est-à-dire continue dans cette couche et ayant les dérivés u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$ (où $i, j = 1, \ldots, n$) et u_t continues dans la couche H, et satisfaisant à la condition initiale de la forme

$$(3) \qquad u(0, x) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in E_n.$$

Considérons un domaine borné D découpé de l'intérieur de la couche $\bar{H}$ par une surface G de classe $\mathscr{C}^1$ non tangente nulle part à aucune caractéristique de l'équation (1). Soit S_0 la partie de la frontière $\mathrm{Fr}(D)$ située sur le plan $t = 0$. Posons $\sigma = G \cap \mathrm{Fr}(D)$ et $\Sigma = S_0 \cup \sigma$ (la frontière parabolique).

Le premier problème de Fourier relatif à l'équation (1) et au domaine D consiste à chercher une solution $u(t, x)$ de l'équation (1), régulière dans D, c'est-à-dire continue dans $\bar{D}$ et admettant des dérivées u_{x_i}, $u_{x_ix_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ et u_t continues dans l'ensemble $\bar{D} - \Sigma$, et satisfaisant à la condition

$$(4) \qquad u(t, x) = \Phi(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \Sigma,$$

où $\Phi(t, x)$ est une fonction continue dans Σ.

Le domaine D s'appellera *régulier par rapport au premier problème de Fourier* pour l'équation (1) avec la condition aux limites lorsque ce problème a une solution quelle que soit la fonction $\Phi(t, x)$ continue sur Σ.

Introduisons encore l'hypothèse suivante:

III. La couche H est la réunion d'une suite croissante de domaines D_p découpés de $\bar{H}$ par les surfaces $G_p \in \mathscr{C}^1$ $(p = 1, 2, \ldots)$ non tangentes nulle part à aucune caractéristique de l'équation (1) et dont la distance de l'origine tend vers l'infini avec $p \to \infty$, chaque domaine D_p étant régulier par rapport au premier problème de Fourier pour l'équation (1).

2. Avant de passer aux résultats fondamentaux, quelques généralisations de théorèmes connus des travaux [6], [7] et [8] de Krzyżański seront établies.

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites, admettons que* $c(t,x) \leqslant 0$ *dans* E, *que* $u(t,x)$ *est une solution de l'équation* (1), *régulière, de classe* E_A *dans la couche* $\bar{H}$ *et que* $u(0,x) \leqslant M$ $[u(0,x) \geqslant M]$ *pour* $x \in E_n$, M *étant une constante non négative.*

Alors $u(t,x) \leqslant M$ $[u(t,x) \geqslant -M]$ *pour* $(t,x) \in \bar{H}$.

Démonstration. Posons $v_+(t,x) = u(t,x) - M$ $[v_+(t,x) = u(t,x) + M]$. La fonction $v_-[v_+]$ satisfait aux conditions

$$v_-(0,x) \leqslant 0 \ [v_+(0,x) \geqslant 0] \quad \text{dans } E_n,$$

$$Lv_+ = -cM \geqslant 0 \ [Lv_- = cM \leqslant 0] \quad \text{dans } H.$$

Il résulte du théorème 1 de mon travail [3] que $v_-(t,x) \leqslant 0$ $[v_+(t,x) \geqslant 0]$ dans $\bar{H}$.

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* I, II *et* III *étant satisfaites, admettons que* $\Phi(t,x)$ *est une fonction continue de classe* $E_A(M,K)$ *dans la couche* $\bar{H}$, *telle que* $\Phi(0,x) = \varphi(x)$ *pour* $x \in E_n$, *et que les fonctions* $u^p(t,x)$, *où* $p = 1, 2, \ldots$, *sont des solutions de l'équation* (1) *régulières dans* D_p *et satisfaisant aux conditions*

$$u^p(t,x) = \Phi(t,x) \quad \textit{pour } (t,x) \in \Sigma_p,$$

où $\Sigma_p = \sigma_p \cup S^{(p)}$ *et les ensembles* $S^{(p)}$ *et* σ_p *sont contenus dans la partie de la frontière* $\mathrm{Fr}(D_p)$ *du domaine* D_p *située sur le plan* $t = 0$ *et sur la surface* G *respectivement.*

Alors la suite $\{u^p(t,x)\}$ *converge presque uniformément dans la couche* $\bar{H}_3 = [0, T_3] \times E_n$ *vers une fonction* $u(t,x)$ *qui est une solution de l'équation* (1), *régulière dans la couche* $\bar{H}_3$, *de classe* $E_A(M, Ke)$ *dans cette couche et satisfaisant à la condition initiale*

$$u(0,x) = \Phi(0,x) = \varphi(x) \quad \textit{pour } x \in E_n.$$

La hauteur T_3 *de la couche* $\bar{H}_3$ *dépend de* M_1, M_2, L_1, L_2, L_3 *et* K.

Démonstration. Posons

$$u^p(t,x) = v^p(t,x) H(t,x,K,\nu_1) \tag{5}$$

où ν_1 est choisi de façon que l'on ait l'inégalité (2).

Montrons d'abord que

$$|v^p(t,x)| \leqslant M \quad \text{pour } (t,x) \in \bar{D}_p \cap \bar{H}_1. \tag{6}$$

Il est clair que l'inégalité (6) est valable pour $(t,x) \in \Sigma_p$. La fonction v^p satisfait à l'équation

$$\bar{L}v^p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v^p_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i v^p_{x_i} + \bar{c} v^p - v^p_t = 0 \tag{7}$$

pour $(t, x) \in H_1$ où

$$\bar{c} = \frac{LH}{H} < 0 \quad \text{et} \quad \bar{b}_i = \sum_{k=1}^{n} 2a_{ik}\frac{H_{xk}}{H} + b_i.$$

L'inégalité (6) en résulte en vertu du principe d'extremum relatif aux solutions du premier problème de Fourier pour une équation normale parabolique (voir [5], § 1).

Passons à montrer que la suite u^p converge presque uniformément vers une fonction $u(t, x)$. Posons dans ce but

$$u^p(t, x) = \bar{v}^p(t, x)H(t, x, Ke+1, \nu_2), \tag{8}$$

$$u^{pq}(t, x) = \bar{v}^{pq}(t, x)H(t, x, Ke+1, \nu_2), \qquad q \geqslant p, \tag{9}$$

où $u^{pq} = u^p - u^q$, $\bar{v}^{pq} = \bar{v}^p - \bar{v}^q$ et où ν_2 est choisi de façon à avoir

$$LH(t, x, Ke+1, \nu_2) < 0 \quad \text{pour } (t, x) \in H_2 = (0, 1/\nu_2] \times E_n \quad (1/\nu_2 \leqslant T).$$

Remarquons que l'on a

$$\tilde{L}\bar{v}^{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}^{pq}_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i \bar{v}^{pq}_{x_i} + \tilde{c}\bar{v}^{pq} - \bar{v}^{pq}_t = 0, \tag{10}$$

où

$$\tilde{c} = \frac{LH(t, x, Ke+1, \nu_2)}{H(t, x, Ke+1, \nu_2)} < 0 \quad \text{pour } (t, x) \in H_2$$

et en vertu de (5), (6) et (9)

$$|\bar{v}^{pq}| \leqslant \frac{2MH(t, x, K, \nu_1)}{H(t, x, Ke+1, \nu_2)} \quad \text{pour } (t, x)x \in \Sigma_p \cap \bar{H}_3,$$

où $H_3 = (0, T_3] \times E_n$ et $T_3 = \min(1/\nu_1, 1/\nu_2)$, ce qui entraîne

$$|\bar{v}^{pq}| \leqslant 2M\exp(-A_p) \quad \text{pour } (t, x) \in \Sigma_p \cap \bar{H}_3,$$

où

$$A_p = \inf_{(t,x) \in \delta_p \cap H_3} \left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \right]^2.$$

On en conclut en vertu du principe d'extremum que

$$|\bar{v}^{pq}| \leqslant 2M\exp(-A_p) \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{H}_3 \cap \bar{D}_p.$$

Soit $D_R = \{(t, x);\, |x| \leqslant R,\, 0 \leqslant t \leqslant T_3\}$. Choisissons p de manière à avoir $D_R \subset \bar{D}_p \cap H_3$. Il résulte de (9) que

$$|u^{pq}| \leqslant 2MN_0\exp(-A_p) \quad \text{pour } (t, x) \in D_R \tag{11}$$

où $N_0 = \max H(t, x, Ke+1, \nu_2)$.

Il est aisé de voir que l'inégalité (11) permet de prouver d'après la propriété (b) de la fonction $A(s)$ que la suite u^p converge presque uniformément vers une fonction continue $u(t, x)$. Il est évident que $u(0, x) = \varphi(x)$ et, vu (5) et (6), que

$$|u| \leqslant M \exp\left\{eK\left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\}.$$

Reste à montrer que $u(t, x)$ est la solution de l'équation (1). Soit z^q la solution dans $\bar{D}_q \cap \bar{H}_3$ du premier problème de Fourier avec la condition aux limites

$$z^q(t, x) = u(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in \Sigma_q \cap \bar{H}_3.$$

Cette solution existe grâce à la régularité du domaine D_q. La suite u^p convergeant presque uniformément vers u, il existe un indice p_0 tel que

$$|u - u_p| < \varepsilon \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{D}_q \cap \bar{H}_3 \text{ et } p \geqslant p_0.$$

On sait que $u = z^q$ pour $(t, x) \in \Sigma_q \cap \bar{H}_3$; donc

$$|z^q - u^p| < \varepsilon \quad \text{pour } (t, x) \in \Sigma_q \cap \bar{H}_3 \text{ et } p \geqslant p_0.$$

Il résulte du principe d'extremum (voir [5], § 1) que

$$|z^q - u^p| < \varepsilon e^{tc_q} \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{D}_q \cap \bar{H}_3,$$

où $c_q = \sup\limits_{D_q} c(t, x)$. On en tire par le passage à la limite l'inégalité

$$|z_q - u| \leqslant \varepsilon e^{tc_q} \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{D}_q \cap \bar{H}_3,$$

ce qui achève la démonstration.

Considérons à présent une suite $\{\varphi_p(x)\}$ de fonctions continues dans E_n de classe $E_A(M, K)$. Admettons que cette suite converge presque uniformément dans E_n vers une fonction $\varphi_0(x)$, qui est donc continue et de classe $E_A(M, K)$ dans E_n. L'hypothèse III étant également admise, le théorème 2 entraîne l'existence d'une suite $u^p(t, x)$ de solutions de l'équation (1), régulières, de classe $E_A(M, Ke)$ dans une couche commune H_3 et satisfaisant aux conditions

(12) $$u^p(0, x) = \varphi_p(x) \quad \text{où } p = 1, 2, \ldots \text{ et } x \in E_n,$$

de même que l'existence d'une solution $u^0(t, x)$ régulière, de classe $E_A(M, Ke)$ dans la même couche, et satisfaisant à la condition initiale

(13) $$u^0(t, x) = \varphi_0(x) \quad \text{pour } x \in E_n.$$

Je vais montrer que la suite $u^p(t, x)$ converge vers $u^0(t, x)$.

THÉORÈME 3. *Les hypothèses* I, II *et* III *étant satisfaites, la suite* $\{u^p(t,x)\}$ *converge vers* $u^0(t,x)$ *presque uniformément dans la couche* $\bar{H}_4 = [0, T_4] \times E_n$.

La hauteur T_4 *de la couche* $\bar{H}_4$ *dépend de* M_1, M_2, L_1, L_2, L_3 *et* K.

Démonstration. Introduisons les fonctions

$$u^p(t,x) = \hat{v}^p(t,x) H(t,x,Ke,\bar{\nu}_1) \quad \text{pour } p = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

le paramètre $\bar{\nu}_1$ étant choisi de façon que l'on ait

$$\frac{LH(t,x,Ke,\bar{\nu}_1)}{H(t,x,Ke,\bar{\nu}_1)} < 0 \quad \text{pour } (t,x) \epsilon (0, 1/\bar{\nu}_1] \times E_n \text{ où } 1/\bar{\nu}_1 \leqslant T_3$$

et les fonctions $\hat{v}^p$ étant assujetties à l'équation de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \hat{v}^p_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i \hat{v}^p_{x_i} + \hat{c}\hat{v}^p - \hat{v}^p_t = 0 \quad \text{pour } (t,x) \epsilon (0, 1/\bar{\nu}_1] \times E_n,$$

où les coefficients $\hat{b}_i$ et $\hat{c}$ satisfont aux inégalités analogues à I, $\hat{c} = LH/H < 0$ et à $\hat{v}^p(0,x) \leqslant M$. Il en résulte donc en vertu du théorème 1 que

$$|\hat{v}^p(t,x)| \leqslant M \quad \text{dans } \left[0, \frac{1}{\bar{\nu}_1}\right] \times E_n. \tag{15}$$

Pour établir la convergence de la suite $\{u^p(t,x)\}$ vers la fonction $u^0(t,x)$, posons

$$u^p(t,x) = \overset{*}{v}{}^p(t,x) H(t,x,Ke^2+1,\bar{\nu}_2),$$

$\bar{\nu}_2$ étant choisi de façon à avoir

$$LH(t,x,Ke^2+1,\bar{\nu}_2) < 0 \quad \text{pour } (t,x) \epsilon (0, 1/\bar{\nu}] \times E_n \text{ où } 1/\bar{\nu}_2 \leqslant T_3. \tag{16}$$

En vertu de (14) et (15), il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $R > 0$ tel que $|x| \geqslant R$ entraîne $|\overset{*}{v}{}^p| < \varepsilon/2$ pour $p = 0, 1, 2, \ldots$ et pour tout t tel que $0 \leqslant t \leqslant T_4$ où $T_4 = \min(1/\bar{\nu}_1, 1/\bar{\nu}_2)$.

Soit $\overset{*}{v}{}^p = \overset{*}{v}{}^0 = w^p$. On a d'une part

$$|w^p| < \varepsilon \quad \text{pour } |x| \geqslant R \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant T_4 \tag{17}$$

et d'autre part, la suite $\{\varphi_p(x)\}$ convergeant uniformément vers φ_0 pour $|x| \leqslant R$, on a $\lim\limits_{p\to\infty} w^p(0,x) = 0$ uniformément pour $|x| \leqslant R$. Il existe par conséquent un N tel que

$$|w^p(0,x)| < \varepsilon \quad \text{pour } |x| \leqslant R \text{ et } p \geqslant N. \tag{18}$$

Les fonctions w^p satisfaisant à une equation de la forme (10) où

$$\tilde{c} = \frac{LH(t,x,Ke^2+1,\bar{\nu}_2)}{H(t,x,Ke^2+1,\bar{\nu})} < 0 \quad \text{pour } 0 < t \leqslant T_4 \text{ et } x \epsilon E_n,$$

on a d'après le principe d'extremum

(19) $\quad |w^p| < \varepsilon \quad$ pour $|x| \leqslant R, 0 \leqslant t \leqslant T_4$ et $p > N$,

d'où en vertu de (17) et (19)

$$|u^p - u^0| < \varepsilon H(t, x, Ke^2+1, \bar{\nu}_2) \quad \text{pour } (t, x) \in \bar{H}_4 = [0, T_4] \times E_n$$

et $p > N$. On a donc $\lim\limits_{p\to\infty} u^p = u$ presque uniformément dans la couche H_4, c.q.f.d.

3. Introduisons une mesure parabolique à l'aide du théorème de F. Riesz.

Considérons dans ce but la famille $\{\varphi(x)\}$ des fonctions $\varphi(x)$ continues dans E_n et aux supports bornés. Soit $u(t, x)$ une solution de l'équation (1) régulière bornée dans $\bar{H}$ et satisfaisant à la condition initiale (3). En admettant qu'une telle solution $u(t, x)$ de (1) existe, elle est unique en vertu du théorème 2 de mon travail [3]. Ayant fixé un point $(t, x) \in H$, on a $u(t, x) = F(\varphi)$ où F est une fonctionnelle linéaire définie dans la famille $\{\varphi\}$. En vertu du théorème 1 établi ici, $\varphi \geqslant 0$ entraîne $F(\varphi) \geqslant 0$; donc $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ entraîne $F(\varphi_1) \leqslant F(\varphi_2)$. La fonctionnelle $F(\varphi)$ est par conséquent non négative et isotone. D'après le théorème de F. Riesz, il existe donc une mesure unique $\mu(t, x, F)$, régulière dans la classe des ensembles boreliens $E \subset E_n$ et telle que

$$u(t, x) = F(\varphi) = \int_{E_n} \varphi(y) \mu(t, x; dy) \tag{20}$$

pour toute fonction φ de la famille $\{\varphi\}$ (voir Halmós [4], § 52 et § 6).

Je vais montrer à présent que si la fonction φ est continue et de classe E_A, il existe dans une couche $(0, \tau] \times E_n$ la solution du problème de Cauchy donnée par la formule (20). La méthode utilisée dans ce but sera celle qui a été appliquée par Krzyżański dans son travail [9].

Soit $\{\Phi(x)\}$ la famille des fonctions continues dans E_n et ayant les propriétés suivantes:

1° toute fonction $\Phi(x)$ est au support borné,

2° toute fonction $\Phi(x)$ est de classe $E_A(M, K)$ dans E_n, les constantes M et K étant communes à toute la famille $\{\Phi(x)\}$.

D'après le théorème 2, à chaque fonction Φ vient correspondre une solution $\tilde{u}(t, x)$ de l'équation (1), telle que $\tilde{u}(0, x) = \Phi(x)$ pour $x \in E_n$, et toutes ces solutions sont régulières de classe E_A M, Ke dans une couche $\bar{H}_3 = [0, T_3] \times E_n$.

Il existe une mesure non négative $\mu(t, x; E)$ et telle que toute fonction $u(t, x)$ de cette famille est représentable par la formule

$$\tilde{u}(t, x) = \int_{E_n} \Phi(y) \mu(t, x; dy).$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction de classe $E_A(M, K)$. Il est évident qu'il existe une suite $\{\varphi_p(x)\}$ de fonctions de la famille $\{\Phi(x)\}$ et qui converge vers la fonction $\varphi(x)$ presque uniformément dans E_n. Soient enfin $u^p(t, x)$, où $p = 1, 2, \ldots$, et $u(t, x)$ des solutions de l'équation (1), régulières, de classe $E_A(M, Ke)$ dans une couche $[0, T_3]\times E_n$ et satisfaisant pour $x \in E_n$ aux conditions initiales $u^p(0, x) = \varphi_p(x)$ et $u(0, x) = \varphi(x)$ respectivement. On a

$$u^p(t, x) = \int_{E_n} \varphi_p(y)\mu(t, x; dy) \quad \text{pour } (t, x)\in[0, T_3]\times E_n \tag{21}$$

et il existe d'après le théorème 3 un nombre T_4 tel que

$$\lim_{p\to\infty} u^p(t, x) = u(t, x) \quad \text{pour } (t, x)\in[0, T_4]\times E_n. \tag{22}$$

Je vais montrer pour terminer que la fonction $u(t, x)$ est également représentable dans la couche $H_4 = (0, T_4]\otimes E_n$ sous la forme

$$u(t, x) = \int_{E_n} \varphi(y)\mu(t, x; dy).$$

THÉORÈME 4. *Les hypothèses* I, II *et* III *étant admises, il existe un nombre* $T_4 > 0$ *tel que*

$$\int_{E_n} \exp\left\{K\left[\int_1^{r(y)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\}\mu(t, x; dy) < \infty \quad \textit{pour } (t, x)\in H_4$$

et $r_1(y) = (|y|^2+2)^{1/2}$.

Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = \exp\left\{K\left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\}.$$

Il est aisé de construire une suite $\bar\varphi_p$ non décroissante de fonctions de classe $E_A(1, K)$ dans E_n aux supports bornés et telles que

$$\lim_{p\to\infty} \bar\varphi_p(x) = \exp\left\{K\left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\}.$$

Soit $\{\bar u^p(t, x)\}$ la suite des solutions de l'équation (1), régulières, de classe E_A dans la couche H_3 et telles que l'on ait $\bar u^p(0, x) = \bar\varphi_p(x)$ pour $p = 1, 2, \ldots$

D'une part, il existe en vertu du théorème 3 un nombre T_4 tel que

$$\lim_{p\to\infty} \bar u^p(t, x) = \bar u(t, x) \quad \text{pour } (t, x)\in[0, T_4]\times E_n, \tag{23}$$

$\bar u(t, x)$ étant la solution de l'équation (1), régulière, de classe E_A dans la couche H_4 et telle que

$$\bar u(0, x) = \exp\left\{K\left[\int_1^{r(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\} \quad \text{pour } x\in E_n.$$

D'autre part, on a

(24) $\bar{u}^p(t, x) = \int\limits_{E_n} \bar{\varphi}_p(y)\mu(t, x; dy)$ pour $(t, x) \in H_3$ et $p = 1, 2, \ldots$

La suite $\bar{u}^p(t, x)$ est non décroissante et on a d'après (23) $\bar{u}^p(t, x) \leqslant \bar{u}(t, x)$ pour $(t, x) \in H_4$ et $p = 1, 2, \ldots$

Par suite, le point $(t, x) \in H_4$ étant fixé, la suite d'intégrales formant le membre droit de (24) est bornée supérieurement. Or, on a en vertu du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones (voir Saks [10], p. 28, et Halmos [4], § 27)

$$\int\limits_{E_n} \exp K\left[\int\limits_1^{r(y)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 \mu(t, x; dy) = \lim_{p\to\infty} \bar{u}^p(t, x) = \bar{u}(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in H_4.$$

THÉORÈME 5. *En admettant les hypothèse* I, II *et* III, *soient* φ *une fonction de classe* $E_A(M, K)$ *et* $u(t, x)$ *une solution de l'équation* (1), *régulière, de classe* E_A *dans la couche* H_4 *et satisfaisant à la condition* (3).

Alors on a l'égalité

(25) $$u(t, x) = \int\limits_{E_n} \varphi(y)\mu(t, x; dy) \quad \textit{pour } (t, x) \in H_4.$$

Démonstration. Introduisons comme auparavant la suite $u^p(t, x)$ des solutions de l'équations (1) assujetties à (21). Les solutions $u^p(t, x)$ satisfont alors aux conditions $u^p(0, x) = \varphi_p(x)$ où les fonctions $\varphi^p(x)$ sont de classe $E_A(M, K)$ aux supports bornés. Il résulte du théorème 4 que ces fonctions sont bornées par la fonction

$$M \exp\left\{K\left[\int\limits_1^r \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2\right\}$$

sommable (intégrable) par rapport à la mesure $\mu(t, x; E)$. Les solutions $u^p(t, x)$ sont représentables par la formule

$$u^p(t, x) = \int\limits_{E_n} \varphi_p(y)\mu(t, x; dy).$$

En appliquant le second théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme (voir Saks [10], p. 29, et Halmos [4], § 26), on constate que la formule (25) est valable pour $(t, x) \in H_4$.

TRAVAUX CITÉS

[1] D. G. Aronson and P. Besala, *Uniqueness of positive solutions of parabolic equations with unbounded coefficients*, Colloquium Mathematicum 18 (1967), p. 125-135.

[2] W. Bodanko, *Sur le problème de Cauchy et les problèmes de Fourier pour les équations paraboliques dans un domaine non borné*, Annales Polonici Mathematici 18 (1966), p. 79-94.

[3] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*, Annales Polonici Mathematici 22 (1969), p. 27-35.

[4] P. R. Halmos, *Measury theory*, New York 1950.

[5] A. Il'in, A. Kalashnikow and O. Olejnik, *Second order linear equations of parabolic type*, Russian Mathematical Surveys 17 (1962) n° 3, p. 1-143.

[6] M. Krzyżański, *Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales*, Annales de la Societé Polonaise de Mathématique 18 (1945), p. 145-156, et note complémentaire, ibidem 20 (1947) p. 7-9.

[7] — *Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques 7 (1959), p. 131-135.

[8] — *Solutions of a linear second order equation of parabolic type defined in an unbounded domain. Differential equations and their applications*, Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962, Prague 1963, p. 55-63.

[9] — *La mesure parabolique et le problème de Cauchy*, Colloquium Mathematicum 16 (1967), p. 123-131.

[10] S. Saks, *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne VII, Warszawa—Lwów 1937.

Reçu par la Rédaction le 30. 3. 1968