COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1964 FASC. 1

SUR LES INÉGALITÉS LINÉAIRES

PAR

HOÀNG TUY (HANOI)

On connaît le rôle du célèbre lemme de Farkas-Minkowski ([2], [12]) dans la théorie de dualité des programmes linéaires. Dans ce qui suit nous allons établir une proposition de même type, mais plus générale, qui constitue un critère d'optimalité pour une classe assez vaste de programmes, englobant les cas les plus importants étudiés jusqu'à présent. De cette proposition découlent de la façon la plus simple le lemme de Farkas-Minkowski lui-même et presque tous les résultats fondamentaux sur les programmes linéaires et convexes. Sa démonstration est d'ailleurs tout à fait élémentaire et ne suppose aucune connaissance préalable de la théorie des corps convexes.

Nous allons d'abord formuler et établir les principaux théorèmes, puis, dans la seconde partie, montrer comment on peut les appliquer dans les problèmes de programmation.

I. THÉORÈMES PRINCIPAUX

1. Considérons dans l'espace R^n un cône convexe G, c'est-à-dire un ensemble G tel que:

$$x \in G,\ \lambda \geqslant 0 \ \Rightarrow\ \lambda x \in G;$$

$$x,\ x' \in G \ \Rightarrow\ x+x' \in G.$$

Nous appellerons *base positive* de G tout sous-ensemble B de G jouissant de la propriété suivante:

1. chaque point $x \in G$ est une combinaison linéaire positive des éléments de B;

2. aucun sous-ensemble propre de B ne possède la propriété 1.

Par exemple, si G est un sous-espace de R^n, de base (algébrique) $e^1, e^2, \ldots, e^m$, une base positive de G est $\{e^1, e^2, \ldots, e^m, -e^1, -e^2, \ldots, -e^m\}$; si G est un cône polyédrique, on peut former une base positive de G en prenant sur chacune de ses arêtes un point différent du sommet (cf. par ex. [1]).

Pour chaque ensemble $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ et pour chaque cône convexe G désignons par $G(J)$ le cône convexe $\{x \in G : x_j = 0 \text{ pour } j \in J\}$. Un sous-ensemble E de G sera appelé une *armature* du cône G si, quel que soit $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ il contient une base positive de $G(J)$. Il est clair qu'un sous-espace de R^n possède toujours une armature finie; d'autre part, si G est contenu dans le cône $\{x : x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \ldots, n\}$, chaque base positive de G en est aussi une armature.

Etant donnés deux vecteurs p, q nous écrirons $p \leqslant q$ si $p_j \leqslant q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et nous poserons:

$$\langle p, q, x\rangle = \sum_{x_j \leqslant 0} p_j x_j + \sum_{x_j > 0} q_j x_j,$$

$$\langle t, x\rangle = \langle t, t, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j.$$

THÉORÈME 1 (fondamental). *Soient un cône convexe $G \subset R^n$ et deux vecteurs p, q avec $p \leqslant q$, les composantes de p pouvant prendre la valeur $-\infty$, celles de q la valeur $+\infty$.*

1. *S'il existe un $t \in R^n$ tel que*

$$p \leqslant t \leqslant q, \tag{1}$$

$$\langle t, x\rangle \geqslant 0 \tag{2}$$

pour chaque x d'une base positive B de G, on aura, pour chaque $x \in G$:

$$\langle p, q, x\rangle \geqslant 0. \tag{3}$$

2. *Inversement, si l'inégalité (3) a lieu pour chaque x d'une armature E de G, il existera un $t \in R^n$, vérifiant les inégalités (1) et (2) pour chaque $x \in G$.*

Démonstration. 1. La première partie est presque triviale. En effet, s'il existe $t \in R^n$, vérifiant (1) et (2) pour tout x d'une base positive B de G, on aura pour tout $x \in G$:

$$x = \sum_i \lambda_i e^i, \quad e^i \in B, \quad \lambda_i \geqslant 0,$$

d'où

$$\langle p, q, x\rangle = \sum_i \lambda_i \langle p, q, e^i\rangle \geqslant \sum_i \lambda_i \langle t, t, e^i\rangle = \sum_i \lambda_i \langle t, e^i\rangle \geqslant 0.$$

2. Démontrons la deuxième partie. Pour $n = 1$ on vérifie sans peine que le théorème est vrai. Supposons que le théorème soit vrai pour R^{n-1} et montrons qu'il l'est encore pour R^n. Posons $G_n = \{x \in G : x_n = 0\}$, $E_n = \{x \in E : x_n = 0\}$. G_n peut être considéré comme un cône convexe de R^{n-1}, et puisque E_n est évidemment une armature de G_n, on peut, en vertu de l'induction, trouver un point $t^* \in R^{n-1}$, vérifiant (1) et (2) pour chaque $x \in G_n$. Si $E - E_n = \emptyset$, le point $t = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_{n-1}^*, t_n)$, où t_n est

un nombre arbitraire compris entre p_n et q_n, satisfait aux conditions requises. Sinon, soit $Z = E - E_n$, $Z^+ = \{x \in Z : x_n > 0\}$, $Z^- = \{x \in Z : x_n < 0\}$, et posons pour chaque $x \in Z$:

$$\hat{x} = \frac{x}{|x_n|},$$

$$a(x) = -\sum_{x_j \leqslant 0} p_j \hat{x}_j - \sum_{\substack{x_j > 0 \\ j \neq n}} q_j \hat{x}_j, \qquad \beta(x) = \sum_{\substack{x_j \leqslant 0 \\ j \neq n}} p_j \hat{x}_j + \sum_{x_j > 0} q_j \hat{x}_j .$$

Alors on a, en vertu de (3), puisque $x \in E$,

$$a(x) \leqslant q_n \quad (x \in Z^+), \qquad \beta(x) \geqslant p_n \quad (x \in Z^-),$$

d'où, en posant

$$a = \begin{cases} \sup\limits_{x \in Z^+} a(x) \text{ lorsque } Z^+ \neq \emptyset, \\ -\infty \quad \text{lorsque } Z^+ = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} \inf\limits_{x' \in Z^-} \beta(x') \text{ lorsque } Z^- \neq \emptyset, \\ +\infty \quad \text{lorsque } Z^+ = \emptyset, \end{cases}$$

nous obtenons

$$(4) \qquad a \leqslant q_n, \qquad \beta \geqslant p_n .$$

D'autre part, quels que soient $x \in Z^+$, $x' \in Z^-$ on a $\hat{x} + \hat{x}' \in G_n$, donc, d'après les propriétés de t^*:

$$\sum_{j=1}^{n-1} t_j^* (\hat{x}_j + \hat{x}_j') \geqslant 0 .$$

On en déduit

$$\sum_{j=1}^{n-1} t_j^* \hat{x}_j' \geqslant -\sum_{j=1}^{n-1} t_j^* \hat{x}_j$$

et par suite, puisque $p_j \leqslant t_j^* \leqslant q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$,

$$a(x) \leqslant -\sum_{j=1}^{n-1} t_j^* \hat{x}_j \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} t_j^* \hat{x}_j' \leqslant \beta(x'),$$

d'où

$$(5) \qquad a \leqslant \beta .$$

Cette inégalité, confrontée avec (4), montre que $[a, \beta] \cap [p_n, q_n] \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe au moins un nombre fini t_n [1] tel que $p_n \leqslant t_n \leqslant q_n$, $a \leqslant t_n \leqslant \beta$. Si nous substituons t_n à p_n et q_n, les vecteurs $p' = (p_1, p_2,$

---

[1] Remarquons que $a < +\infty$, $\beta > -\infty$, $p_n < +\infty$, $q_n > -\infty$.

$\ldots, p_{n-1}, t_n)$, $q' = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, t_n)$ satisfont encore à la relation (3) pour chaque $x \in E$, car, pour $x \in Z^+$,

$$t_n x_n \geqslant a x_n \geqslant a(x) \cdot x_n = -\sum_{x_j < 0} p_j x_j - \sum_{\substack{x_j \geqslant 0 \\ j \neq n}} q_j x_j,$$

ce qui entraîne $\langle p', q', x\rangle \geqslant 0$, et de même pour $x \in Z^-$. On peut donc recommencer le même raisonnement à partir de p' et q' (en considérant $G_{n-1} = \{x \in G : x_{n-1} = 0\}$) pour obtenir un nombre fini $t_{n-1} \in [p_{n-1}, q_{n-1}]$, tel que $p'' = (p_1, \ldots, p_{n-2}, t_{n-1}, t_n)$ et $q'' = (q_1, \ldots, q_{n-2}, t_{n-1}, t_n)$ satisfont toujours à la relation (3) pour chaque $x \in E$; et ainsi de suite. Lorsqu'on aura déterminé tous les $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_1$ le vecteur $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ satisfera aux conditions requises. Le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. *Si pour tout x d'une armature d'un cône convexe G on a $\langle p, q, x\rangle \geqslant 0$, cette relation sera vérifiée pour tout $x \in G$.*

Ce corollaire peut être utile, car il arrive souvent que l'armature soit un ensemble fini et facile à déterminer.

Convenons d'appeler *cône conjugué* de G le cône

$$\{t : \langle t, x\rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in G\}.$$

Alors, sous une forme légèrement affaiblie, le théorème précédent peut aussi s'énoncer:

Etant donnés un cône convexe G et deux vecteurs p, q avec $p \leqslant q$: ou bien il existe dans G un point x tel que $\langle p, q, x\rangle < 0$ ou bien il existe dans le cône conjugué un point t tel que $p \leqslant t \leqslant q$.

Lorsque G est un sous-espace de R^n, si on a $\langle t, x\rangle \geqslant 0$ pour tout x d'une base positive on aura aussi $\langle t, x\rangle \leqslant 0$, donc $\langle t, x\rangle = 0$ pour tout $x \in G$. De même, la relation $\langle p, q, x\rangle \geqslant 0$ pour tout x d'une armature entraîne $\langle q, p, x\rangle = -\langle p, q, -x\rangle \leqslant 0$. On obtient ainsi le théorème suivant, qui, d'ailleurs, aurait pu être demontré directement par la même méthode:

THÉORÈME 2. *Etant donnés un sous-espace G de R^n, et deux vecteurs p, q avec $p \leqslant q$:*

1. *S'il existe un $t \in R^n$ tel que*

$$p \leqslant t \leqslant q, \tag{6}$$

$$\langle t, x\rangle = 0 \tag{7}$$

pour chaque x d'une base de G, on aura, pour chaque $x \in G$,

$$\langle q, p, x\rangle \leqslant 0 \leqslant \langle p, q, x\rangle. \tag{8}$$

2. *Inversement, si les inégalités* (8) *ont lieu pour chaque x d'une armature de G, il existera un $t \in R^n$, vérifiant les inégalités* (6) *et* (7) *pour chaque $x \in G$.*

2. Cas particuliers. Désignons par A une matrice $m \times n$, et prenons comme G le sous-espace formé par les solutions de l'équation linéaire

$$Ax = 0. \tag{9}$$

En remarquant qu'en vertu d'un théorème connu d'algèbre linéaire un vecteur t est orthogonal à toutes les solutions de (9) si et seulement s'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que $t = A^* u$, où A^* est la matrice transposée de A, on déduit du résultat précédent le

COROLLAIRE 2. *Pour qu'on ait pour toute solution de* (9):

$$\langle p, q, x\rangle \geqslant 0 \tag{10}$$

il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u \in R^m$ *tel que*

$$p \leqslant A^* u \leqslant q. \tag{11}$$

En outre:

Supposons que $p_j < q_j$ *pour* $j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}$. *Si la relation* (10) *a lieu comme inégalité stricte pour toute solution* x *de* (9) *vérifiant l'une au moins des conditions suivantes*:

1. $x_j < 0$ *pour au moins un* $j \in J_1 \subset J$;

2. $x_j > 0$ *pour au moins un* $j \in J_2 \subset J$,

alors on peut choisir u *de façon que*:

1'. $\langle A_j^*, u\rangle > p_j$ *pour tout* $j \in J_1$,

2'. $\langle A_j^*, u\rangle < q_j$ *pour tout* $j \in J_2$

(*ici comme dans la suite* Q_j *désigne le* $j^{\text{ième}}$ *vecteur-ligne de la matrice* Q).

En effet, soit E une armature quelconque du sous-espace G des solutions de (9), F l'ensemble des $x \in E$ vérifiant l'une au moins des conditions 1 ou 2. Posons $\Delta(x) = \langle p, q, x\rangle$. Lorsqu'on remplace p par p', avec $p_j' = p_j + \varepsilon$ pour $j \in J_1$, $p_j' = p_j$ pour $j \notin J_1$, et q par q', avec $q_j' = q_j - \varepsilon$ pour $j \in J_2$, $q_j' = q_j$ pour $j \notin J_2$, $\Delta(x)$ devient $\Delta'(x)$, avec $\Delta'(x) = \Delta(x)$ pour $x \in E - F$, $|\Delta'(x) - \Delta(x)| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{j \in J} |x_j|$ pour $x \in F$. Or l'ensemble F est fini et, d'après l'hypothèse, pour tout $x \in F$ on a $\Delta(x) > 0$, donc on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $p' \leqslant q'$ et $\Delta'(x) \geqslant 0$ pour $x \in E$. Alors, en vertu de ce qui précède, il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que $p' \leqslant A^* u \leqslant q'$, c'est-à-dire satisfaisant à (11) et 1', 2'.

La deuxième partie du corollaire 2 que nous venons de démontrer est fondamentale, comme on le verra, pour la théorie de dualité des programmes.

Posons maintenant $x' = (x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $A'x' \equiv Ax - y$, $p' = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \underbrace{-\infty, \ldots, -\infty}_{m})$, $q' = (q_1, q_2, \ldots, q_n, \underbrace{0 \ldots, 0}_{m})$. Il est facile de voir que la condition $\langle p', q', x' \rangle \geqslant 0$ pour tout x' solution de $A'x' = 0$ équivaut à $\langle p, q, x \rangle \geqslant 0$ pour tout x solution de $Ax \geqslant 0$; d'autre part $A'^*u = (A^*u, -u) = (\langle A_1^*, u \rangle, \ldots, \langle A_n^*, u \rangle, -u_1, \ldots, -u_m)$. D'où il s'ensuit:

COROLLAIRE 3. *Pour qu'on ait*

$$\langle p, q, x \rangle \geqslant 0 \tag{12}$$

pour toute solution x de l'inégalité $Ax \geqslant 0$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que

$$u \geqslant 0, \quad p \leqslant A^*u \leqslant q. \tag{13}$$

En outre:

Supposons que $p_j < q_j$ pour $j \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Si la relation (12) *a lieu comme inégalité stricte pour toute solution x de l'inégalité $Ax \geqslant 0$, vérifiant l'une au moins des trois conditions suivantes:*

1. *$\langle A_i, x \rangle > 0$ pour au moins un $i \in I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$,*
2. *$x_j < 0$ pour au moins un $j \in J_1 \subset J$;*
3. *$x_j > 0$ pour au moins un $j \in J_2 \subset J$,*

alors on peut choisir u de façon que

1′. *$u_i > 0$ pour tout $i \in I$;*

2′. *$\langle A_j^*, u \rangle > p_j$ pour tout $j \in J_1$;*

3′. *$\langle A_j^*, u \rangle < q_j$ pour tout $j \in J_2$.*

Remarquons aussi que lorsque $p = q$, la première partie du corollaire 3 devient:

COROLLAIRE 3′ (lemme de Farkas-Minkowski [2], [12]). *Pour qu'on ait $\langle p, x \rangle \geqslant 0$ pour toute solution de l'inégalité $Ax \geqslant 0$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que $u \geqslant 0$, $p = A^*u$.*

Enfin, en appliquant le corollaire 2 au cas où p est remplacé par p', avec $p'_j = -\infty$ pour $j \in J$, $p'_j = p_j$ pour $j \notin J$, et en remarquant que la condition $\langle p', q, x \rangle \geqslant 0$ pour tout x vérifiant (9) équivaut à $\langle p, q, x \rangle \geqslant 0$ pour tout x vérifiant $Ax = 0$, $x_j \geqslant 0$ pour tout $j \in J$, on obtient le

COROLLAIRE 4. *Pour qu'on ait $\langle p, q, x \rangle \geqslant 0$ pour tout x vérifiant $Ax = 0$, $x_j \geqslant 0$ pour tout $j \in J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que*

$$\begin{aligned} p_j \leqslant \langle A_j^*, u \rangle &\leqslant q_j \quad (j \notin J), \\ \langle A_j^*, u \rangle &\leqslant q_j \quad (j \in J). \end{aligned}$$

II. APPLICATIONS

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents aux problèmes de programmation.

1. Remarques générales. Il s'agira dans ce qui suit du problème suivant: étant donnée une fonction numérique $f(x)$ dans un domaine convexe $D \subset R^n$, trouver un point $x \in D$ où $f(x)$ soit minimum.

Conformément à la terminologie généralement adoptée, un point x sera dit *admissible* si $x \in D$; *optimal* si de plus il correspond au minimum de $f(x)$.

Un vecteur $z \in R^n$ est une direction *admissible* pour un point $x \in D$ s'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $x + \lambda z \in D$, autrement dit si un petit déplacement dans cette direction ne nous entraîne pas au dehors de D. On voit sans peine que:

LEMME 1. *L'ensemble $G(x)$ de toutes les directions admissibles pour un point $x \in D$ est un cône convexe.*

En effet, il est évident qu'on a $\lambda z \in G(x)$ dès que $z \in G(x)$, $\lambda \geqslant 0$. Prenons maintenant deux vecteurs z, $z' \in G(x)$ avec $x + \lambda z \in D$, $x + \lambda' z' \in D$, $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$. Alors, en désignant par λ_0 le plus petit des nombres λ, λ' on a, à cause de la convexité de D, $x + \lambda_0 z \in D$, $x + \lambda_0 z' \in D$, d'où il suit

$$x + \frac{\lambda_0}{2}(z + z') = \frac{1}{2}(x + \lambda_0 z) + \frac{1}{2}(x + \lambda_0 z') \in D,$$

ce qui montre bien que $z + z' \in G(x)$.

Dans la suite, $G(x)$ sera appelé brièvement le *cône admissible* en x.

Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *semiconvexe* dans D si, quels que soient $x \in D$, $z \in G(x)$, $f(x)$ possède au point x une derivée suivant la direction z:

$$Df(x, z) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(x + \lambda z) - f(x)}{\lambda},$$

et s'il existe une fonction $h(x, z, \lambda) > 0$ telle qu'on ait

$$f(x + \lambda z) - f(x) \geqslant h(x, z, \lambda) Df(x, z) \tag{14}$$

pour tout $x + \lambda z \in D$, $\lambda > 0$.

LEMME 2. *Toute fonction de la forme*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{15}$$

est semiconvexe lorsque φ et ψ vérifient l'une des conditions suivantes:

1. *φ est convexe $\geqslant 0$, ψ concave > 0 dans D;*
2. *φ est linéaire affine, ψ concave > 0 dans D;*
3. *ψ est linéaire affine > 0 dans D, φ convexe de signe quelconque;*
4. *φ et ψ sont linéaires affines, et $\psi(x) \neq 0$ dans D.*

En effet, considérons par exemple le cas 1. Pour $x \in D$, $z \in G(x)$ donnés, les fonctions de la variable λ, $\varphi(x+\lambda z)$ et $\psi(x+\lambda z)$, étant respectivement convexes et concaves (cf. par ex. [1] ou [14]), les dérivées $D\varphi(x, z)$ et $D\psi(x, z)$ existent toujours et l'on a

$$\varphi(x+\lambda z)-\varphi(x) \geqslant \lambda \cdot D\varphi(x, z), \tag{16}$$

$$\psi(x+\lambda z)-\psi(x) \leqslant \lambda \cdot D\psi(x, z), \tag{17}$$

d'où il résulte que $Df(x, z)$ existe et qu'on a

$$\begin{aligned} f(x+\lambda z)-f(x) &= \frac{\psi(x)[\varphi(x+\lambda z)-\varphi(x)]-\varphi(x)[\psi(x+\lambda z)-\psi(x)]}{\psi(x)\cdot\psi(x+\lambda z)} \\ &\geqslant \frac{\lambda}{\psi(x)\cdot\psi(x+\lambda z)}[\psi(x)\cdot D\varphi(x, z)-\varphi(x)D\psi(x, z)] \\ &= \frac{\lambda\cdot[\psi(x)]}{\psi(x+\lambda z)}\cdot Df(x, z). \end{aligned} \tag{18}$$

Le raisonnement reste valable dans les autres cas, à condition de mettre le signe $=$ dans (16) dans le cas 2, dans (17) dans le cas 3 et partout dans le cas 4.

LEMME 3. *Si $f(x)$ est une fonction semiconvexe, pour qu'un point $x \in D$ soit une solution il faut et il suffit que pour tout $z \in G(x)$:*

$$Df(x, z) \geqslant 0. \tag{19}$$

Ceci résulte immédiatement de la condition (14), car tout point $y \in D$ est de la forme $y = x+\lambda z$, $z \in G(x)$, $\lambda \geqslant 0$.

En particulier, le lemme 3 montre qu'un point minimum local pour une fonction semiconvexe est toujours un point minimum global.

Ainsi, on a prouvé que pour les programmes semiconvexes la condition d'optimalité se reduit à l'inégalité (19). Or pour une classe assez vaste de ces programmes (comprenant notamment le cas où $f(x)$ est différentiable), l'inégalité (19) prend la forme

$$\langle p, q, z\rangle \geqslant 0, \tag{20}$$

avec $p \leqslant q$, $p = p(x)$, $q = q(x)$. Les théorèmes 1 et 2 et leurs corollaires constituent alors des critères d'optimalité pour ces programmes, et c'est justement en cela que réside leur intérêt dans la question qui nous occupe. Nous allons voir que beaucoup de résultats connus ne sont que des formes diverses du théorème 1.

2. Programmes linéaires et semilinéaires. Nous appellerons *programme sémilinéaire* le problème suivant:

$$Ax = b,\, x \geqslant 0; \qquad \text{minimer } f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \tag{21}$$

où $A = \|a_{ij}\|$ est une matrice $m \times n$, b un vecteur donné de R^m, $\psi(x) \neq 0$ dans le domaine D déterminé par les contraintes (21), et $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont des fonctions linéaires affines:

$$\varphi(x) = \langle c, x\rangle + c_0, \qquad \psi(x) = \langle d, x\rangle + d_0$$

($c \in R^n$, $d \in R^n$, c_0 et d_0 sont des constantes).

Soit x un point quelconque de D, $J(x) = \{j : x_j = 0\}$. Il est clair que dans ce cas le cône admissible est

$$G(x) = \{z : Az = 0,\, z_j \geqslant 0 \text{ pour } j \in J(x)\} \tag{22}$$

et puisque

$$Df(x, z) = \frac{1}{[\psi(x)]^2} \cdot [\psi(x) \cdot \langle c, z\rangle - \varphi(x) \cdot \langle d, z\rangle],$$

la condition (19) s'écrit:

$$\langle \psi(x) \cdot c - \varphi(x) \cdot d, z\rangle \geqslant 0 \qquad (z \in G(x)), \tag{23}$$

c'est-à-dire de la forme (20), avec par exemple $p = q = \psi(x) \cdot c - \varphi(x) \cdot d$. Donc, en appliquant le corollaire 4, on obtient le

THÉORÈME 3. *Un point $x \in D$ est optimal pour le programme semilinéaire considéré si et seulement s'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que*

$$\langle A_j^*, u\rangle = \psi(x) \cdot c_j - \varphi(x) \cdot d_j, \qquad j \notin J(x),$$

$$\langle A_j^*, u\rangle \leqslant \psi(x) \cdot c_j - \varphi(x) \cdot d_j, \qquad j \in J(x).$$

On retrouve un résultat classique (cf. par ex. [4]) lorsque $\psi(x) \equiv 1$ ($d_0 = 1$, $d = 0$).

Evidemment, pour que la condition (23) soit verifiée pour tout $z \in G(x)$, il suffit qu'elle le soit pour une base positive de $G(x)$, qui dans le cas actuel peut être obtenue en prenant un point sur chaque arête du cône polyédrique (22). En particulier, si l'on suppose que x est un sommet „non dégénéré" de D, c'est-à-dire que l'ensemble $\{A_j^* : j \notin J(x)\}$ comprend exactement m vecteurs linéairement indépendants, les arêtes de $G(x)$ sont données par les directions $z^k\big(k \in J(x)\big)$ déterminées par les équations (cf. [4])

$$\sum_{j \notin J(x)} z_j^k A_j^* + A_k^* = 0, \qquad z_k^k = 1, \qquad z_j^k = 0 \qquad (j \in J(x), j \neq k).$$

Donc:

THÉORÈME 4. *Un sommet non dégénéré x de D est optimal si et seulement si pour tout $k \in J(x)$*

$$\Delta_k = \langle \psi(x)\cdot c - \varphi(x)\cdot d, z^k \rangle \tag{24}$$

$$= \left(\psi(x)c_k - \varphi(x)d_k\right) + \sum_{j \notin J(x)} \left(\psi(x)c_j - \varphi(x)d_j\cdot\right) z_j^k \geqslant 0 .$$

On reconnaît là un autre résultat connu lorsque $\psi(x) \equiv 1$.

Les programmes semilinéaires rentrent dans une catégorie plus générale de problèmes, à savoir:

(*) minimiser $f(x)$, où x est soumis aux contraintes (21), et f satisfait à la condition (M') suivante:

(M') quels que soient $x \in D$, $z \in G(x)$, la fonction d'une variable $\chi(\lambda) = f(x + \lambda z)$ est: ou bien identique à une constante, ou bien strictement monotone dans l'intervalle $\{\lambda : x + \lambda z \in D\}$.

En effet, lorsque $f(x)$ est le quotient de deux fonctions linéaires affines, (M') résulte d'une propriété élémentaire de la fonction homographique $\chi(\lambda)$.

Supposons que le problème (*) admette une solution finie $\bar{x}$ qui ne soit pas un sommet de D. Alors, $\bar{x}$ est intérieur à une certaine face de D et en considérant la droite joignant $\bar{x}$ à un sommet quelconque x^0 de cette face, on déduit de la condition (M') que $f(x^0) = f(\bar{x})$, car si $f(x^0) > f(\bar{x})$ on aurait $f(\bar{x}) > f(x')$ pour tout point x' de D tel que $x' = x^0 + \lambda(\bar{x} - x^0)$, $\lambda > 1$. Donc:

THÉORÈME 5. *Si le problème (*) admet une solution finie, il admet comme solution au moins un sommet de D. S'il admet plusieurs sommets comme solutions, il admet aussi comme solution toute combinaison linéaire convexe de ces sommets.*

Il résulte des théorèmes 4 et 5 qu'on peut appliquer à la résolution des programmes semilinéaires la *méthode du simplexe* de G. B. Dantzig (cf. par ex. [4]), qui consiste à partir d'un sommet quelconque x et — en supposant le tronçon D non dégénéré, auquel cas on peut toujours se ramener, par exemple, par la méthode dite de perturbation ([4]) — à vérifier si la condition (24) est satisfaite pour tout $k \in J(x)$. Dans l'affirmative x est la solution cherchée; sinon, il existe $k \in J(x)$ avec $\Delta_k < 0$ et on passe alors au sommet correspondant $x + \theta z^k$ ($\theta = \max\{\theta' > 0 : x + \theta' z^k \geqslant 0\}$), qui sera meilleur que x, et ainsi de suite.

D'ailleurs, on peut remplacer la condition (M') par une autre moins restrictive:

(M) quels que soient $x \in D$, $z \in G(x)$, la fonction $\chi(\lambda) = f(x + \lambda z)$ est monotone dans l'intervalle $\{\lambda : x + \lambda z \in D\}$.

Il est clair que (M) implique:

(M_1) tout minimum local de $f(x)$ dans D est aussi un minimum global;

(M_2) quels que soient $x \in D$, $z \in G(x)$, $\lambda \in [0,1]$ si $x+z \in D$ on a

$$f(x+\lambda z) \geqslant \min\{f(x), f(x+z)\}.$$

De (M_2) résulte immédiatement que si le tronçon D est borné, $f(x)$ atteint son minimum au moins en un sommet de D.

En effet, cela est évident si D est un segment. En supposant que cela soit vrai lorsque D a $s-1$ sommets, on a pour tout $x \in D$, lorsque D a s sommets $x^1, x^2, \ldots, x^s$:

$$x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k x^k = \lambda_s x^s + (1-\lambda_s)\left(\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_s} x^k\right),$$

où $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1$, par suite

$$f(x) \geqslant \min\left\{f(x^s), f\left(\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_s} x^k\right)\right\} \geqslant \min\{f(x^k), k = 1, 2, \ldots, s\}.$$

Donc, si le tronçon D est borné, le problème considéré peut aussi être résolu par la méthode du simplexe, où l'on prend $\Delta_k = f(x+\theta z^k) - f(x)$, $x+\theta z^k$ $(k \in J(x))$ désignant les sommets voisins de x. Ce dernier résultat a été publié dans [7] et aussi [6].

3. Dualité dans les programmes linéaires. Considérons le couple de problèmes suivants dits *duaux* l'un de l'autre:

(25) (I) $\quad Ax \geqslant b, x \geqslant 0, \quad$ minimer $\langle c, x\rangle$;

(26) (II) $\quad A^*u \leqslant c, u \geqslant 0; \quad$ maximer $\langle b, u\rangle$.

On a établi ([5], [13]) pour ces problèmes plusieurs théorèmes remarquables de dualité, dont le plus délicat est apparemment le „théorème fort des écarts complémentaires" qui s'enonce ainsi:

Si chacun des domaines (25) *et* (26) *est non vide, il existe un couple de solutions* $\bar{x}$, $\bar{u}$ *tel que*

(27) $$(A\bar{x}-b)+\bar{u} > 0, \quad (c-A^*\bar{u})+\bar{x} > 0.$$

Nous allons nous occuper plus particulièrement de ce théorème, puisque la démonstration des autres théorèmes de dualité ne présente aucune difficulté. A l'aide des résultats obtenus dans la première partie on peut aisément établir ce théorème de plusieurs manières.

La méthode classique ([5] et [13]) consiste à utiliser le corollaire 3 ou 3′ (lemme de Farkas-Minkowski) pour démontrer d'abord que: si $A^* = -A$, il existe x vérifiant $Ax \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $Ax + x > 0$, puis, de là déduire le résultat mentionné. Nous allons donner une autre méthode, beaucoup plus simple et, sans doute, moins artificielle.

Il nous suffit de prouver qu'il existe un couple $\bar{x}$, $\bar{u}$ vérifiant la deuxième inégalité (27), car alors de la même manière il existerait un couple $\bar{x}'$, $\bar{u}'$, vérifiant la première inégalité (27), et le couple $\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{x}')$, $\frac{1}{2}(\bar{u}+\bar{u}')$ vérifierait toutes les deux inégalités.

Prenons l'ensemble $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tel qu'on ait, pour toute solution x du problème (I),

$$x_j = 0 \quad (j \in J) \tag{28}$$

et qu'il existe une solution $\bar{x}$ avec

$$\bar{x}_j = 0 \quad (j \in J), \qquad \bar{x}_j > 0 \quad (j \notin J). \tag{29}$$

Désignons par I l'ensemble $\{i : \langle A_i, \bar{x}\rangle = b_i\}$. On doit avoir

$$\langle c, z\rangle \geqslant 0 \tag{30}$$

pour tout $z \in G(\bar{x}) = \{z : \langle A_i, z\rangle \geqslant 0 \ (i \in I),\ z_j \geqslant 0 \ (j \in J)\}$. Donc en vertu du corollaire 3, où $q = c$, $p_j = c_j$ $(j \notin J)$, $p_j = -\infty$ $(j \in J)$, il existe des nombres $\bar{u}_i$ $(i \in I)$, $\bar{v}_j$ $(j \in J)$ tels que

$$\bar{u}_i \geqslant 0 \quad (i \in I), \qquad \bar{v}_j \geqslant 0 \quad (j \in J); \tag{31}$$

$$\sum_{j \in I} a_{ij}\bar{u}_i + \bar{v}_j \leqslant c_j \quad (j \in J); \tag{32}$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij}\bar{u}_i = c_j \quad (j \notin J). \tag{33}$$

En outre, puisque tout point admissible x ne vérifiant pas (28) n'est pas optimal, la relation (30) a lieu comme inégalité stricte pour tout $z \in G(\bar{x})$ tel que $z_j > 0$ pour au moins un $j \in J$. Donc, d'après le même corollaire (deuxième partie), on peut choisir $\bar{v}_j$ de façon que

$$\sum_{i \in I} a_{ij}\bar{u}_i + \bar{v}_j < c_j \quad (j \in J). \tag{34}$$

Posons $\bar{u}_i = 0$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\} - I)$. Alors $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)$ est un point admissible de (II) et comme $\langle b, \bar{u}\rangle = \langle A\bar{x}, \bar{u}\rangle = \langle \bar{x}, A^*\bar{u}\rangle = \langle \bar{x}, c\rangle$, c'est une solution de (II). D'après (29), (31), (34), on voit bien que le couple $\bar{x}, \bar{u}$ satisfait à la deuxième inégalité (27).

Par ailleurs, nous pouvons raisonner d'une manière directe et non moins simple, en commençant par établir la proposition suivante, intéressante en elle-même:

THÉORÈME 6. *Si toute solution x de* (I) *vérifie $x_j = 0$ $(j \in J)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le problème*

$$(\mathrm{I}') \qquad Ax \geqslant b, x \geqslant 0; \quad \textit{minimiser } \langle c', x\rangle;$$

où $c'_j = c_j$ $(j \notin J)$, $c'_j = c_j - \varepsilon$ $(j \in J)$, admette les mêmes solutions que (I).

Démonstration. Soit $\bar{x}$ une solution de (I), qu'on peut toujours supposer être un sommet. Il suffit de prouver que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $\bar{x}$ est encore une solution de (I'). Prenons sur chaque arête, issue de $\bar{x}$, du tronçon (25), un point différent de $\bar{x}$, et soit S l'ensemble formé par $\bar{x}$ et tous les points obtenus, S_0 — l'ensemble $\{x \in S : x_j = 0$ pour tout $j \in J\}$. Lorsqu'on remplace c par c', la valeur $\langle c, x\rangle$ ne change pas pour $x \in S_0$, et diminue de $\varepsilon \sum_{j \in J} x_j$ pour $x \in S - S_0$. Mais d'après l'hypothèse aucun $x \in S - S_0$ n'est optimal pour (I), donc pour ces x on a $\langle c, x\rangle > \langle c, \bar{x}\rangle$, et comme leur nombre est fini, on peut choisir $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\langle c', x\rangle$ reste $\geqslant \langle c', \bar{x}\rangle$ pour tout $x \in S$, donc que $\bar{x}$ reste encore optimal. Le théorème est démontré.

Considérons maintenant le problème dual de (I'):

$$(\mathrm{II}') \qquad A^* u \leqslant c', u \geqslant 0; \quad \text{maximer } \langle b, u\rangle.$$

Puisque (I') a une solution, il en est de même de (II'). Soient α, β, α', β' les valeurs optimales de $\langle c, x\rangle$ et $\langle b, u\rangle$ respectivement pour (I), (II), (I'), (II'). D'après le théorème classique de dualité $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$, ce qu'on peut d'ailleurs démontrer facilement. D'autre part, en vertu du théorème précédent $\alpha = \alpha'$. Donc $\beta = \beta'$, ce qui implique que toute solution de (II') sera encore solution de (II). Dès lors il suffit de prendre une solution quelconque $\bar{u}$ de (II') pour avoir un couple $\bar{x}, \bar{u}$ satisfaisant aux conditions requises.

4. Programmes convexes et semiconvexes. Examinons maintenant le cas où les contraintes restant linéaires et les mêmes que (21) la fonction à minimiser est convexe ou, plus généralement, semiconvexe.

I. Supposons d'abord $f(x)$ *convexe*, *„séparable"*, c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j),$$

où chaque $\varphi_j(s)$ est une fonction convexe de s. On a alors pour $x \in D$, $z \in G(x)$,

$$Df(x, z) = \sum_{z_j \leqslant 0} z_j \varphi_j^-(x_j) + \sum_{z_j > 0} z_j \varphi_j^+(x_j),$$

où $\varphi_j^-(s)$ et $\varphi_j^+(s)$ désignent respectivement les dérivées gauche et droite de $\varphi_j(s)$. La condition (19) s'ecrit donc

$$\langle \varphi^-(x), \varphi^+(x), z\rangle \geqslant 0,$$

avec $\varphi^-(x) = \big(\varphi_1^-(x_1), \ldots, \varphi_n^-(x_n)\big)$,

$$\varphi^+(x) = \big(\varphi_1^+(x_1), \ldots, \varphi_n^+(x_n)\big), \qquad \varphi^- \leqslant \varphi^+.$$

Par suite, en vertu du corollaire 4:

Le point x est optimal si et seulement s'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que

$$\varphi_j^-(x_j) \leqslant \langle A_j^*, u\rangle \leqslant \varphi_j^+(x_j), \qquad j \notin J(x),$$

$$\langle A_j^*, u\rangle \leqslant \varphi_j^+(x_j), \qquad j \in J(x),$$

où, comme auparavant, $J(x) = \{j : x_j = 0\}$.

Remarquons que la convexité de chaque $\varphi_j(s)$ n'est exigée que dans le domaine admissible de s. Cette condition est satisfaite par exemple si

$$\varphi_j(s) = \frac{\alpha_j s + \beta_j}{\gamma_j s + \delta_j},$$

où $\gamma_j s + \delta_j > 0$ pour s admissible, $\gamma_j(\alpha_j\delta_j - \beta_j\gamma_j) \leqslant 0$.

II. Dans le cas où $f(x)$ est *semiconvexe* et *différentiable*, en désignant son gradient par

$$\delta f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

la condition (19) s'écrit

$$\langle \delta f(x), z\rangle \geqslant 0, \tag{35}$$

d'où le critère suivant qui se reduit à un résultat connu lorsque $f(x)$ est convexe:

THÉORÈME 7. *Un point $x \in D$ est optimal si et seulement s'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que*

$$\langle A_j^*, u\rangle = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \qquad j \notin J(x),$$

$$\langle A_j^*, u\rangle \leqslant \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \qquad j \in J(x).$$

Tout comme la methode du simplexe est applicable aux programmes semilinéaires, la méthode du simplexe généralisée, proposée par Frank et Wolf [3] pour les programmes convexes (à contraintes linéaires) peut être utilisée pour résoudre les programmes semiconvexes. On construit, pour cela, à partir d'un point arbitraire $x^1 \in D$, une suite $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ de points de D de la manière suivante: connaissant x^k, on cherche, par la méthode du simplexe par exemple, un sommet $\bar{x}^k$ de D qui minimise la forme linéaire $\langle \delta f(x^k), x\rangle$ dans D, puis on choisit sur le segment $[x^k, \bar{x}^k]$

un point x^{k+1} où $f(x)$ soit minimum. En supposant, comme M. Frank et P. Wolf, que les dérivées partielles de $f(x)$ sont continues et que pour chaque $\bar{x}$ donné la fonction linéaire $\langle \delta f(\bar{x}), x\rangle$ est borné dans D, il est facile de montrer que si x^0 est un point d'adhérence de la suite $x^1, x^2, \ldots, x^k, \ldots$ on a $\langle \delta f(x^0), z\rangle \geqslant 0$ pour tout $z \in G(x^0)$ et par suite $f(x^k) \downarrow f(x^0) = \min_{x \in D} f(x)$.

Jusqu'ici nous avons toujours supposé les contraintes linéaires. Mais les résultats s'étendent sans difficulté au cas où les contraintes prennent la forme

$$g_i(x) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{36}$$

les fonctions $g_i(x)$ étant concaves, différentiables, satisfaisant par exemple à la condition de régularité suivante: il existe un point x' du domaine (36) tel que $g_i(x') > 0$ pour toutes les fonctions $g_i(x)$ non linéaires. En désignant par $J(x)$ l'ensemble $\{j : g_i(x) = 0\}$, on peut voir aisément que la fermeture du cône admissible $G(x)$ en un point x du domaine (36) est le cône $G'(x) = \{z : \langle \delta g_j(x), z\rangle \geqslant 0 \text{ pour } j \in J(x)\}$.

En effet, soit un vecteur $z \in G'(x)$. En posant $z' = x' - x$, on a

$$z = \lim_{\lambda \to 0+} (z + \lambda z'),$$

et d'autre part, si $j \in J(x)$ et $g_j(x)$ est non linéaire, $\langle \delta g_j(x), z'\rangle \geqslant g_j(x') - g_j(x) > 0$ d'où il suit, pour $\lambda > 0$, $\langle \delta g_j(x), z + \lambda z'\rangle = \langle \delta g_j(x), z\rangle + \lambda \langle \delta g_j(x), z'\rangle > 0$, ce qui montre que $z + \lambda z' \in G(x)$. Donc un point admissible x est optimal si et seulement si la relation (35) a lieu pour tout $z \in G'(x)$. Il en résulte, d'après le corollaire 3:

THÉORÈME 8. *Un point admissible x est optimal pour le programme semiconvexe considéré si et seulement s'il existe un vecteur $u \in R^m$ tel que:*

$$u \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = 0, \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

On peut d'ailleurs démontrer que si une fonction $g(x)$ est semiconvexe dans un domaine convexe C, l'ensemble $\{x \in C : g(x) \leqslant \alpha\}$ est convexe, quel que soit le nombre α.

Il est alors facile de voir que le raisonnement et le théorème précédents restent valables si dans les contraintes (36) les fonctions $-g_i(x)$ $(i \in I \subset \{1, 2, \ldots, n\})$ sont convexes, mais les fonctions $-g_i(x)$ $(i \notin I)$ sont seulement semiconvexes dans le domaine $C = \{x : g_i(x) \geqslant 0,\ i \in I\}$.

Le théorème 8 exprime un résultat bien connu lorsque $f(x)$ est convexe. On peut aussi, dans ce cas, en tirer facilement le théorème classique de Kuhn et Tucker [11] sur le point-selle de la fonction

$$F(x, u) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x).$$

La méthode „des directions faisables" de Zoutendijk [14] s'etend également aux programmes semiconvexes (cf. [7]).

5. Flots et tensions dans un réseau de transport. Pour terminer, nous examinons un autre aspect du théorème 1 qui s'exprime en des conditions de compatibilité pour certains systèmes d'inégalités linéaires.

Soit un graphe fini $G = (A, U)$ où $A = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble des sommets, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ l'ensemble des arcs $(U \subset A \times A)$. Considérons sa matrice d'incidence $S = (s_{ij})$, dont les éléments s_{ij} sont déterminés par:

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ si l'arc } u_j \text{ sort du sommet } i; \\ +1 \text{ si l'arc } u_j \text{ entre dans le sommet } i; \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

Comme auparavant, nous désignons les vecteurs-lignes et les vecteurs-colonnes de S par S_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ et S_j^* $(j = 1, 2, \dots, n)$ respectivement. Un *flot* sur le graphe G est par définition une fonction numérique definie sur U, c'est-à-dire un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$. Le nombre $\langle S_i, x\rangle$ est l'*apport* du flot au sommet i. Un flot d'apport nul en chaque sommet, autrement dit un vecteur x vérifiant l'équation $Sx = 0$ est appelé un *flot conservatif* ou un *cycle*. Evidemment, les cycles forment un sous-espace K de R^n, dont le complément orthogonal est le sous-espace T engendré par les vecteurs S_i. Les éléments de T seront appelés *tensions* ou *cocycles*.

Un *cycle* (*cocycle*) *élémentaire* est un cycle (cocycle) dont les composantes prennent seulement les valeurs $+1$, -1, 0, et tel que, quel que soit $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$ le vecteur $x' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$, où $x_j' = 0$ pour $j \in J$, $x_j' = x_j$ pour $j \notin J$, n'est jamais un cycle (cocycle), sauf si $x' = x$. Il est clair que les cycles (cocycles) élémentaires constituent une armature de $K(T)$. En vertu du théorème 2, on obtient les propositions suivantes (cf. par ex. [1]):

THÉORÈME 9 (A. J. Hoffman). *Etant donnés deux vecteurs $b, c \in R^n$, $b \leqslant c$, pour qu'il existe un flot conservatif x vérifiant $b \leqslant x \leqslant c$, il faut et il suffit que pour tout cocycle élémentaire t on ait $\langle c, b, t\rangle \leqslant 0 \leqslant \langle b, c, t\rangle$.*

On a un théorème d'existence analogue pour les tensions.

Enfin, si on se donne des vecteurs $a \in R^m$, $b, c \in R^n$, $b \leqslant c$, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$, et des fonctions convexes $\varphi_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, on peut se proposer de chercher un flot x vérifiant $Sx = a$, $b \leqslant x \leqslant c$, et tel que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j)$$

soit minimum. C'est le problème général du transport, dont la solution repose sur le théorème suivant, conséquence directe du corollaire 4:

THÉORÈME 10. *Pour qu'un flot admissible x soit optimal il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $v \in R^m$, vérifiant:*

$$\begin{aligned} &\varphi_j^-(x_j) \leqslant v_{i_2(j)} - v_{i_1(j)} \leqslant \varphi_j^+(x_j) && \text{si} \quad b_j < x_j < c_j; \\ &v_{i_2(j)} - v_{i_1(j)} \leqslant \varphi_j^+(x_j) && \text{si} \quad x_j = b_j; \\ &\varphi_j^-(x_j) \leqslant v_{i_2(j)} - v_{i_1(j)} && \text{si} \quad x_j = c_j; \end{aligned}$$

($i_1(j)$ et $i_2(j)$ désignent respectivement l'origine et l'extrémité de l'arc u_j).

Une démonstration de ce théorème se trouve aussi dans [9] et [8].

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Berge et Ghouila-Houri, *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Paris 1962.

[2] J. Farkas, *Über die Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 124 (1902), p. 1-27.

[3] M. Frank and P. Wolfe, *An algorithm for quadratic programming*, Naval Research Logistics Quaterly 3 (1956), p. 95-110.

[4] S. Gass, *Linear programming: methods and applications*, New York 1958.

[5] A. J. Goldman and A. W. Tucker, *Theory of linear programming*, article 4 dans [10].

[6] Hoàng Tuy, *Sur une classe de programmes non linéaires*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences 12. 4 (1964), p. 213-215.

[7] — *Sur une classe de programmes non-linéaires*, Toàn Lý 1 (1963), p. 60-63 (en Vietnamien).

[7'] *Extension de la méthode du simplexe aux programmes convexes*, ibidem 3 (1964), p. 59-60,

[8] — *Contributions à la théorie des réseaux*, Acta Scientiarum Vietnamicarum 1 (1964), p. 11-67.

[9] — *Графы и транспортные задачи*, Сибирский Математический Журнал 2 (1962), p. 426-445.

[10] H. W. Kuhn and A. W. Tucker (editors), *Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies No 38, Princeton 1950.

[11] — *Non linear programming*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, California 1950, p. 481-492.

[12] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, zweite Auflage, Leipzig 1910.

[13] A. W. Tucker, *Dual systems of homogeneous linear relations*, article 1 dans [10].

[14] G. Zoutendijk, *Methods of feasible directions*, Amsterdam 1960.

UNIVERSITÉ DE HANOI

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1964