COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

CONNEXIONS CONJUGUÉES

PAR

J. GANCARZEWICZ (KRAKÓW)

1. Introduction. La notion de connexions conjuguées a été introduite par Norden [8] pour les connexions linéaires. La définition proposée par Norden a été géométrique: en considérant deux connexions linéaires Γ et $\check{\Gamma}$ et un tenseur métrique g, les connexions Γ et $\check{\Gamma}$ sont dites par lui *g-conjuguées* si, pour toute courbe γ et toute pair de champs v et w de vecteurs parallèles par rapport à Γ et à $\check{\Gamma}$ respectivement (le long de γ), l'égalité $g_{ij}v^i w^j = 0$ en un point de γ entraîne la même égalité en chaque point de γ. Norden a démontré la proposition suivante: pour que Γ et $\check{\Gamma}$ soient g-conjuguées, il faut et il suffit que la dérivée covariante mixte de g par rapport à Γ et $\check{\Gamma}$ soit nulle partout.

Des connexions linéaires conjuguées ont été aussi considerées par Cruceanu et Miron (voir [1], [2] et (7)]. Ensuite, cette notion a été généralisée par Vedernikov (voir [9] et [10]) pour des connexions quelconques (définies sur un espace fibré principal), le tenseur métrique étant remplacé par un automorphisme involutif φ du groupe structural de l'espace fibré principal. Cette généralisation s'accorde avec le cas considéré par Norden, à savoir avec celui où $\varphi\colon GL(n, R) \to GL(n, R)$ et $\varphi(X) = (X^{-1})^t$.

Dans cette communication, après avoir rappelé la définition des connexions φ-conjuguées introduite par Vedernikov, une condition suffisante et nécessaire pour que deux connexions soient φ-conjuguées sera établie (Théorème 5.3). Cette condition ressemble à la définition locale (voir [10]). Elle dépend de deux connexions envisagées et d'un autre élément, à savoir d'un espace fibré réduit dont le groupe structural H^φ est le sous-groupe des éléments laissés fixes par φ. Il sera démontré que tous les éléments intervenant dans la définition de Vedernikov [9] sont déterminés de la manière univoque par ces deux connexions et par cet espace fibré réduit.

Etant donné un espace fibré principal $P(M, G)$, le problème de connaître les automorphismes involutifs du groupe structural G est important pour la recherche des connexions conjuguées définies sur $P(M, G)$. Le problème qui suit est de donner des interprétations géométriques des connexions φ-conjuguées pour divers φ, comme Norden l'a fait pour $\varphi(X) = (X^{-1})^t$.

En vertu d'un théorème démontré par Kucharzewski et Zajtz [5] on peut facilement trouver tous les automorphismes involutifs du groupe linéaire $GL(n, R)$. Le théorème 5.3 qui sera établi ici me permettra de donner ailleurs (voir [3]) une interprétation géométrique aux connexions linéaires φ-conjuguées pour tout automorphisme φ du groupe $GL(n, R)$.

2. Notation et terminologie. La différentiabilité sera toujours entendue au sens de C^∞.

Si M est une variété et x en est un point, T_xM désignéra l'espace vectoriel tangent en x à M, et si $f\colon M \to M'$ est une application, on désignera par

$$T_xf\colon T_xM \to T_{f(x)}M'$$

l'homomorphisme linéaire induit par f.

Une r-forme sur M à valeurs dans V où V est un espace vectoriel (de dimension finie) est une application (de classe C^∞) qui, à tout point x de M, fait correspondre une application r-linéaire et antisymétrique

$$\omega_x\colon T_xM \times \ldots \times T_xM \to V.$$

Si ω' est une r-forme sur M' à valeurs dans V et $f\colon M \to M'$ est une application, l'image réciproque de ω' par f sera désignée par $f^*\omega'$. Elle est une r-forme sur M à valeurs dans V et l'on a

$$(f^*\omega')_x = \omega'_{f(x)} \circ (T_xM \times \ldots \times T_xf).$$

Si ω est une r-forme sur M à valeurs dans V et $\varphi\colon M \to \mathrm{Hom}(V, V')$ est une application différentiable, où V' est aussi un espace vectoriel, $\varphi\cdot\omega$ désignera la r-forme sur M à valeurs dans V' définie par la formule

$$(\varphi\cdot\omega)_x = \varphi(x)\circ\omega_x.$$

G étant un groupe de Lie, $\mathscr{L}(G)$ dénotera l'algèbre de Lie du groupe G. Très souvent $\mathscr{L}(G)$ sera identifié avec l'espace vectoriel T_eG. Si $\varphi\colon G \to G'$ est un homomorphisme de groupes de Lie, $\mathscr{L}\varphi\colon \mathscr{L}(G) \to \mathscr{L}(G')$ désignera l'homomorphisme induit par φ. Après l'identification de $\mathscr{L}(G)$ et de T_eG, $\mathscr{L}\varphi$ sera identifié avec $T_e\varphi$.

H étant un sous-groupe de G, $\mathscr{L}(H)$ sera considéré comme une sous-algèbre de $\mathscr{L}(G)$ grâce au monomorphisme canonique $\mathscr{L}i\colon \mathscr{L}(H) \to \mathscr{L}(G)$, où $i\colon H \to G$ est l'inclusion. On identifiera aussi $\mathscr{L}(G\times G')$ avec $\mathscr{L}(G)\oplus\mathscr{L}(G')$ grâce à l'isomorphisme

$$\mathscr{L}\pi\oplus\mathscr{L}\pi'\colon \mathscr{L}(G\times G') \to \mathscr{L}(G)\oplus\mathscr{L}(G'),$$

où $\pi\colon G\times G' \to G$ et $\pi'\colon G\times G' \to G'$ sont des projections canoniques.

Par ailleurs la terminologie employée sera en général conforme à celle de [4].

3. Connexions réductibles. Soient $P(M, G)$ un espace fibré principal, Γ une connexion sur $P(M, G)$ et $P_1(M, H)$ un espace fibré réduit de $P(M, G)$, c'est-à-dire, un espace fibré principal tel que P_1 est une sous--variété de P, que H est un sous-groupe de G et que l'action de H sur P_1 est la restriction à P_1 de l'action de G sur P (voir [4], p. 53).

Définition 3.1 (voir [4], p. 81). La connexion Γ est dite *réductible à une connexion sur* $P_1(M, H)$ lorsqu'il existe une connexion Γ_1 sur $P_1(M, H)$ telle que $i(\Gamma_1) = \Gamma$ où $i: P_1(M, H) \to P(M, G)$ est l'inclusion (entre espaces fibrés principaux) et $i(\Gamma_1)$ est l'image directe de Γ_1 par i. Quant à l'*image directe* $f(\Gamma)$ par homomorphisme $f: P(M, G) \to P'(M, G')$ d'espaces fibrés principaux, elle est définie de la manière suivante (rappellons que $f: P \to P'$ est un homomorphisme lorsque $f(p\cdot\xi) = f(p)\cdot f(\xi)$, où $f': G \to G'$ est un homomorphisme de groupes de Lie): il existe une connexion Γ' sur $P'(M, G')$, et une seule, telle que $(\Gamma')_{f(p)} = (T_p f)(\Gamma_p)$; on pose $\Gamma' = f(\Gamma)$.

Si ω et ω' sont les formes de Γ et de Γ' respectivement, on a (voir [4], 6.1, p. 79)

$$f^*\omega' = \mathscr{L}f'\cdot\omega. \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.2. *S'il existe un sous-espace vectoriel K de $\mathscr{L}(G)$ tel que*

$$\mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(H)\oplus K \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_\xi(K) \subset K \quad \text{pour } \xi\in H, \tag{3.2.*}$$

alors, pour que Γ soit réductible à une connexion sur $P_1(M, H)$, il faut et il suffit que $i_1^*\omega$ soit une 1-forme sur P_1 à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, où ω est la forme de Γ et $i_1: P_1 \to P$ est l'inclusion.

Démonstration. Si Γ est réductible et Γ_1 est une connexion sur $P_1(M, H)$ telle que $i(\Gamma_1) = \Gamma$ et ω_1 est sa forme,

$$i_1^*\omega = \mathscr{L}(i_H)\cdot\omega_1 = \omega_1$$

est d'après (3.1.1) une forme à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$.

Réciproquement, si $\omega_1 = i_1^*\omega$ est une telle forme, pour démontrer que ω_1 définit une connexion sur $P_1(M, H)$, il suffit de montrer que ω_1 satisfait aux deux conditions suivantes:

(x) ω_1 applique isomorphiquement sur $\mathscr{L}(H)$ les sous-espaces tangents aux fibres de $P_1(M, H)$,

(xx) $R_\xi^*\omega_1 = \mathrm{ad}_{\xi^{-1}}\cdot\omega_1$ pour $\xi\in H$.

La première condition est triviale. Pour établir la seconde, soit $\omega = \tilde{\omega}_1\oplus\theta$ la décomposition de ω en formes $\tilde{\omega}_1$ et θ à valeurs dans $\mathscr{L}(H)$, et K respectivement. Grâce à la deuxième des formules (3.2.*), on a

$$R_\xi^* \omega = R_\xi^* \tilde{\omega}_1 \oplus R^* \theta \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_{\xi^{-1}} \cdot \omega = \mathrm{ad}_{\xi^{-1}} \cdot \omega_1 \oplus \mathrm{ad}_{\xi^{-1}} \theta \quad \text{pour } \xi \in H.$$

Comme ω est une forme de connexion, on a $R^* \omega = \mathrm{ad}_{\xi^{-1}} \cdot \omega$ et par suite $R_\xi^* \tilde{\omega}_1 = \mathrm{ad}_{\xi^{-1}} \cdot \tilde{\omega}$. Comme $(\omega_1)_p = (\tilde{\omega}_1)_p | T_p P_1$ pour $p \in P_1 \subset P$, la condition (xx) est établie. Enfin, si Γ_1 est la connexion sur $P_1(M, H)$ définie par ω_1, on a $i(\Gamma_1) = \Gamma$ ce qui achève la démonstration.

La proposition 3.2 montre que la notion de connexion réductible coïncide avec la notion de H-connexion introduite par Vedernikov dans son travail [9] (la condition (3.2) étant supposé satisfaite).

COROLLAIRE 3.3. *Si la condition* (3.2.*) *est satisfaite, alors pour que* Γ *soit réductible à une connexion sur* $P_1(M, H)$, *il faut et il suffit que* $\sigma^* \omega$ *soit une* 1*-forme sur* $U \subset M$ *à valeurs dans* $\mathscr{L}(H)$ *pour toute section* σ: $U \to P_1$.

4. Définition des connexions conjuguées. Etant donné un groupe de Lie G, soit $\varphi: G \to G$ un automorphisme involutif du groupe G ($\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$). Le groupe

$$H^\varphi = \{\xi \in G : \varphi(\xi) = \xi\} \tag{4.1}$$

est un sous-groupe fermé de G et, par suite, il est un groupe de Lie.

LEMME 4.2. (a) $\mathscr{L}(H^\varphi) = \{v \in \mathscr{L}G : \mathscr{L}(\varphi)(v) = v\}$.

(b) *Il existe un sous-espace vectoriel* K *de* $\mathscr{L}(G)$ *tel que*

$$\mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(H^\varphi) \oplus K \quad \textit{et} \quad \mathrm{ad}_\xi(K) \subset K \quad \textit{pour } \xi \in H.$$

Démonstration. On a $\mathscr{L}(H^\varphi) \approx \mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L}(G)$ où $\mathscr{L}_0$ est l'image de $\mathscr{L}(H^\varphi)$ par le monomorphisme $\mathscr{L}(i)$ ($i: H^\varphi \to G$ étant l'inclusion). Soit $v \in \mathscr{L}(G)$. Pour que $v \in \mathscr{L}_0$, il faut et il suffit que $v = (\mathscr{L}i)(v')$ pour un élément $v' \in \mathscr{L}(H^\varphi)$. Vu que $i = \varphi \circ i$, on a donc

$$v = (\mathscr{L}i)(v') = (\mathscr{L}\varphi \circ \mathscr{L}i)(v') = (\mathscr{L}\varphi)(v),$$

ce qui entraîne (a).

Pour démontrer (b), il suffit de poser

$$K = \{v \in \mathscr{L}(G) : (\mathscr{L}\varphi)(v) = -v\}.$$

Désignons par H_1 et H_2 deux sous-groupes suivants de $G \times G$:

$$H_1 = \{(\xi, \varphi(\xi)) : \xi \in G\}, \quad H_2 = \{(\xi, \xi) : \xi \in G\}. \tag{4.3}$$

Si $\psi_1, \psi_2 : G \times G \to G \times G$ sont des automorphismes involutifs définis par les formules $\psi_1(\xi, \eta) = (\varphi(\eta), \varphi(\xi))$ et $\psi_2(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$, on a $H_i = H^{\psi_i}$ pour $i = 1$ et 2, et il résulte du lemme 4.2 le suivant

LEMME 4.4. *On a*

$$\mathscr{L}(H_1) = \{v \oplus (\mathscr{L}\varphi)(v) : v \in \mathscr{L}(G)\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{L}(H_2) = \{v \oplus v : v \in \mathscr{L}(G)\}.$$

Il existe des sous-espaces vectoriels K_1 et K_2 de $\mathscr{L}(G\times G) = \mathscr{L}(G)\oplus\mathscr{L}(G)$ tels que

$$\mathscr{L}(G\times G) = \mathscr{L}(H_i)\oplus K_i \quad \textit{et} \quad \mathrm{ad}_\xi(K_i)\subset K_i \quad \textit{pour } \xi\in H_i \textit{ ou } i = 1 \textit{ et } 2.$$

Définition 4.5. Étant donné un espace fibré principal $\tilde{P}(M, G\times G)$, deux espaces fibrés réduits $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ de $\tilde{P}(M, G\times G)$, où H_1 et H_2 sont définis par (4.3), sont dits *φ-conjugués* si $\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ est un espace fibré principal dont la base est M (en conséquence, le groupe $H_0 = H_1\cap H_2$ agit sur $\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$).

Cette définition a été également introduite par Vedernikov dans son travail [9].

La construction suivante (cf. [9]) sert alors pour définir des connexions φ-conjuguées:

Construction 4.6. Etant donné un système

$$\tilde{P}(M, G\times G), \quad \tilde{P}_2(M, H_2), \quad \tilde{\omega},$$

où $\tilde{P}(M, G\times G)$ est un espace fibré principal, $\tilde{P}_2(M, H_2)$ — un espace fibré réduit de $\tilde{P}(M, G\times G)$ et $\tilde{\omega}$ — la forme d'une connexion sur $\tilde{P}(M, G\times G)$, faisons correspondre à ce système un autre:

$$P(M, G), \quad \omega_1, \quad \omega_2,$$

où $P(M, G)$ est un espace fibré principal et ω_1, ω_2 sont des 1-formes sur P à valeurs dans $\mathscr{L}(G)$ (mais qui ne sont pas nécessairement des formes des connexions sur $P(M, G)$).

Admettons que P coïncide avec $\tilde{P}_2$ en tant que variétés. L'application

$$j: G\to H_2 \quad \text{où } j(\xi) = (\xi, \xi)$$

est un isomorphisme et comme le groupe H_2 agit sur $\tilde{P}_2$, l'application j détermine une action de G sur P. On obtient ainsi un espace fibré principal $P(M, G)$ et l'on a

$$p\cdot(\xi, \xi) = p\cdot\xi. \tag{4.6.1}$$

Vu que $\mathscr{L}(G\times G) = \mathscr{L}(G)\oplus\mathscr{L}(G)$, on a $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1\oplus\tilde{\omega}_2$ où $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ sont des 1-formes sur $\tilde{P}$ à valeurs dans $\mathscr{L}(G)$. Posons

$$\omega_a = i^*\tilde{\omega}_a \quad \text{pour } a = 1 \text{ et } 2,$$

$i: P = \tilde{P}_2\to\tilde{P}$ étant l'inclusion.

Ceci fait, la définition des connexions φ-conjuguées due à Vedernikov s'achève comme suit. Les formes ω_1 et ω_2 qui viennent d'être construites sont dites *φ-conjuguées* s'il existe un espace fibré réduit $\tilde{P}_1(M, H_1)$ de $\tilde{P}(M, G\times G)$ assujetti aux conditions suivantes:

(1) les espaces $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ sont φ-conjugués,

(2) la connexion $\tilde{\Gamma}$ sur $\tilde{P}(M, G\times G)$ définie par $\tilde{\omega}$ est réductible à une connexion sur $P_1(M, H_1)$.

Le cas le plus important en est celui dans lequel ω_1 et ω_2 sont des formes des connexions Γ_1 et Γ_2. C'est dans ce cas que les connexions Γ_1 et Γ_2 sont dites *φ-conjuguées.* Autrement dit.

Définition 4.7. Etant donné un espace fibré principal $P(M, G)$ et deux connexions Γ_1 et Γ_2 sur $P(M, G)$, soient ω_1 et ω_2 les formes de Γ_1 et Γ_2 respectivement. Les connexions Γ_1 et Γ_2 sont dites *φ-conjuguées,* où $\varphi: G\to G$ est un automorphisme involutif, s'il existe un système

$$(4.7.*)\qquad \tilde{P}(M, G\times G),\quad \tilde{P}_1(M, H_1),\quad \tilde{P}_2(M, H_2),\quad \tilde{\Gamma},$$

où $\tilde{P}(M, G\times G)$ est un espace fibré principal, $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ sont des espaces fibrés réduits de $\tilde{P}(M, G\times G)$, H_1 et H_2 sont définis par (4.3) et $\tilde{\Gamma}$ est une connexion sur $\tilde{P}(M, G\times G)$ satisfaisant aux conditions

(4.7.1) $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ sont des espaces φ-conjugués (au sens de la définition 4.5),

(4.7.2) $\tilde{\Gamma}$ est réductible à une connexion sur $\tilde{P}_1(M, H_1)$,

(4.7.3) $P(M, G)$, ω_1 et ω_2 résultent par construction 4.6 du système

$$\tilde{P}(M, G\times G),\quad \tilde{P}_2(M, H_2),\quad \tilde{\omega}$$

où $\tilde{\omega}$ est la forme de $\tilde{\Gamma}$.

5. Théorème fondamental. Etant donné un espace fibré principal $P(M, G)$ et un automorphisme involutif $\varphi: G\to G$, soient Γ_1 et Γ_2 deux connexions sur $P(M, G)$ et ω_1 et ω_2 leurs formes.

PROPOSITION 5.1. *Si Γ_1 et Γ_2 sont φ-conjuguées, il existe un espace fibré $P_0(M, H^\varphi)$ réduit de $P(M, G)$ où H^φ défini par* (4.1) *satisfait à al condition*

$$(5.1.*)\qquad \sigma^*\omega_2 = \mathscr{L}\varphi\cdot\sigma^*\omega_1$$

pour toute section $\sigma: U\to P_0$.

Pour démontrer cette proposition, on procédera par la construction suivante:

Construction 5.2. Etant donné un système

$$\tilde{P}(M, G\times G),\quad \tilde{P}_1(M, H_1),\quad \tilde{P}_2(M, H_2)$$

où $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ sont deux espaces fibrés φ-conjugués réduits de $\tilde{P}(M, G\times G)$ et H_1, H_2 sont des sous-groupes de G définis par (4.3), faisons correspondre à ce système un autre:

$$P(M, G), \quad P_0(M, H^\varphi),$$

où $P_0(M, H^\varphi)$ est un espace fibré réduit de $P(M, G)$ construit comme il suit. $P(M, G)$ étant construit d'après 4.6, et les espaces $\tilde{P}_1(M, H_1)$ et $\tilde{P}_2(M, H_2)$ venant d'être supposés φ-conjugués au sens de la définition 4.5, $P_0 = \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2$ est un espace fibré principal et le groupe $H_0 = H_1 \cap H_2$ agit sur P_0. On a pour j, l'isomorphisme intervenant dans la construction 4.6, $j(H^\varphi) = H_0$; par suite, j définit l'action de H^φ sur P_0 et $P_0(M, H^\varphi)$ est un espace fibré réduit de $P(M, G)$, ce qui termine la construction.

Ceci fait, soit (4.7.*) un système satisfaisant aux conditions (4.7.1)-(4.7.3) de la définition 4.7 pour les connexions Γ_1 et Γ_2 envisagées. Alors, grâce à (4.7.1), la construction 5.2 donne un espace fibré réduit $P_0(M, H^\varphi)$ de $P(M, G)$. Reste à vérifier que la condition (5.1.*) est satisfaite pour toute section $\sigma\colon U \to P_0$.

Or, vu que $P_0 = \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2$, on peut considérer $\sigma\colon U \to P_0$ comme une section de $\tilde{P}_1$ ou de $\tilde{P}_2$. En considérant σ comme une section de $\tilde{P}_2$, on a d'après la construction 4.6

$$\sigma^* \tilde{\omega} = \sigma^* \omega_1 \oplus \sigma^* \omega_2$$

et en considérant σ comme une section de $\tilde{P}_1$, $\sigma^* \tilde{\omega}$ est d'après (4.7.2) et (3.3) une forme à valeurs dans $\mathscr{L}(H_1)$, d'où en vertu de (4.4)

$$\sigma^* \omega_2 = \mathscr{L}\varphi \cdot \sigma^* \omega_1 .$$

La proposition 5.1 est ainsi démontrée.

THÉORÈME 5.3 (fondamental). *Etant donné un espace fibré principal $P(M, G)$, un automorphisme involutif $\varphi\colon G \to G$, deux connexions Γ_1 et Γ_2 sur $P(M, G)$ et, respectivement, ω_1 et ω_2 leurs formes. Pour que Γ_1 et Γ_2 soient φ-conjuguées, il faut et il suffit qu'il existe un espace fibré réduit $P_0(M, H^\varphi)$ de $P(M, G)$, ou H^φ est défini par* (4.1), *tel que l'on ait*

$$\sigma^* \omega_2 = \mathscr{L}\varphi \cdot \sigma^* \omega_1 \tag{5.3.*}$$

pour toute section $\sigma\colon U \to P_0$.

Envisageons d'abord ce théorème dans le cas classique, c'est-à-dire dans celui des connexions linéaires définies sur l'espace fibré LM des repères linéaires, l'automorphisme $\varphi\colon GL(n, R) \to GL(n, R)$ étant donné par la formule $\varphi(X) = (X^{-1})^t$. On a dans ce cas, $H^\varphi = O(n, R)$.

Il est facile de voir que l'existence d'un espace fibré réduit avec le groupe $O(n, R)$ comme groupe structural équivaut à l'existence d'un tenseur métrique sur M. Chaque tenseur métrique g définit l'espace $L^0(M, g)$ des repères orthogonaux (par rapport à g) qui est un espace fibré réduit de LM avec le groupe structural $O(n, R)$. En désignant par $\{E^i_j\}_{i,j=1,2,\ldots,n}$ la base canonique de $\mathscr{L}(GL(n, R)) = \mathscr{L}_n(R)$, c'est-à-dire E^i_j est une matrice dont tous les éléments sont des zéros sauf celui situé à l'intersection de i-ème ligne et j-ème colonne, qui est égal 1, on a $(\mathscr{L}\varphi)(E^i_j) = -E^j_i$.

Désignons, pour toute section $\sigma\colon U \to LM$, par Γ^i_{jk} les coefficients de la connexion Γ par rapport à σ, c'est-à-dire

$$\sigma^* \omega = (\Gamma^i_{jk} v^k) E^j_i,$$

où $(v^1(x), \ldots, v^n(x))$ est la base duale de $T^*_x M$ pour la base $\sigma(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$. Maintenant, la formule $\sigma^* \omega_2 = \mathscr{L}\varphi \cdot (\sigma^* \omega_1)$ est équivalente à $\overset{(2)}{\Gamma}{}^{ik}_j = -\overset{(1)}{\Gamma}{}^j_{ik}$ pour toute section de $P(M, O(n)) = L^0(M, g)$. Il n'est pas difficile de voir que la dernière égalité équivaut à

$$\nabla_k g_{i(j)} = v_k(g_{ij}) - \overset{(1)}{\Gamma}{}^s_{ik} g_{sj} - \overset{(2)}{\Gamma}{}^s_{jk} g_{is} = 0.$$

Les fonctions $\nabla_k g_{i(j)}$ définissent un tenseur du type (0,3) qui s'appelle *dérivée covariante mixte de g par rapport à $\overset{(1)}{\Gamma}$ et à $\overset{(2)}{\Gamma}$* (voir [9], [8] et [3]). C'est le cas qui a été considéré par Norden dans son travail [8].

Pour démontrer le théorème 5.3, il suffit en tenant compte de la proposition 5.2 et de la définition 3.7, d'établir la proposition qui suit.

PROPOSITION 5.4. *S'il existe un espace fibré réduit $P_0(M, H^\varphi)$ de $P(M, G)$ satisfaisant à la condition* (5.3.*) *pour toute section $\sigma\colon U \to P_0$, il existe un système*

$$\tilde{P}'(M, G\times G), \quad \tilde{P}'_1(M, H_1), \quad \tilde{P}'_2(M, H_2), \quad \tilde{\Gamma}', \tag{5.4.*}$$

où $P'_a(M, H_a)$ est un espace fibré réduit de $\tilde{P}'(M, G\times G)$ avec $a = 1$ et 2, et $\tilde{\Gamma}'$ est une connexion sur $\tilde{P}'(M, G\times G)$, tel que les conditions (4.7.1)-(4.7.3) *de la définition* 4.7 *se trouvent satisfaites.*

Il ne s'agit donc que de construire le système (5.4.*).

Soit $\tilde{P}'(M, G\times G) = P(M, G) + P(M, G)$ (voir [4], p. 68). Rappelons que

$$\begin{aligned} \tilde{P}' &= \{(p, q)\in P\times P\colon \pi(p) = \pi(q)\}, \\ (p, q)\cdot(\xi, \eta) &= (p\cdot\xi, q\cdot\eta), \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

où $\pi\colon P \to M$ est la projection de l'espace fibré $P(M, G)$, et posons

$$\begin{aligned} \tilde{P}'_1 &= \{(p\cdot\xi, p\cdot(\xi))\colon p\in P_0,\ \xi\in G\}, \\ \tilde{P}'_2 &= \{(p, p)\colon p\in P\}. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

$\tilde{P}_2'$ est donc un espace fibré réduit de $\tilde{P}'(M, G\times G)$ et le groupe H_2 agit sur $\tilde{P}_2'$. Pour vérifier que $\tilde{P}_1'$ est également un espace fibré réduit, soient $(p\cdot\xi, p\cdot\varphi(\xi))\in P_1'$ et $(\eta, \varphi(\eta))\in H_1$ (voir (4.3)). On a

$$(p\cdot\xi, p\cdot\varphi(\xi))\cdot(\eta, \varphi(\eta)) = (p\cdot\xi\eta, p\cdot\varphi(\xi\eta))\in\tilde{P}_1'$$

et, réciproquement, $(p\cdot\xi, p\cdot\varphi(\xi))$ et $(q\cdot\eta, q\cdot\varphi(\eta))$ étant deux points de $\tilde{P}_1'$ situés sur la même fibre de $\tilde{P}'$ (c'est-à-dire $\pi(p) = \pi(q)$), on a

$$(p\cdot\xi, p\cdot\varphi(\xi)) = (q\cdot\eta, q\cdot\varphi(\eta))\cdot(\xi^{-1}\lambda\eta, \varphi(\xi^{-1}\lambda\eta)),$$

où $\lambda\in H^{\varphi}$ et $q = p\cdot\lambda$, donc $P_1'\cdot H_1 = P_1'$. Si $\sigma\colon U\to P_0$ est une section, $\tilde{\sigma}\colon U\to\tilde{P}'$ où $\sigma(x) = (\sigma(x), \sigma(x))$ en est une à valeurs dans $\tilde{P}_1'$. On en deduit que $\tilde{P}_1'$ est un espace fibré localement trivial et par conséquent un espace fibré réduit.

Les connexions Γ_1 et Γ_2 induisent (voir [4], 6.3, p. 82) une connexion $\tilde{\Gamma}'$ sur $\tilde{P}'(M, G\times G) = P(M, G) + P(M, G)$ et l'on a

$$\tilde{\omega}'_{(p,q)}(w) = (\omega_1)_p(w_1)\oplus(\omega_2)_q(w_2) \tag{5.4.3}$$

pour $w = w_1\oplus w_2\in T_{(p,q)}P'\subset T_{(p,q)}(P\times P) = T_pM\oplus T_qP$, $\tilde{\omega}'$ étant la forme de $\tilde{\Gamma}'$.

Reste à montrer que le système (5.4.*) ainsi construit satisfait aux conditions (4.7.1)-(4.7.3) de 4.7.

Or, on a d'après (5.4.2)

$$\tilde{P}_1'\cap\tilde{P}_2' = \{(p, p)\colon p\in P_0\};$$

par suite, la condition (4.7.1) est satisfaite.

Soit à présent $\sigma\colon U\to P_0$ une section. Alors $\bar{\sigma}(x) = (\sigma(x), \sigma(x))$ en est une de $\tilde{P}_1'$ et il vient en vertu de (5.4.3)

$$\bar{\sigma}^*\tilde{\omega}' = \sigma^*\omega_1\oplus\sigma^*\omega_2 = \sigma^*\omega_1\oplus\mathscr{L}\varphi\cdot\sigma^*\omega_1.$$

Il en résulte en vertu du lemme 4.4 que $\bar{\sigma}^*\tilde{\omega}'$ est une forme à valeurs dans $\mathscr{L}(H_1)$. Soit $\tilde{\sigma}\colon U\to P_1'$ une autre section quelconque de $\tilde{P}_1'$. On peut écrire $\tilde{\sigma}$ sous la forme $\tilde{\sigma} = \bar{\sigma}\cdot h$, où $h\colon U\to H_1$. Alors, en appliquant la formule bien connue, on a

$$\tilde{\sigma}^*\tilde{\omega}' = \mathrm{ad}_{h^{-1}}\cdot\bar{\sigma}^*\tilde{\omega}' + \theta_h$$

où θ_h est la 1-forme canonique. Comme les valeurs de h sont dans H_1, celle de la forme θ_h sont dans $\mathscr{L}(H_1)$ et par conséquent les valeurs de la forme $\tilde{\sigma}^*\tilde{\omega}'$ sont aussi dans $\mathscr{L}(H_1)$ pour toute section $\tilde{\sigma}\colon U\to P_1'$. D'après le corollaire 3.3, $\tilde{\Gamma}'$ est donc réductible à une connexion sur $P_1'(M, H_1)$, ce qui montre que la condition (4.7.2) est également satisfaite.

Enfin, la condition (4.7.3) est une conséquence immédiate de la construction 4.6 et de celle du système (5.4.*) (voir en particulier (5.4.1) et (5.4.2)).

La proposition 5.5 et le théorème 5.6 qui suivent permettent de démontrer l'unicité (à l'isomorphisme près) du système (5.4.*) construit dans la démonstration de la proposition 5.4.

PROPOSITION 5.5. *Soient*

$$\tilde{P}(M, G\times G), \quad \tilde{P}_1(M, H_1), \quad \tilde{P}_2(M, H_2), \quad \tilde{\Gamma}$$

un système satisfaisant aux conditions (4.7.1)-(4.7.3) *de la définition* 4.7,

$$P(M, G), \quad P_0(M, H^\varphi), \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2$$

le système qui en nessait par la construction 5.2 *et enfin*

$$\tilde{P}'(M, G\times G), \quad \tilde{P}_1'(M, H_1), \quad \tilde{P}_2'(M, H_2), \quad \tilde{\Gamma}'$$

celui qui résulte du précédent par la construction appliquée dans la démonstration de la proposition 5.4. *Alors il existe un isomorphisme*

$$F\colon \tilde{P}(M, G\times G) \to \tilde{P}'(M, G\times G)$$

d'espaces fibrés principaux qui satisfait aux conditions

$$F(\tilde{P}_i) = \tilde{P}_i' \quad \textit{pour } i = 1 \textit{ et } 2, \tag{5.5a}$$

$$F(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}' \tag{5.5b}$$

(*la condition* (5.5b) *étant équivalente, d'après* (3.1.1) *à*

$$F^*\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}, \tag{5.5b'}$$

où $\tilde{\omega}$ *et* $\tilde{\omega}'$ *sont les formes de* $\bar{\Gamma}$ *et de* $\tilde{\Gamma}'$ *respectivement*).

La démonstration se composera de plusieurs étapes numérotés (5.5.1)-(5.5.7).

(5.5.1) *Construction de F.* Soit $p\in\tilde{P}$. Il existe un $p_0\in\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ situé dans $\tilde{P}$ sur la même fibre que p. Soit $p = p_0\cdot(\xi, \eta)$. Comme $p_0\in\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2 = P$ (voir la construction 4.6), on peut poser par la définition

$$F(p) = (p_0\cdot\xi, p_0\cdot\eta).$$

$F(p)$ ne dépend que de p. Pour le montrer, soient $p_0'\in\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ et $p = p_0'\cdot(\xi', \eta')$. Le groupe $H_0 = H_1\cap H_2$ agissant sur $\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ d'après (4.7.1), il vient

$$p_0 = p_0'\cdot(\lambda, \lambda) = p_0'\cdot\lambda,$$

où $\varphi(\lambda) = \lambda$ (voir aussi (4.6.1)) et l'égalité

$$p = p_0'\cdot(\xi', \eta') = p_0\cdot(\xi, \eta) = p_0'\cdot(\lambda\xi, \lambda\eta)$$

implique que $\xi' = \lambda\xi$ et $\eta' = \lambda\eta$; on a donc

$$(p_0'\cdot\xi', p_0\cdot\eta') = (p_0'\cdot\lambda\xi,\ p_0'\cdot\lambda\eta) = (p_0\cdot\xi, p_0\cdot\eta).$$

(5.5.2) *Différentiabilité de F.* $\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ étant un espace fibré principal, il en existe une section au voisinage de tout point de M. Soit σ: $U \to \tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ Il suffit de montrer que l'isomorphisme F restreint à $P\,|\,U$ est de classe C^∞. Comme il existe pour tout point $p\in P\,|\,U$ un $(\xi_p, \eta_p)\in G\times G$ tel que $p = \sigma(\pi(p))\cdot(\xi_p, \eta_p)$ et que l'application

$$P\,|\,U\ni p \to (\xi_p, \eta_p)\in G\times G$$

est de classe C^∞, alors

$$F(p) = \big(\sigma(\pi(p))\cdot\xi_p,\ \sigma(\pi(p))\cdot\eta_p\big)$$

est aussi de classe C^∞.

(5.5.3) *F est un homomorphisme d'espaces fibrés principaux*, c'est-à--dire $F\big(p\cdot(\xi, \eta)\big) = F(p)\cdot(\xi, \eta)$.

Soient $p_0\in\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2$ et $p = p_0\cdot(\lambda, \nu)$. Vu que

$$p\cdot(\xi, \eta) = p_0\cdot(\lambda\xi, \nu\eta),$$

on a

$$\begin{aligned} F\big(p\cdot(\xi, \eta)\big) &= (p_0\cdot\lambda\xi, p_0\cdot\nu\eta) \\ &= (p_0\cdot\lambda, p_0\cdot\nu)\cdot(\xi, \eta) = F(p)\cdot(\xi, \eta). \end{aligned}$$

(5.5.4) *Construction de G*: $\tilde{P}' \to \tilde{P}$. Soit $(p, q)\in\tilde{P}'$. Comme $\pi(p) = \pi(q)$, il existe un et un seul $\xi_{pq}\in G$ tel que $q = p\cdot\xi_{pq}$ et l'application

$$\tilde{P}'\ni(p, q) \to \xi_{pq}\in G$$

est de classe C^∞. Posons

$$G(p, q) = p\cdot(e, \xi_{pq}),$$

où p est consideré comme un point de $\tilde{P}$, ce qui est possible, car $p\in P = \tilde{P}_2 \subset \tilde{P}$ (voir la construction 4.6). Alors G est de classe C^∞.

(5.5.5) *F est un isomorphisme.* Il suffit de vérifier que $G\circ F = \mathrm{id}$ et $F\circ G = \mathrm{id}$.

$$\begin{aligned} (G\circ F)(p) &= G(p_0\cdot\xi, p_0\cdot\eta) && \text{où } p_0\in\tilde{P}_1\cap\tilde{P}_2 \text{ et } p = p_0\cdot(\xi, \eta), \\ &= (p_0\cdot\xi)\cdot(e, \xi^{-1}\eta) && \text{d'après (5.5.4), car} p_0\cdot\eta = (p_0\cdot\xi)\cdot(\xi^{-1}\eta), \\ &= p_0\cdot(\xi, \xi)\cdot(e, \xi^{-1}\eta) && \text{d'après (4.6.1),} \\ &= p_0\cdot(\xi, \eta) = p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (F\circ G)(p, q) &= F(p)\cdot(e, \xi_{pq}) && \text{où } q = p\cdot\xi_{pq}, \\ &= F(p)\cdot(e, \xi_{pq}) && \text{d'après (5.5.3),} \end{aligned}$$

$= (p_0\cdot\xi, p_0\cdot\xi)(e, \xi_{pq})$ où $p_0 \in \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2$, $p = p_0\cdot(\xi, \xi) \in P = \tilde{P}_2$ et H_2 agit sur $\tilde{P}_2$,

$= (p, p)\cdot(e, \xi_{pq})$ d'après (4.6.1),

$= (p, q)$.

(5.5.6) *On a* $F(\tilde{P}_i) = \tilde{P}'_i$ *pour* $i = 1$ *et* 2. Soit $p \in \tilde{P}_1$. Si $p_0 \in \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2 \subset \tilde{P}_1$, on a $p = p_0\cdot(\xi, \varphi(\xi))$ parce que le groupe H_1 agit sur $\tilde{P}_1$. Par suite, d'après (5.5.1), $F(p) = (p_0\cdot\xi, p_0\cdot\varphi(\xi))$ est dans $\tilde{P}'_1$, c'est-à-dire $F(\tilde{P}_1) \subset \tilde{P}'_1$.

Soit $p \in \tilde{P}_2$. Si $p_0 \in \tilde{P}_1 \cap \tilde{P}_2$, on a $p = p_0\cdot(\xi, \xi) = p_0\cdot\xi$, car le groupe H_2 agit sur $\tilde{P}_2$. Par suite, $F(p) = (p_0\cdot\xi, p_0\cdot\xi) = (p, p)$ est dans $\tilde{P}'_2$, c'est-à-dire $F(\tilde{P}_2) \subset \tilde{P}'_2$.

F étant un isomorphisme, $F(\tilde{P}_1)$ et $F(\tilde{P}_2)$ sont des espaces fibrés réduits avec les groupes structuraux H_1 et H_2 respectivement. On en déduit les égalités (5.5.6).

(5.5.7) *On a* $F^*\tilde{\omega}' = \tilde{\omega}$.

$F^*\tilde{\omega}'$ étant la forme d'une connexion sur $\tilde{P}(M, G\times G)$ et les formes $F^*\tilde{\omega}'$ et $\tilde{\omega}$ n'étant determinées que par $\sigma^*\tilde{\omega}$ et $\sigma^*(F^*\tilde{\omega}')$, il suffit de vérifier que $\sigma_a^*(F^*\tilde{\omega}') = \sigma_a^*\tilde{\omega}$ pour un recouvrement $\{U_a\}$ de M aux sections $\sigma_a\colon U_a \to \tilde{P}$.

Soit $\{U_a\}$ un recouvrement aux sections $\sigma_a\colon U_a \to P$. On peut considérer σ_a comme une section de $\tilde{P}$ ou $\tilde{P}_2$ parce que $P = \tilde{P}_2 \subset \tilde{P}$ (voir la construction 4.6). D'après la construction 4.6, on a en outre

$$\sigma_a^*\tilde{\omega} = \sigma_a^*\omega_1 \oplus \sigma_a^*\omega_2$$

et l'égalité $(F\circ\sigma_a)(x) = (\sigma_a(x), \sigma_a(x))$ entraîne d'après (5.4.3)

$$\sigma_a^*(F^*\tilde{\omega}') = (F\circ\sigma_a)^*\tilde{\omega}' = \sigma_a^*\omega_1 \oplus \sigma_a^*\omega_2.$$

L'unicité du système (5.4.*) est ainsi établie.

THÉORÈME 5.6. *Etant donné un espace fibré principal* $P(M, G)$, *deux connexions* φ*-conjuguées* Γ_1 *et* Γ_2 *sur* $P(M, G)$, *où* φ *est un automorphisme involutif du groupe* G, *et deux systèmes arbitriares*

$$\begin{array}{llll} \tilde{P}(M, G\times G), & \tilde{P}_1(M, H_1), & \tilde{P}_1(M, H_2), & \tilde{\Gamma}, \\ \tilde{P}'(M, G\times G), & \tilde{P}'_1(M, H_1), & \tilde{P}_2(M, H_2), & \tilde{\Gamma}' \end{array}$$

satisfaisant pour $P(M, G)$, Γ_1 *et* Γ_2 *aux conditions* (4.7.1)-(4.7.3), *si la construction* (5.4.*) *appliquée à ces deux systèmes donne le même espace fibré réduit* $P_0(M, H^\varphi)$ *de* $P(M, G)$, *il existe un isomorphisme* F: $P(M, G\times G) \to P'(M, G\times G)$ *d'espaces fibrés principaux tel que*

$$F(\tilde{P}_1) = \tilde{P}'_1, \quad F(\tilde{P}_2) = \tilde{P}'_2 \quad \text{et} \quad F(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma}'.$$

6. Existence des connexions conjuguées. Soient $P(M, G)$ un espace fibré principal, $\varphi\colon G \to G$ — un automorphisme involutif, Γ — une connexion sur $P(M, G)$ et ω la forme de Γ.

LEMME 6.1. *Pour chaque espace fibré réduit $P_0(M, H^\varphi)$ de $P(M, G)$, ou H^φ est défini par* (4.1), *il existe une et une seule connexion Γ' telle que l'on a pour toute section $\sigma\colon U \to P_0$*

$$\sigma^* \omega' = \mathscr{L}\varphi \cdot \sigma^* \omega, \tag{6.1.*}$$

où ω' est la forme de Γ'. Par suite, Γ et Γ' sont φ-conjuguées.

Démonstration. $\{U_a\}$ étant un recouvrement de M aux sections $\sigma_a\colon U_a \to P_0$, posons

$$\omega_a' = \mathscr{L}\varphi \cdot \sigma_a^* \omega.$$

Soit $h_{a\beta}\colon U_a \cap U_\beta \to H^\varphi$ un homéomorphisme tel que $\sigma_\beta = \sigma_a \cdot h_{a\beta}$ sur $U_a \cap U_\beta$. Comme ω est une forme de connexion, on a

$$\sigma_\beta^* \omega = \mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}} \cdot \sigma_a^* \omega + \theta_{h_{a\beta}} \qquad \text{sur } U_a \cap U_\beta,$$

où $\theta_{h_{a\beta}}$ est la 1-forme canonique à valeurs dans $L(H^\varphi)$. En outre

$$\omega_\beta' = \mathscr{L}\varphi \cdot \sigma_a^* \omega = (\mathscr{L}\varphi \circ \mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}}) \cdot \sigma_\beta^* \omega + \mathscr{L}\varphi \cdot \theta_{h_{a\beta}}.$$

Rappelons que le groupe H^φ agit sur P_0 (voir (1.1)) et que $\mathscr{L}\varphi | \mathscr{L}(H) = \mathrm{id}$ (voir le lemme 4.2), d'où $\varphi\big(h_{a\beta}^{-1}(x)\big) = h_{a\beta}^{-1}(x)$. On a donc

$$\mathscr{L}\varphi \circ \mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}} = \mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}} \circ \mathscr{L}\varphi, \qquad \mathscr{L}\varphi \cdot \theta_{h_{a\beta}} = \theta_{h_{a\beta}},$$

et par conséquent

$$\omega_\beta' = (\mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}} \circ \mathscr{L}\varphi) \cdot \sigma_a^* \omega + \theta_{h_{a\beta}} = \mathrm{ad}_{h_{a\beta}^{-1}} \cdot \omega_a' + \theta_{h_{a\beta}}.$$

Cette formule signifie que la famille $\{\omega_a'\}$ définit une et une seule connexion Γ' sur $P(M, G)$ telle que $\sigma_a^* \omega' = \omega_a'$, où ω' est la forme de Γ'. On vérifie immédiatement que la condition (6.1.*) est satisfaite, ce qui entraîne aussi l'unicité de Γ'.

PROPOSITION 6.2. *Soient $\Omega(P, \varphi)$ l'ensemble des espaces fibrés réduits de $P(M, G)$ avec le groupe structural H^φ et $\Lambda(\Gamma, \varphi)$ l'ensemble des connexions sur $P(M, G)$ φ-conjuguées avec une connexion Γ donnée sur $P(M, G)$. Alors l'application*

$$\Omega(P, \varphi) \to \Lambda(\Gamma, \varphi)$$

est surjective en vertu du lemme 6.1.

Remarque. Soient Γ_1 et Γ_2 deux connexions sur $P(M, G)$ et ω_1 et ω_2 leurs formes. Posons

$$\omega = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \text{et} \qquad \theta = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{6.3}$$

La forme ω définit une connexion Γ sur $P(M,G)$ et θ est une 1-forme tensorielle sur P à valeurs dans $L(G)$. Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que Γ_1 et Γ_2 soient φ-conjuguées, est que la connexion Γ soit φ-conjuguée avec elle-même et que $L\varphi\cdot\theta = -\theta$ (si ω et θ sont données, ω_1 et ω_2 sont définies par les formules $\omega_1 = \omega+\theta$ et $\omega_2 = \omega-\theta$).

Cette remarque donne lieu à la conclusion suivante:

PROPOSITION 6.4. *Soient $\Theta(P,\varphi)$ l'ensemble des couples de connexions φ-conjuguées sur $P(M,G)$, $S\Theta(P,\varphi)$ celui de connexions sur $P(M,G)$ φ-conjuguées avec elles-mêmes et $F(P,\varphi)$ celui des 1-formes tensorielles Θ sur P à valeurs dans $L(G)$ et telles que $L\varphi\cdot\Theta = -\Theta$. Alors l'application*

$$\Theta(P,\varphi)\to S\Theta(P,\varphi)\times F(P,\varphi)$$

définie par (6.3) *est bijective.*

TRAVAUX CITÉS

[1] V. Cruceanu et R. Miron, *Sur les connexions compatibles à une structure métrique ou presque symplectique*, Matematică 9 (32) 2 (1967), p. 245-252.

[2] — *Sur les couples de connexions compatibles avec les structures presque complexes*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi 13 (1967), p. 79-88.

[3] J. Gancarzewicz, *Connexions linéaires conjuguées* (à paraître dans Annales Polonici Mathematici).

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of differential geometry*, New York-London 1963.

[5] M. Kucharzewski und A. Zajtz, *Über die linearen homogenen geometrischen Objekte* $[m, n, 1]$, *wo* $m \leqslant n$ *ist*, Annales Polonici Mathematici 18 (1966), p. 205-255.

[6] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomies*, Roma 1955.

[7] R. Miron, *Sur les espaces à connexions conjuguées au sens de Norden*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi 9 (1963), p. 445-454.

[8] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Москва-Ленинград 1950.

[9] В. П. Ведерников, *Симметрические пространства. Сопряженные связности как нормализованная связность*, Труды геометрического семинара, Москва 1966, p. 63-68.

[10] — *Симметрические пространства и сопряженные связности*, Труды кафедры геометри, Казань 1965, p. 7-59.

Reçu par la Rédaction le 6. 7. 1971