COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1964 FASC. 1

CONTRIBUTION À LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE D'UN TENSEUR MIXTE DE VALENCE DEUX

PAR

W. ŚLEBODZIŃSKI (WROCŁAW)

Ce travail est consacré aux comitants différentiels d'un tenseur $(\psi^\varkappa_\lambda)$ (1) donné sur une variété différentiable V^n. On sait que les premiers comitants, d'ordre un, de tels tenseurs ont été trouvés presque en même temps par B. Eckmann-A. Fröhlicher et par A. Nijenhuis (voir [2] et [4]); nous les désignerons respectivement par $(T^\tau_{\lambda\mu})$ et $(N^\tau_{\lambda\mu})$. Le comitant de Nijenhuis se rapporte au cas, où le nombre n est arbitraire et les valeurs propres de la matrice $[\psi^\varkappa_\lambda]$ sont différentes de zéro et différentes. Le comitant d'Eckmann-Fröhlicher (torsion d'un tenseur presque complexe) est lié au tenseur presque complexe $(\psi^\varkappa_\lambda \psi^\lambda_\mu = -\delta^\varkappa_\mu)$ donné sur une variété de dimension paire $(n = 2r)$. Pour montrer que ces comitants sont des tenseurs les auteurs se servent d'une connexion affine symétrique.

Dans le n° 1 nous obtenons le comitant de Nijenhuis par une méthode directe qui assure immédiatement son caractère tensoriel et qui embrasse le cas d'un tenseur presque complexe. Dans le n° 2 on détermine le comitant différentiel du tenseur $(\bar{\psi}^\varkappa_\lambda)$ qui vérifie la relation $\bar{\psi}^\varkappa_\lambda \bar{\psi}^\lambda_\mu = A\delta^\varkappa_\mu$, où A est une fonction arbitraire. Dans le n° 3 nous introduisons un comitant du deuxième ordre d'un tenseur presque complexe en lui donnant le nom de sa seconde torsion.

1. Supposons que sur une variété V^n de classe C^2 soit donné un tenseur $(\psi^\varkappa_\lambda)$ de classe C^1 dont les valeurs propres sont différentes de zéro. Soit $(-\varphi^\lambda_\mu)$ un second tenseur mixte tel qu'il soit

$$\psi^\varkappa_\lambda \varphi^\lambda_\mu = \delta^\varkappa_\mu. \tag{1.1}$$

Considérons maintenant deux formes différentielles scalaires

$$\omega_1 = \psi^\tau_\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\tau}\, dx^\sigma, \qquad \omega_2 = \varphi^\tau_\sigma \frac{\partial f}{\partial x^\tau}\, dx^\sigma,$$

x^τ désignant les coordonnées locales dans un voisinage arbitraire $U \subset V^n$ et f une fonction arbitraire de classe C^2 donnée dans U.

(1) Dans tout l'article les indices grecs parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

En différentiant extérieurement ω_1 et ω_2 on obtient

$$d\omega^1 = \tfrac{1}{2}\left(-\psi^\tau_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \psi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\varrho \partial x^\tau} - \psi^\tau_\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right) dx^\varrho \Lambda dx^\sigma,$$

$$d\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(-\varphi^\tau_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \varphi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\varrho \partial x^\tau} - \varphi^\tau_\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}\right) dx^\varrho \Lambda dx^\sigma,$$

où

$$\psi^\tau_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \psi^\tau_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \psi^\tau_\sigma}{\partial x^\varrho}, \qquad \varphi^\tau_{\varrho\sigma} = \frac{\partial \varphi^\tau_\varrho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \varphi^\tau_\sigma}{\partial x^\varrho}. \tag{1.2}$$

Des coefficients

$$A_{\varrho\sigma} = -\psi^\tau_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \psi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\varrho \partial x^\tau} - \psi^\tau_\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau},$$

$$B_{\varrho\sigma} = -\varphi^\tau_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \varphi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\varrho \partial x^\tau} - \varphi^\tau_\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}$$

des produits $dx^\varrho \Lambda dx^\sigma$ dans les formes ci-dessus nous formons les expressions suivantes:

$$\varphi^\sigma_\lambda A_{\mu\sigma} = -\varphi^\sigma_\lambda \psi^\tau_{\mu\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \varphi^\sigma_\lambda \psi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \varphi^\sigma_\lambda \psi^\tau_\mu \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau},$$

$$\psi^\sigma_\mu B_{\lambda\sigma} = -\psi^\sigma_\mu \varphi^\tau_{\lambda\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^\tau} + \psi^\sigma_\mu \varphi^\tau_\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\tau} - \psi^\tau_\mu \varphi^\sigma_\lambda \frac{\partial^1 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau}.$$

Si, en tenant compte de la relation (1.1), on change le rôle des indices σ et τ dans le dernier terme de la seconde formule et que l'on retranche les dernières équations, on obtient

$$\varphi^\sigma_\lambda A_{\mu\sigma} - \psi^\sigma_\mu B_{\lambda\sigma} = (-\varphi^\sigma_\lambda \psi^\tau_{\mu\sigma} + \psi^\sigma_\mu \varphi^\tau_{\lambda\sigma})\frac{\partial f}{\partial x^\tau}.$$

Comme les grandeurs $A_{\varrho\sigma}$ et $B_{\varrho\sigma}$ sont des coordonnées de deux bivecteurs covariants, le premier membre de cette équation est un tenseur et, par conséquent, il en est de même du second membre; la fonction f étant arbitraire il s'en suit que les expressions

$$T^\tau_{\lambda\mu} = \varphi^\sigma_\lambda \psi^\tau_{\mu\sigma} - \psi^\sigma_\mu \varphi^\tau_{\lambda\sigma} \tag{1.3}$$

sont des coordonnées d'un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant. Si l'on multiplie cette équation par $\psi^\lambda_\alpha\ \psi^\beta_\tau$ et que l'on tient compte des relations (1.2), on trouve

$$\psi^\lambda_\alpha \psi^\beta_\tau T^\tau_{\lambda\mu} = -\psi^\beta_\tau \psi^\tau_{\mu\alpha} - \psi^\sigma_\mu \frac{\partial \psi^\beta_\alpha}{\partial x^\sigma} + \psi^\lambda_\alpha \frac{\partial \psi^\beta_\mu}{\partial x^\lambda}.$$

Le second membre de cette équation, changé de signe, étant identique avec le comitant différentiel $N^{\beta}_{\mu\alpha}$ trouvé par A. Nijenhuis [4] on a

$$N^{\beta}_{\mu\alpha} = \psi^{\lambda}_{\alpha}\psi^{\beta}_{\tau}T^{\tau}_{\lambda\mu}. \tag{1.4}$$

Remarquons que le tenseur (1.3) n'est pas, en général, antisymétrique en ses indices inférieurs.

Comme nous n'avons pas supposé que les valeurs propres du tenseur $(\psi^{\varkappa}_{\lambda})$ soient différentes, les résultats obtenus s'appliquent aussi au tenseur presque complexe qui satisfait à la relation $\psi^{\varkappa}_{\lambda}\psi^{\lambda}_{\mu} = -\delta^{\varkappa}_{\mu}$. En la rapprochant de (1.1) on voit que l'on doit poser dans ce cas $\varphi^{\lambda}_{\mu} = \psi^{\lambda}_{\mu}$. Le tenseur (1.3) devient alors identique avec le tenseur d'Eckmann-Fröhlicher

$$T^{\tau}_{\lambda\mu} = \psi^{\sigma}_{\lambda}\psi^{\tau}_{\mu\sigma} - \psi^{\sigma}_{\mu}\,\psi^{\tau}_{\lambda\sigma} \tag{1.5}$$

(torsion d'une structure presque complexe).

2. En conservant les notations du n° 1 supposons que sur une variété V^n de dimension paire $(n = 2r)$ soit donné un tenseur $(\overline{\psi}^{\varkappa}_{\lambda})$ vérifiant la relation

$$\overline{\psi}^{\varkappa}_{\lambda}\overline{\psi}^{\lambda}_{\mu} = A\delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{2.1}$$

où A désigne une fonction de classe C^1 d'un point $x \in V^n$. Ce tenseur joue un rôle utile dans la théorie de l'espace électromagnétique développée par R. Debever, P. Libois et J. Géheniau (voir [1]); si $A = 1$, il caractérise la structure de l'espace appelé par K. Yano „almost product space" (voir [6]).

Posons

$$\overline{\psi}^{\varkappa}_{\lambda} = i\sqrt{A}\,\psi^{\varkappa}_{\lambda}; \tag{2.2}$$

en portant ces expressions dans l'équation (2.1) on trouve

$$\psi^{\varkappa}_{\lambda}\psi^{\lambda}_{\mu} = -\delta^{\varkappa}_{\mu};$$

on voit donc que le tenseur auxiliaire est presque complexe. Portons maintenant les expressions

$$\psi^{\varkappa}_{\lambda} = -iA^{-\frac{1}{2}}\psi^{\varkappa}_{\lambda},$$

déduites des équations (2.2) dans la formule (1.5) qui détermine la torsion $T^{\tau}_{\lambda\mu}$ du tenseur $(\psi^{\varkappa}_{\lambda})$; en tenant compte de l'équation (2.1) on obtient la relation

$$\overline{T}^{\tau}_{\lambda\mu} = -AT^{\tau}_{\lambda\mu} + (\overline{\psi}^{\sigma}_{\lambda}\overline{\psi}^{\tau}_{\mu} - \overline{\varphi}^{\sigma}_{\mu}\overline{\varphi}^{\tau}_{\lambda})\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial x^{\sigma}} - \delta^{\tau}_{\lambda}\frac{\partial A}{\partial x^{\mu}} + \delta^{\tau}_{\mu}\frac{\partial A}{\partial x^{\lambda}}, \tag{2.3}$$

où $\bar{T}^{\tau}_{\lambda\mu}$ est donné par la formule

$$\bar{T}^{\tau}_{\lambda\mu} = \bar{\psi}^{\sigma}_{\lambda}\bar{\psi}^{\tau}_{\mu\sigma} - \bar{\psi}^{\sigma}_{\mu}\psi^{\tau}_{\lambda\sigma} \tag{2.4}$$

et les $\bar{\psi}^{\tau}_{\mu\sigma}$ sont définis par des équations analogues aux équations (1.2). On voit sur la formule (2.3) que $(\bar{T}^{\tau}_{\lambda\mu})$ est un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant et que l'on a $\bar{T}^{\varkappa}_{\mu\lambda} = -\bar{T}^{\tau}_{\lambda\mu}$. On a ainsi trouvé un comitant différentiel du premier ordre du tenseur mixte $(\bar{\psi}^{\varkappa}_{\lambda})$ satisfaisant à la relation (2.1).

Remarquons que le comitant $\bar{T}^{\tau}_{\lambda\mu}$ peut être obtenu par la même méthode dont nous nous sommes servi au 1°; il faut partir pour ce but de la forme

$$\omega = \bar{\psi}^{\varkappa}_{\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}}\, dx^{\sigma}$$

et de sa différentielle extérieure.

3. Nous revenons au cas du tenseur presque complexe $(\psi^{\varkappa}_{\lambda})$ de classe C^2; nous supposons donc que la dimension de la variété V^n soit un nombre paire $(n = 2r)$ et que les coordonnées $\psi^{\varkappa}_{\lambda}$ vérifient les relations $\psi^{\varkappa}_{\lambda}\psi^{\lambda}_{\mu} = -\delta^{\varkappa}_{\mu}$. Son comitant différentiel du premier ordre $T^{\tau}_{\lambda\mu} = -T^{\tau}_{\mu\lambda}$ (torsion) est donné par la formule (1.5). Pour trouver un comitant différentiel du second ordre nous allons partir de trois formes différentielles extérieures.

1° Considérons d'abord la forme différentielle extérieure du second degré

$$\Omega = \tfrac{1}{2} T^{\beta}_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}}\, dx^{\varrho}\Lambda dx^{\sigma},$$

où f désigne une fonction arbitraire de classe C^2 définie dans un voisinage d'un point $x \in V^n$. En différentiant extérieurement la forme Ω on trouve

$$d\Omega = \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\tau} T^{\beta}_{\varrho\sigma}\frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} + T^{\beta}_{\varrho\sigma}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\tau}\partial x^{\beta}}\right) dx^{\varrho}\Lambda dx^{\sigma}\Lambda dx^{\tau} \qquad \left(\partial_{\tau} = \frac{\partial}{\partial x^{\tau}}\right).$$

Si l'on pose

$$U^{\beta}_{\varrho\sigma\tau} = \partial_{\varrho} T^{\beta}_{\sigma\tau} + \partial_{\sigma} T^{\beta}_{\tau\varrho} + \partial_{\tau} T^{\beta}_{\varrho\sigma}, \tag{3.1}$$

la dernière formule peut être présentée sous la forme

$$d\Omega = \tfrac{1}{3}(U^{\beta}_{\varrho\sigma\tau} + A_2)\, dx^{\varrho}\Lambda dx^{\sigma}\Lambda dx^{\tau},$$

où A_2 désigne une expression linéaire et homogène par rapport aux secondes dérivées de la fonction f. Au moyen de la fonction (3.1) et du tenseur $(\psi^{\varkappa}_{\lambda})$ nous formons maintenant l'objet géométrique

$$W^{\beta}_{1,\varrho\sigma\tau} = 3!\,\psi^{\alpha}_{[\varrho} U^{\beta}_{|\alpha|\sigma\tau]} \ (^2). \tag{3.2}$$

(2) Le symbole $[\varrho|\alpha|\sigma\tau]$ désigne, comme d'habitude, l'alternation de trois indices ϱ, σ, τ.

2° Prenons de suite la forme différentielle linéaire

$$\omega = \psi^{\beta}_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} dx^{\sigma}$$

et sa différentielle extérieure qui peut s'écrire de la manière suivante

$$d\omega = \left(- \tfrac{1}{2} \psi^{\beta}_{\varrho\sigma} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} + B_2 \right) dx^{\varrho} \Lambda \, dx^{\sigma},$$

les $\psi^{\beta}_{\varrho\sigma}$ étant définis par les formules (1.2) et B_2 désignant une expression linéaire et homogène par rapport aux secondes dérivées de la fonction f. Au moyen des grandeurs $\psi^{\beta}_{\varrho\sigma}$ et de la torsion $T^{\alpha}_{\sigma\tau}$ on construit l'expression suivante

$$W^{\beta}_{2,\varrho\sigma\tau} = 3! \psi^{\beta}_{\alpha[\varrho} T^{\alpha}_{\sigma\tau]} . \tag{3.3}$$

3° Considérons enfin la forme différentielle extérieure du seconde degré

$$\Omega_1 = T^{\beta}_{\alpha\sigma} \psi^{\alpha}_{\tau} \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} dx^{\sigma} \Lambda \, dx^{\tau}$$

et sa différentielle extérieure

$$d\Omega_1 = \frac{1}{3!} \left(\partial_{[\varrho} (T^{\beta}_{|\alpha|\sigma} \psi^{\alpha}_{\tau]}) \frac{\partial f}{\partial x^{\beta}} + C_2 \right) dx^{\varrho} \Lambda \, dx^{\sigma} \Lambda \, dx^{\tau},$$

où C_2 désigne une forme linéaire par rapport aux dérivées partielles du second ordre de la fonction f. Posons

$$W^{\beta}_{3,\varrho\sigma\tau} = 3! \, \partial_{[\varrho} T^{\beta}_{\alpha\sigma} \psi^{\alpha}_{\tau]} . \tag{3.4}$$

Les grandeurs (3.2), (3.3) et (3.4) sont des objets géométriques de valence quatre, antisymétriques tous les trois en leurs indices inférieurs ϱ, σ, τ. Ils ne sont pas des tenseurs, néanmoins leur somme que nous désignerons par $T^{\beta}_{\varrho\sigma\tau}$ est un tenseur dépendant des coordonnées $\psi^{\varkappa}_{\alpha}$ et de leurs dérivées partielles de deux premiers ordres. Il est donc un comitant différentiel du second ordre du tenseur presque complexe $(\psi^{\varkappa}_{\lambda})$; nous lui donnons le nom de *seconde torsion* de ce tenseur. Le caractère tensoriel de $T^{\beta}_{\varrho\sigma\tau}$ peut être vérifié, si l'on assujettit les grandeurs $W^{\beta}_{1,\varrho\sigma\tau}$, $W^{\beta}_{2,\varrho\sigma\tau}$ et $W^{\beta}_{3,\varrho\sigma\tau}$ à une transformation arbitraire de coordonnées $x^{\varkappa}$ et que l'on tient compte des équations

$$\psi^{\varkappa}_{\lambda} \psi^{\lambda}_{\mu} = \delta^{\varkappa}_{\mu}$$

et des relations

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha}_{\varrho} T^{\beta}_{\sigma\alpha} + \psi^{\alpha}_{\sigma} T^{\beta}_{\varrho\alpha} &= 0, \\ \psi^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha}_{\varrho\sigma} + \psi^{\alpha}_{\varrho} T^{\beta}_{\alpha\sigma} &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

trouvées par A. Fröhlicher ([3], p. 74).

D'après ce qui précède l'expression explicite de la seconde torsion du tenseur presque complexe s'obtient en sommant les grandeurs (3.2), (3.3) et (3.4); on trouve ainsi la formule suivante

$$(3.6)\qquad T^{\beta}_{\varrho\sigma\tau} = 2(\psi^{a}_{\varrho}\partial_{a}T^{\beta}_{\sigma\tau} + \psi^{a}_{\sigma}\partial_{a}T^{\beta}_{\tau\varrho} + \psi^{a}_{\tau}\partial_{a}T^{\beta}_{\varrho\sigma}) + 3!\psi^{a}_{[\varrho}\partial_{\sigma}T^{\beta}_{\tau]a} + \\ + 2(\psi^{\beta}_{a\varrho}T^{a}_{\sigma\tau} + \psi^{\beta}_{a\sigma}T^{a}_{\tau\varrho} + \psi^{\beta}_{a\tau}T^{a}_{\varrho\sigma}) + \psi^{a}_{\varrho\sigma}T^{\beta}_{a\tau} + \psi^{a}_{\sigma\tau}T^{\beta}_{a\varrho} + \psi^{a}_{\tau\varrho}T^{\beta}_{a\sigma}.$$

Remarque 1. La méthode qui nous a conduit à obtenir la seconde torsion pourrait être appliquée pour trouver des comitants différentiels d'ordres supérieurs et pour résoudre le problème de l'équivalence de deux tenseurs presque complexes, mais il est visible que ceci exigerait des calculs un peu fastidieux; nous reviendrons à ce problème en un autre travail.

Remarque 2. En se servant de la notion de dérivée tensorielle A. G. Walker a trouvé un comitant différentiel de valence cinq et d'ordre deux qui'l appelle seconde torsion du tenseur presque complexe (voir [5]); le tenseur $T^{\beta}_{\varrho\sigma\tau}$ étant aussi d'ordre deux et de valence quatre il me semble qu'il est plus convenable de lui donner le nom de seconde torsion.

TRAVAUX CITÉS

[1] R. Debever, *Les espaces de l'électromagnétisme*, Colloque de Géométrie Différentielle, Louvain 1951, p. 217-233.

[2] B. Eckmann et A. Fröhlicher, *Sur l'intégrabilité des structures presque complexes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 232 (1951). p. 2284-2286.

[3] A. Fröhlicher, *Zur Differentialgeometrie der komplexen Structuren*, Mathematische Annalen 129 (1955), p. 50-95.

[4] A. Nijenhuis, *X_{n-1}-forming sets of eigenvectors*, Indagationes Mathematicae 13 (1951), p. 202-212.

[5] A. G. Walker, *Dérivation tensorielle et seconde courbure pour une structure presque complexe*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 245 (1957), p. 1213-1215.

[6] K. Yano, *On Walker differentiation in almost product or almost complex spaces*, Indagationes Mathematicae 20 (1958), p. 573-580.

Reçu par la Rédaction le 13. 6. 1964

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1964 FASC. 1

SELF-CIRCUMFERENCE OF CONVEX SETS

BY

B. GRÜNBAUM (JERUSALEM)

Let K be a convex body (i. e., compact convex set with non-empty interior) in the plane, and let $z \in \operatorname{int} K$; a norm (non-symmetric, in general) is defined by the Minkowski functional

$$||x||_{K,z} = \inf\{\lambda > 0 \mid x - z \in \lambda(K - z)\}.$$

Using the (non-symmetric) distance derived from this norm it is possible to define arc-length for oriented arcs (see, e. g., Gołąb [2]). For an oriented closed curve C let the length of C in the metric derived from $|| \ ||_{K,z}$ be denoted by $L_{K,z}(C)$; the "self-circumference" of K is

$$L(K) = \inf\{L_{K,z}(bdK) \mid z \in \operatorname{int} K\},$$

where bdK is taken in either of the two possible orientations.

Gołąb [2] proved that $L(K) = 9$ if K is a triangle and conjectured that $L(K) \leqslant 9$ for every K; he proved $L(K) \leqslant 24$, and stated that by complicated arguments he is able to prove $L(K) \leqslant 18$. Gołąb's conjecture was recently mentioned by Hammer [3]. It is the aim of the present paper* to establish Gołąb's conjecture.

THEOREM. $L(K) \leqslant 9$ *for every convex body K in the plane.*

In the proof of the theorem we shall use the following

LEMMA. *For every planar convex body K there exists an affine-regular hexagon circumscribed about K.*

The lemma seems to be well known; the author first heard it from L. Danzer some years ago. However, no proof seems to exist in the literature. This is rather remarkable, since the analogous statement about inscribed hexagons is wellknown (see, e. g., [1], p. 102) and the two facts seem to be similarly usable in different extremal problems (see, e. g., [4]).

* The research reported in this paper has been sponsored in part by the Air Force Office of Scientific Research, OAR, under Grant AF EOAR 63-63 with the European Office of Aerospace Research, United States Air Force.

The following is a sketch of the proof of the lemma given by Mrs. Y. Kovetz in her Thesis [4].

Using standard approximation and compactness arguments it is easily seen that K may be assumed to be smooth and rotund (strictly convex). In the notation indicated by Fig. 1 (where X_1 and X_2, Y_1 and Y_2, Z_1 and Z_2 are pairs of parallel supporting lines), easy continuity arguments show that

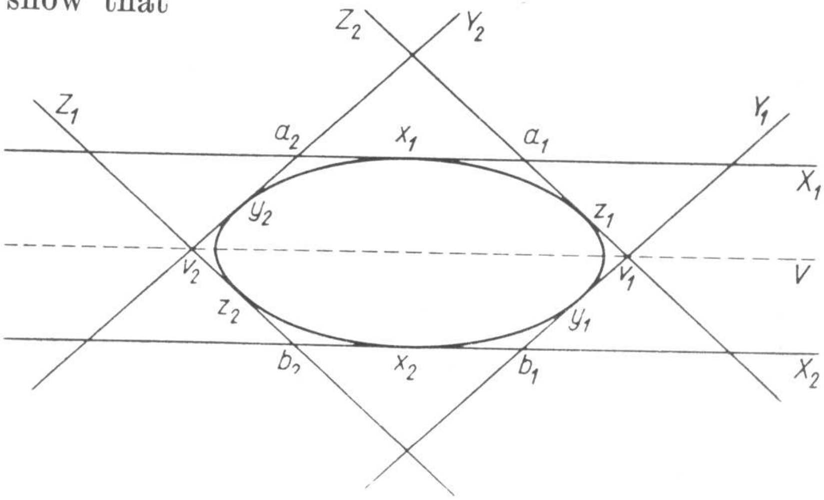

Fig. 1

(i) for any fixed x_1, y_1, there is a unique z_1 such that V is parallel to X_1;

(ii) for any fixed x_1, there is a unique y_1 (and a unique z_1 corresponding to x_1, y_1 by (i)) such that the length of the segment v_1v_2 equals to the sum of the lengths of a_1a_2 and b_1b_2;

(iii) there is at least one x_1 (with y_1, z_1 corresponding to it by (ii)) such that the length of a_1a_2 equals that of b_1b_2.

But then $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ determine an affine-regular hexagon circumscribed about K.

In order to prove the theorem we first remark that (see Gołąb [2]) for any $\| \ \|_{K,z}$, among all oriented arcs between two points, the (straight-line) segment has minimal lenght, and that if two closed convex curves have the same orientation and one encloses another, then the latter has a length not exceeding that of the first.

Let now H be an affine-regular hexagon circumscribed about K; without loss of generality we assume that the center of H is at the origin O. Obviously $O \in \operatorname{int} K$. Since $K \subset H$ we have $L(K) \leqslant L_{K,O}(bdK) \leqslant L_{K,O}(bdH)$. On each edge of $H^* = bdH$ we choose one point $p_i \in K$. Let P denote the convex hull of the points p_i; then $O \in \operatorname{int} P$. Since $P \subset K$, it follows that $L_{K,O}(H^*) \leqslant L_{P,O}(H^*)$. Therefore, the theorem shall be proved if we show that $L_{P,O}(H^*) \leqslant 9$ for any (possibly degenerate) hexagon P having a vertex on each edge of H^*.

Let $h_1, \ldots, h_6 = h_0$ be the vertices of H (see Fig. 2 for the notation). Then

$$L_{P,O}(H^*) = \sum_{i=1}^{6} \|h_i\|_{P,O}.$$

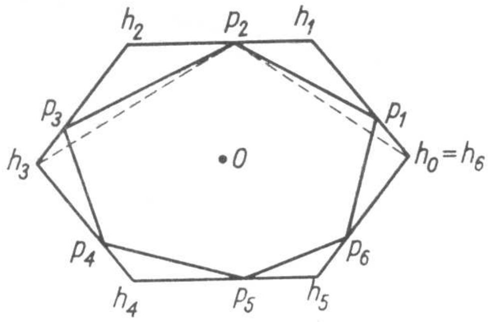

Fig. 2

We shall show that for any two consecutive vertices h_i, h_{i+1} $(0 \leqslant i \leqslant 5)$ the inequality $\|h_i\|_{P,O} + \|h_{i+1}\|_{P,O} \leqslant 3$ holds; clearly this implies $L_{P,O}(H^*) \leqslant 9$. Assuming, without loss of generality, $i = 1$ we have

$$\|h_1\|_{P,O} + \|h_2\|_{P,O} \leqslant \|h_1\|_{Q,O} + \|h_2\|_{Q,O}.$$

where Q is the convex hull of the set $\{h_0, p_2, h_3, p_4, p_5, p_5\}$. But an elementary computation shows that $\|h_1\|_{Q,O} + \|h_2\|_{Q,O} = 3$, independently of the position of p_2.

This completes the proof of the theorem.

Remark. Gołąb [2] (see also Hammer [3]) raised also the problem of the greatest lower bound of $L_{K,z}(bdK)$; he established $L_{K,z}(bdK) \geqslant 6$, and $L(K) \leqslant 8$, for every centrally symmetric K (these results, or weaker statements, have been rediscovered many times). Along with $L(K) \leqslant 9$, Gołąb conjectured that $L_{K,z}(bdK) \geqslant 6$ for every $z \in \operatorname{int} K$ and every convex body K. The last conjecture is still undecided.

REFERENCES

[1] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin 1953.

[2] S. Gołąb, *Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski*, Travaux de l'Académie des Mines à Cracovie 6 (1932) (in Polish with French Summary).

[3] P. C. Hammer, *Unsolved problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7 (1963), p. 498-499.

[4] Y. Kovetz, *Some extremal problems on convex bodies*, Thesis, Jerusalem 1962 (in Hebrew).

THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1964