COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLV 1981 FASC. 1

SEMIÉQUICONTINUITÉ APPROXIMATIVE ET MESURABILITÉ

PAR

ZBIGNIEW GRANDE (ELBLĄG)

Soit R l'espace des nombres réels. Les fonctions f_t: $R \to R$ ($t \in T$ et T désigne un ensemble d'indices) sont dites *approximativement semiéquicontinues supérieurement* au point $x_0 \in R$, lorsque, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble A mesurable (au sens de Lebesgue), de mesure positive et tel que $x_0 \in A$, x_0 est un point de densité de l'ensemble A et $f_t(x) - f_t(x_0) < \varepsilon$ pour tout $t \in T$ et $x \in A$.

Dans le travail [1] j'ai posé le problème suivant:

PROBLÈME 1 ([1], Problème 2). Une fonction f: $R \times R \to R$ telle que toutes les fonctions $f_x(y) = f(x, y)$ ($x, y \in R$) sont approximativement semiéquicontinues supérieurement et toutes les fonctions $f^y(x) = f(x, y)$ sont mesurables (au sens de Lebesgue) doit-elle être mesurable (au sens de Lebesgue)?

O'Malley m'a communiqué le problème suivant:

PROBLÈME 2. Une fonction f: $R \times R \to R$ telle que toutes les fonctions f_x et f^y ont la propriété de Darboux et sont de Baire* 1, doit-elle être mesurable? La fonction g: $R \to R$ est de *Baire* 1* [2] lorsque, quel que soit l'ensemble fermé $A \neq \emptyset$, il existe un intervalle ouvert U tel que $U \cap A \neq \emptyset$ et la fonction partielle $f | U \cap A$ est continue.

Dans cet article je donne une réponse négative aux problèmes 1 et 2.

THÉORÈME 1. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction f: $R \times R \to R$ non mesurable et telle que toutes les fonctions f_x soient approximativement semiéquicontinues supérieurement et toutes les fonctions f^y soient mesurables.*

Démonstration. Rangeons les nombres réels en une suite transfinie à termes différents

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots, \qquad \alpha < \Omega,$$

où Ω désigne le plus petit nombre ordinal indénombrable. Soient

$$A_\alpha = \{a_\beta : \beta < \alpha\} \text{ pour } \alpha < \Omega \quad \text{et} \quad A = \bigcup_{\alpha < \Omega} [\{a_\alpha\} \times (R - A_\alpha)].$$

Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } (x,y) \in A, \\ 1 & \text{lorsque } (x,y) \notin A. \end{cases}$$

Remarquons que $A_x = \{y \in R\colon (x,y) \in A\} = R - A_\alpha$, où $x = a_\alpha$, et que $A^y = \{x\colon (x,y) \in A\} = A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$, où $y = a_\alpha$. Il en résulte que toutes les fonctions f^y sont mesurables (vu que les ensembles $\{x\colon f^y(x) \neq 1\}$ sont dénombrables) et que la fonction f n'est pas mesurable.

Fixons encore le point $y_0 \in R$ et démontrons que les fonctions f_x sont approximativement semiéquicontinues supérieurement au point y_0. Il existe un nombre ordinal γ tel que $y_0 = a_\gamma$. On a, par conséquent, $f_x(y) = 0$ pour tout $x = a_\beta$, où $\beta \leqslant \gamma$, et pour tout $y \notin A_\gamma$, et $f_x(y_0) = 1$ pour tout $x = a_\alpha$, où $\alpha > \gamma$. Il en résulte que $f_x(y) - f_x(y_0) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ pour tout $x \in R$ et pour tout $y \in R - A_\gamma$. Comme, de plus, l'ensemble $R - A_\gamma$ est mesurable et sa densité est égale à 1 au point $y_0 \in R - A_\gamma$, notre démonstration est finie.

Théorème 2. *Il existe une fonction non mesurable $f\colon R \times R \to R$ telle que toutes les fonctions f_x et f^y soient de Baire* 1 et aient la propriété de Darboux.*

Démonstration. Soit $A \subset R$ un ensemble fermé, non dense et de mesure positive. Le complémentaire $R - A$ de l'ensemble A est la réunion de ses composantes (a_n, β_n), où $n = 1, 2, \ldots$ Il existe une fonction continue

$$g\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, \beta_n) \to (0, 1]$$

telle que

$$g\big((a_n, \beta_n)\big) = (0, 1] \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a_n^+} g(x) = \lim_{x \to \beta_n^-} g(x) = 0,$$

quel que soit $n = 1, 2, \ldots$ Soit

$$B \subset A - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{a_n\} \cup \{\beta_n\})$$

un ensemble fermé, non dense dans l'ensemble A et de mesure positive. Soit $C \subset R \times R$ un ensemble non mesurable telle que sa mesure intérieure et la mesure intérieure de son complémentaire soient égales à zéro et qui a au plus deux points communs avec toute droite [5]. Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } x \in R - A, \\ 0 & \text{lorsque } x \in A - B, \\ 0 & \text{lorsque } (x,y) \in (A \times A) - \big(C \cap (B \times B)\big), \\ 1 & \text{lorsque } (x,y) \in C \cap (B \times B), \\ g(y) & \text{lorsque } x \in B \text{ et } y \in R - A. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas mesurable vu que l'ensemble $\{(x, y) \in B \times B: f(x, y) = 1\}$ n'est pas mesurable et toutes les fonctions f_x et f^y ont la propriété de Darboux et sont de Baire* 1.

Cependant la remarque suivante résulte immédiatement du théorème 3 du travail [4]:

Remarque. Si la fonction $f: R \times R \to R$ est telle que toutes les fonctions f_x ont la propriété de Darboux, sont de Baire* 1 et sont continues presque partout [ont la propriété de Darboux et sont de Baire* 1] et toutes les fonctions f^y sont mesurables [ont la propriété de Baire], la fonction f est mesurable [a la propriété de Baire].

PROBLÈME. Soit T la plus faible topologie pour laquelle toutes les fonctions approximativement différentiables sont continues [3]. La fonction $f: R \times R \to R$ telle que toutes les fonctions f_x sont r-continues (continues pour la topologie T) et toutes les fonctions f^y sont mesurables, doit-elle être mesurable? (**P 1232**)

TRAVAUX CITÉS

[1] Z. Grande, *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition* $F(x, f(x))$, Dissertationes Mathematicae 159 (1978).

[2] R. O'Malley, *Baire* 1, Darboux functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 60 (1976), p. 187-192.

[3] — *Approximately differentiable functions: The r topology*, Pacific Journal of Mathematics 72 (1977), p. 207-222.

[4] E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 25 (1952), p. 145-154.

[5] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 112-115.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
ECOLE POLYTECHNIQUE DE GDAŃSK

Reçu par la Rédaction le 21. 2. 1978;
en version modifiée le 23. 2. 1979