COLLOQUIUM MATHEMATICUM

LI DÉDIÉ À M. STANISŁAW HARTMAN 1987

PERTURBATIONS DE SUITES PRESQUE-PÉRIODIQUES DE NOMBRES RÉELS ET MESURES ÉTRANGES SUR LA DROITE

PAR

J. F. MÉLA (PARIS–VILLETANEUSE)

À MON MAÎTRE ET AMI INCOMPARABLE S. HARTMAN

1. Introduction. Je voudrais parler ici d'un problème "naïf" dont je ne connais pas la solution complète et qui soulève des questions intéressantes. On utilisera les notations et propriétés classiques d'analyse de Fourier qu'on peut trouver dans [5], chapitre 1 et 2.

Dans tout ce travail les suites de nombres réels $(a_n)_{n\in Z}$ que l'on considère sont supposées croissantes et telles que

$$\inf_{n\in Z}(a_{n+1}-a_n) = l > 0.$$

Le problème général dont on part est le suivant: que peut-on dire des suites (a_n) telles que pour tout α, $0<\alpha<l/2$, il existe une mesure $\mu\in M(\boldsymbol{R})$ dont la transformée de Fourier vérifie

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} \hat{\mu}(x) &= 1 \quad \text{si } a_{2n-1}\leqslant x\leqslant a_{2n}-\alpha \quad (n\in \boldsymbol{Z}),\\ \hat{\mu}(x) &= 0 \quad \text{si } a_{2n}\leqslant x\leqslant a_{2n+1}-\alpha \quad (n\in \boldsymbol{Z}).\end{aligned}$$

Dans la suite on dira que (a_n) a la *propriété* (A).

Pour chaque valeur de α, on a une mesure dont la transformée de Fourier est à valeurs 0, 1 sur la droite en dehors de petits intervalles $]a_n-\alpha,\ a_n[$ et dont le profil rappelle celui d'une mesure idempotente sur le cercle. Que peut-on dire de telles mesures?

Remarques. 1. La propriété (1.1) peut être réalisée avec $0\leqslant\hat{\mu}\leqslant 1$ quitte à remplacer μ par $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\mu*\tilde{\mu})\right)$ dont la transformée de Fourier est $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}|\hat{\mu}|^2\right)$.

2. La propriété (1.1) ne fait pas jouer de rôle spécial aux points d'indice pair ou impair (remplacer μ par $\delta-\mu$). L'existence d'une mesure ayant la

propriété (1.1) ne dépend pas des modifications éventuelles d'un nombre fini de points de la suite, puisqu'on peut toujours corriger $\hat{\mu}$ sur un intervalle fini par addition d'une mesure absolument continue. La propriété (A) est donc une propriété asymptotique de la suite.

Il est naturel d'introduire en même temps que la propriété (A), la propriété (A′) voisine où l'on suppose seulement pour tout α, $0 < \alpha < l/2$, et pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, l'existence d'une mesure $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ telle que

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &|\hat{\mu}(x)-1| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } a_{2n-1} \leqslant x \leqslant a_{2n}-\alpha \quad (n \in \boldsymbol{Z}),\\ &|\hat{\mu}(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } a_{2n} \leqslant x \leqslant a_{2n+1}-\alpha \quad (n \in \boldsymbol{Z}). \end{aligned}$$

Les remarques précédentes restent valables.

2. Exemple: suites presque-périodiques. Une suite $(a_n)_{n\in \boldsymbol{Z}}$ sera dite *presque-périodique* (ce n'est pas la définition la plus usuelle!) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon)$ tel que, dans tout intervalle de longueur $\geqslant l(\varepsilon)$, on peut trouver une "ε-presque-période" de la suite, c'est à dire un nombre ξ pour lequel

$$|a_n+\xi-a_{n+p}| \leqslant \varepsilon \quad (n \in \boldsymbol{Z})$$

pour un certain entier p indépendant de n. Il n'est pas difficile de donner des exemples de telles suites ($a_n = n + a\cos\theta n$ où θ, a sont des nombres réels avec $|a| < 1/2$).

On remarque que, dans la définition, on peut imposer que p soit pair (quitte à remplacer ξ par 2ξ et ε par 2ε) et donc que n et $n+p$ soient de même parité. Il est facile de construire pour tout $\alpha > 0$, une mesure discrète ayant la propriété (1.1). Donnons nous une fonction ϕ continue à support dans $[0, \alpha]$ et d'intégrale 1. On peut vérifier que la fonction

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{a_{2n-1}}^{a_{2n}} \phi(t-x)\,dt$$

est presque-périodique continue et telle que

$$\begin{aligned} &f(x) = 1 \quad \text{si } a_{2n-1} \leqslant x \leqslant a_{2n}-\alpha,\\ &f(x) = 0 \quad \text{si } a_{2n} \leqslant x \leqslant a_{2n+1}-\alpha. \end{aligned}$$

Alors f est prolongeable en une fonction continue sur le compactifié de Bohr de $\boldsymbol{R}$ qui s'identifie au dual de $\boldsymbol{R}_d$ ($\boldsymbol{R}$ avec la topologie discrète). On peut utiliser un argument classique de régularisation (cf. [5], p. 49) pour construire une mesure $\mu \in M_d(\boldsymbol{R}) = L^1(\boldsymbol{R}_d)$ dont la transformée de Fourier aura les propriétés requises (avec 2α au lieu de α). Ainsi toute suite presque-périodique a la propriété (A).

Inversement, on peut remarquer que si la propriété (1.1) peut être réalisée pour tout $\alpha > 0$ à l'aide d'une mesure discrète, alors la suite (a_n) est presque-périodique. En effet soit μ une mesure discrète ayant la propriété (1.1) pour un certain α. Il est à peut près clair que si ξ est une ε-presque-période de la fonction $\hat{\mu}(x)$ avec $\varepsilon < 1/2$, ξ est une α-presque-période de la suite (a_n). Nous passons sur les détails.

Pour que (a_n) soit presque-périodique, il suffit d'ailleurs que (1.2) puisse être réalisée par une mesure discrète pour tout $\alpha > 0$ et pour au moins un $\varepsilon < 1/2$. En effet ceci prouve alors que les ensembles $\bigcup_n [a_{2n-1}, a_{2n}-\alpha]$ et $\bigcup_n [a_{2n}, a_{2n+1}-\alpha]$ sont d'adhérences disjointes dans le compactifié de Bohr de $\boldsymbol{R}$ et on peut construire comme précédemment par régularisation une mesure discrète ayant la propriété (1.1).

En conclusion: Les propriétés (A) et (A′) sont équivalentes en mesures discrètes (on verra que ce n'est pas le cas en général). Toute suite presque-périodique (a_n) a la propriété (A). Il en est de même de toute suite (a'_n) telle que $\lim(a_n - a'_n) = 0$. Y en a t'il d'autres? Cette question est étudiée dans la suite mais reste ouverte.

(2.1) Remarque. On peut donner des exemples de suites (a_n) qui ont la propriété (A′) et qui sont très lacunaires. C'est le cas notamment si $a_{2n} = a_{2n-1}+1$ est une suite de Sidon (cf. [2]). Mais nous nous intéresserons ici surtout à celles qui sont relativement denses (i.e. $\sup(a_{n+1}-a_n) < +\infty$).

3. Le cas général. Considérons une suite (a_n) et une mesure μ satisfaisant (1.1) pour une valeur fixée de α. On suppose $0 \leqslant \hat{\mu} \leqslant 1$. On associe à μ la mesure ν dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\mu}(x+\alpha)e^{i\pi\hat{\mu}(x)} + \big(1-\hat{\mu}(x+\alpha)\big)e^{-i\pi\hat{\mu}(x)}. \tag{3.1}$$

On vérifie immédiatement que, pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$,

$$\hat{\nu}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } a_{2n-1} \leqslant x \leqslant a_{2n}-\alpha, \\ 1 & \text{si } a_{2n} \leqslant x \leqslant a_{2n+1}-\alpha, \\ e^{-i\pi\hat{\mu}(x)} & \text{si } a_{2n}-\alpha \leqslant x \leqslant a_{2n}, \\ e^{i\pi\hat{\mu}(x)} & \text{si } a_{2n+1}-\alpha \leqslant x \leqslant a_{2n+1}. \end{cases}$$

En particulier $|\hat{\nu}(x)| = 1$ pour tout x, ce qui assure que ν est inversible dans l'algèbre de convolution $M(\boldsymbol{R})$ (et a pour inverse $\bar{\nu}$). D'après la forme générale des mesures inversibles de $M(\boldsymbol{R})$, établie dans [6], p. 81, on peut écrire

$$\operatorname{Log}\hat{\nu}(x) = ic\big(x+\hat{\omega}(x)\big) + k\operatorname{Log}\frac{1+ix}{1-ix} \tag{3.2}$$

(pour une détermination continue du logarithme) avec $\omega \in M(\boldsymbol{R})$, c réel et k entier. Le nombre c est déterminé (de façon unique) par la condition que

$\operatorname{Log}\hat{v}(x)-icx$ reste bornée dans $\boldsymbol{R}$. Si on se reporte aux valeurs de $\hat{v}(x)$ on vérifie que (à une constante près)

$$\operatorname{Log}\hat{v}(x) = i\pi n \quad \text{si } a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}-\alpha.$$

On a donc nécessairement

$$\pi n - ca_n = O(1)$$

ou encore, en posant $\theta = \pi/c$,

$$\theta n - a_n = O(1). \tag{3.3}$$

La propriété (3.3) peut être précisée. Les moyennes de $\operatorname{Log}\hat{v}(x)-icx$ sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\boldsymbol{R}^-$ diffèrent de $2k\pi i$ où k est l'entier qui intervient dans l'écriture (3.2). On peut se ramener à $k = 0$ en supprimant $2k$ points de la suite a_n si $k > 0$ ou en rajoutant $-2k$ points si $k < 0$ (et en renumérotant la suite à droite). On modifiera en conséquence $\hat{\mu}$ et $\hat{v}$ sur un intervalle fini. Cette modification a pour effet de retrancher $2k\pi i$ à $\operatorname{Log}\hat{v}(x)$ à droite de l'intervalle. Le nombre c reste le même et les moyennes de $\operatorname{Log}\hat{v}(x)-icx$ sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\boldsymbol{R}^-$ sont alors égales. Dans ces conditions on peut écrire

$$\operatorname{Log}\hat{v}(x) = ic\big(x+\hat{\omega}(x)\big)$$

et pour tout $n\in\boldsymbol{Z}$

$$\begin{aligned} i\pi n &= ic\big(x+\hat{\omega}(x)\big) && \text{si } a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}-\alpha, \\ \theta n &= x+\hat{\omega}(x) && \text{si } a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}-\alpha. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En particulier a_n est solution de l'équation

$$\theta n = a_n + \hat{\omega}(a_n) \quad (n\in\boldsymbol{Z}). \tag{3.5}$$

THÉORÈME 1. *Soit $(a_n)_{n\in\boldsymbol{Z}}$ une suite de réels pour laquelle il existe une mesure $\mu\in M(\boldsymbol{R})$ ayant la propriété* (1.1) *pour un certain $\alpha > 0$. Alors quitte à supprimer ou à rajouter un nombre fini de termes à la suite* (*et après renumérotation*) *on peut écrire*

$$\theta n = a_n + \hat{\omega}(a_n) \quad (n\in\boldsymbol{Z}) \tag{3.6}$$

où θ est un nombre réel positif (*ne dépendant que de la suite*) *et ω une mesure telle que*

$$\begin{aligned} x+\hat{\omega}(x) &\geqslant \theta n && \text{si } x \geqslant a_n, \\ x+\hat{\omega}(x) &\leqslant \theta(n-1) && \text{si } x \leqslant a_n-\alpha. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Remarques.

(3.8) Les modifications que l'on fait subir à la suite (a_n) initiale pour avoir exactement l'énoncé du théorème, ne dépendent pas de α. En effet on peut aisément se convaincre que tout comme le réel c, l'entier k qui intervient dans l'écriture (3.2) ne dépend que de la suite. Seule la mesure ω dépend de la forme précise de ν. Cette remarque trouve son intérêt lorsque la suite (a_n) a la propriété (A).

(3.9) Toute suite (a_n) qui possède la propriété (A) est relativement dense. (On a vu que ce n'est pas le cas pour la propriété (A')). Toute mesure μ ayant la propriété (1.1) aura nécessairement une partie discrète non nulle car la moyenne de $\hat{\mu}$ sera non nulle.

(3.10) A partir d'une mesure ω ayant la propriété (3.7) on peut facilement reconstruire une mesure μ ayant la propriété (1.1). Il suffit de considérer $\sigma = \frac{1}{2}(\delta - \delta_c)$ qui est telle que $\hat{\sigma}(\theta n) = 0$ ou 1 suivant que n est pair ou impair, et de définir μ par

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\sigma}\big(x + \hat{\omega}(x)\big) \tag{3.11}$$

soit

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_c * e^{ic\omega}).$$

LEMME 1. *Soient σ, $\omega \in M(\boldsymbol{R})$ telles*

$$\int \|e^{ix\omega}\| \, d|\sigma|(x) < +\infty.$$

Alors la formule (3.11) *définit bien une transformée de Fourier–Stieltjes.*

Démonstration. On utilise le critère p. 32 de [5]. Pour tout polynôme trigonométrique $f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{-itx_j}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{\sigma}\big(x_j + \hat{\omega}(x_j)\big) = \int \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{itx_j} e^{it\hat{\omega}(x_j)}\Big) d\sigma(t)$$
$$= \int f_t(-t)\, d\sigma(t)$$

où l'on pose, pour tout $s \in \boldsymbol{R}$,

$$f_s(t) = (f * e^{is\omega})_{(t)} = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{is\hat{\omega}(x_j)} e^{-itx_j}.$$

De là

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{\sigma}\big(x_j + \hat{\omega}(x_j)\big)\Big| \leqslant \int \|f_t\|_\infty \, d|\sigma|(t)$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \int \|e^{it\omega}\| \, d|\sigma|(t).$$

LEMME 2. *On considère deux suites de nombres réels (a_n) et (a'_n) qui sont liées par la relation*

$$a'_n = a_n + \hat{\omega}(a_n) \qquad (n \in \boldsymbol{Z})$$

pour une certaine mesure $\omega \in M(\boldsymbol{R})$.

a) *On suppose que pour tout* $\alpha > 0$ *il existe* $\alpha' > 0$ *tel que*

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} x+\hat{\omega}(x) &\geqslant a'_n && \text{si } x \geqslant a_n, \\ x+\hat{\omega}(x) &\leqslant a'_n-\alpha' && \text{si } x \leqslant a_n-\alpha. \end{aligned}$$

Alors si la suite (a'_n) *a la propriété* (A′) *il en est de même de la suite* (a_n).

b) *On suppose de plus*

$$(3.13)\qquad \|e^{ix\omega}\| = O(e^{-\beta|x|^\gamma}) \qquad (|x| \to +\infty)$$

pour un certain $0 < \gamma < 1$ *et pour tout* $\beta > 0$. *Alors si la suite* (a'_n) *a la propriété* (A) *il en est de même de* (a_n).

Démonstration. Soient α et α' pour lesquels la propriété (3.12) est vraie. Considérons une mesure μ' qui a la propriété (1.2) relativement à la suite (a'_n) pour la valeur α' et un certain ε. La mesure μ est concentrée à ε près sur un compact; on peut donc supposer (quitte à remplacer ε par 2ε) qu'elle est à support compact. La mesure μ définie (lemme 1) par

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}'\big(x+\hat{\omega}(x)\big)$$

aura alors la propriété (1.2) relativement à la suite (a_n) pour la valeur α et le même ε. Ceci démontre (a).

Supposons maintenant que (a'_n) a la propriété (A) et partons d'une mesure μ' ayant la propriété (1.1) pour la valeur $\alpha'/2$. Pour tout $0 < \gamma < 1$ on peut trouver une fonction ϕ de la classe de Gevrey d'indice $1/\gamma$, à support dans $[0, \alpha'/2]$. Sa transformée de Fourier vérifie une condition

$$\hat{\phi}(x) = O(e^{-\beta|x|^\gamma}) \qquad (|x| \to +\infty)$$

pour un β assez petit (cf. [1], p. 79). Prenons ϕ d'intégrale 1. La mesure $\mu'_1 = \hat{\phi}\cdot\mu'$ dont la transformée de Fourier est $\phi * \hat{\mu}'$ a la propriété (1.1) relativement à la suite (a'_n) pour la valeur α'. Si ω vérifie l'hypothèse (b) pour un certain γ on aura alors avec ce choix de γ

$$\int \|e^{ix\omega}\|\, d|\mu'_1(x)| < +\infty$$

et la mesure μ définie par

$$\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}'_1\big(x+\hat{\omega}(x)\big)$$

possèdera la propriété (1.1) relativement à la suite (a_n) pour la valeur α. Ceci termine la démonstration.

Remarques.

(3.14) Soit $\omega \in M(\boldsymbol{R})$ telle que

$$|\hat{\omega}(x)-\hat{\omega}(y)| \leqslant K|x-y| \qquad (x, y \in \boldsymbol{R})$$

avec $K < 1$. Alors la fonction $x+\hat{\omega}(x)$ est strictement croissante et l'hypothèse (a) du lemme 2 est toujours vérifiée. Ainsi, à partir des suites presque-périodiques, il n'est pas difficile de fabriquer par perturbation, des suites qui auront la propriété (A′) (cf. aussi théorème 2).

(3.15) La propriété (3.13) peut être réalisée par des mesures ω discrètes non triviales (cf. [1]). Mais si l'on part de (a'_n) presque-périodique, il en sera alors de même de (a_n) (la mesure μ' dans la démonstration peut être prise discrète et il en sera de même de μ). Pour avoir un exemple de suite ayant la propriété (A) mais qui ne soit pas asymptotiquement presque-périodique, il faudrait connaître une mesure ω continue singulière dont la transformée de Fourier ne tende pas vers 0 à l'infini et qui ait la propriété (3.13). Malheureusement l'existence d'une telle mesure reste problématique. (Il est facile de voir qu'elle aurait notamment son spectre de Gelfand réel[1].)

THÉORÈME 2. *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *la suite des coefficients de Fourier–Stieltjes d'une mesure sur le cercle. On suppose les coefficients réels et* $\overline{\lim}|c_n| < 1/2$. *Alors la suite* $a_n = n+c_n$ *possède la propriété* (A′).

Démonstration. Quitte à modifier les premiers termes on peut supposer que $|c_n| \leqslant a < 1/2$. On considère la mesure $\omega\in M(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\omega}(x) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \Delta(x-n)$$

où

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant a, \\ \dfrac{2|x|-1}{2a-1} & \text{si } a \leqslant |x| \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1/2. \end{cases}$$

Cette mesure vérifie l'hypothèse (a) du lemme 2 avec les suites $a'_n = n$ et a_n solution de

$$a_n+\hat{\omega}(a_n) = n \qquad (n\in\mathbf{Z}).$$

Comme $|a_n-n| \leqslant a$, on a $\hat{\omega}(a_n) = -c_n$.

(3.16) Exercice. Pour tout $0 < a < 1/2$ il existe une mesure ω telle que $\hat{\omega}(x) = n-x$ si $|n-x| \leqslant a$ $(n\in\mathbf{Z})$. Par conséquent toute suite a_n telle que $\overline{\lim}|a_n-n| < 1/2$ est solution de $a_n+\hat{\omega}(a_n) = n$ pour une mesure ω convenable; de sorte que cette dernière propriété ne signifie rien si l'on ne fait pas d'hypothèse sur ω. Dans le théorème 2 on a $a_n = n+\hat{\omega}(n)$ pour une certaine mesure ω, ce qui est tout différent. On peut montrer facilement qu'une suite $a_n = n+c_n$ ne peut pas avoir la propriété (A′) si c_n n'a pas de moyenne (cf. th. 3 bis).

(3.17) Exemple. Soit $0 < a \leqslant 1/2$. On sait qu'il existe une mesure de

[1] L'existence de telles mesures a été établie par F. Parreau (communication orale).

probabilité continue sur le cercle dont les coefficients de Fourier sont

$$c_n = a^{\sum|\varepsilon_j|} \quad \text{si } n = \sum \varepsilon_j 4^j \ (\varepsilon_j = 0, \pm 1),$$
$$c_n = 0 \quad \text{sinon}$$

(produit de Riesz construit sur la suite (4^j) cf. [1]). La suite $a_n = n + c_n$ possède la propriété (A′). Nous allons montrer qu'elle n'a pas la propriété (A).

On remarque que

$$a_n = n + a \quad \text{si } n = \pm 4^j,$$
$$|a_n - n| \leqslant a^2 \quad \text{sinon.}$$

Choisissons b et α positifs de façon que

$$a^2 < b - \alpha < b + \alpha < a$$

et considérons une mesure μ ayant la propriété (1.1) avec ce choix de α. Introduisons une mesure σ dont la transformée de Fourier est périodique et telle que

$$\hat{\sigma}(x) = 0 \quad \text{si } 2n - 1 - \alpha \leqslant x \leqslant 2n + b - \alpha,$$
$$\hat{\sigma}(x) = 1 \quad \text{si } 2n - b \leqslant x \leqslant 2n + 1 - 2\alpha$$

et soit $\tau = \mu * \sigma$. On vérifie sans peine que

$$\hat{\tau}(0) = 0 \quad \text{si } 4^{j-1} + a \leqslant x \leqslant 4^j + b - \alpha,$$
$$\hat{\tau}(x) = 1 \quad \text{si } 4^j + b \leqslant x \leqslant 4^j + a - \alpha.$$

La mesure τ possède la propriété (1.1) relativement à la suite

$$a'_{2j-1} = 4^j + b \ (j \geqslant 1), \quad a'_{2j-1} = -4^{|j|+1} + b \ (j \leqslant 0),$$
$$a'_{2j} = 4^j + a \ (j \geqslant 1), \quad a'_{2j} = -4^{|j|+1} + a \ (j \leqslant 0).$$

Ceci est impossible d'après le théorème 1, car les intervalles $[a_{2j}, a_{2j+1}]$ ne sont pas bornés.

4. Suites presque-périodiques associées. Etude des perturbations. Pour démontrer le théorème 3 nous utiliserons le résultat suivant plus ou moins classique (cf. [4]): La transformée de Fourier $\hat{\mu}_d$ de la partie discrète d'une mesure $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ est limite uniforme sur tout compact de translatées de $\hat{\mu}$. (Notons en particulier que $\hat{\mu}_d$ est réelle si $\hat{\mu}$ est réelle.)

THÉORÈME 3. *Soit* (a_n) *une suite de nombres réels ayant la propriété* (A). *Il existe une suite presque-périodique unique* (b_n) *telle que* (*quitte à supprimer ou ajouter un nombre fini de* a_n *et à renuméroter la suite*) *la moyenne de* $|a_n - b_n|$ *soit nulle* (*uniformément dans* $\boldsymbol{Z}$).

Démonstration. On supposera que la suite (a_n) a été préalablement modifiée de façon que l'énoncé du théorème 1 soit valable (pour tout α d'après la remarque (3.8)). Soit θ tel que $a_n - \theta n = O(1)$.

Partons d'une mesure μ ayant la propriété (1.1) pour un certain α. Etant donné la forme particulière de $\hat{\mu}$ et le fait que $a_{n+1} - a_n$ est bornée inférieurement et supérieurement, il n'est pas difficile de se convaincre que $\hat{\mu}_d$ aura la même propriété que $\hat{\mu}$ relativement à une suite (b_n) qui est limite simple de translatées de la suite (a_n), et pour le même nombre α. Nous passons sur les détails. On aura encore $b_n - \theta n = O(1)$ et par suite $a_n - b_n = O(1)$.

De façon plus précise, en faisant intervenir la mesure ω du théorème 1, il est possible de choisir

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_c * e^{ic\omega})$$

avec $c = \pi/\theta$ (remarque (3.10)). On aura alors

$$\mu_d = \tfrac{1}{2}(\delta - \delta_c * e^{ic\omega_d})$$

et la mesure du théorème 1 associé à μ_d n'est autre que ω_d. On peut numéroter les points de la suite (b_n) correspondante de façon que

$$\begin{aligned} x + \hat{\omega}_d(x) &\geqslant \theta n && \text{si } x \geqslant b_n, \\ x + \hat{\omega}_d(x) &\leqslant \theta(n-1) && \text{si } x \leqslant b_n - \alpha. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > \alpha$. Si pour un entier n, $b_n - a_n \geqslant \varepsilon$, on aura

$$\hat{\omega}_c(x) = \hat{\omega}(x) - \hat{\omega}_d(x) \geqslant \theta$$

sur l'intervalle $[a_n, b_n - \alpha]$ de longueur $\geqslant \varepsilon - \alpha$. De même si $a_n - b_n \geqslant \varepsilon$ on aura $\hat{\omega}_c(x) \leqslant -\theta$ sur l'intervalle $[b_n, a_n - \alpha]$ de longueur $\geqslant \varepsilon - \alpha$. La moyenne de $|\hat{\omega}_c(x)|$ étant nulle (uniformément dans $\boldsymbol{R}$) l'ensemble des entiers n pour lesquels $|a_n - b_n| \geqslant \varepsilon$ est de densité supérieure uniforme nulle.

La suite (b_n) dépend de la mesure μ considérée. Si l'on part d'une autre mesure ayant la propriété (1.1) avec le même α ou une valeur $\alpha' \leqslant \alpha$, on peut voir qu'on retombe sur la même suite b_n à 2α près. En effet, on remarque que $(\mu - \mu')\hat{}(x) = 0$ en dehors des intervalles $[a_n - \alpha, a_n]$ et par suite $(\mu_d - \mu'_d)\hat{}(x)$ comme limite de translatées a son support contenu dans une réunion d'intervalles de longueur α; les intervalles de zéros et les intervalles de uns de $\hat{\mu}_d$ et $\hat{\mu}'_d$ doivent donc coïncider à 2α près.

Dans le cas où (a_n) a la propriété (A) on voit bien en prenant des valeurs de α arbitrairement petites, qu'il y aura une suite limite uniforme (b_n) qui ne dépend que de (a_n). Si μ est une mesure quelconque ayant la propriété (1.1) pour une valeur de α, toute ε-presque-période de $\hat{\mu}_d$ avec $\varepsilon < 1/2$ sera une α-presque-période de toute suite correspondant à $\hat{\mu}_d$ et donc une 5α-presque-période de (b_n). Ceci prouve que (b_n) est presque-périodique. L'unicité tient simplement au fait que deux suites presque-périodiques b_n et b'_n telles que

$|b_n - b'_n|$ soit de moyenne nulle, sont nécessairement égales. Ceci termine la démonstration.

On ne peut espérer avoir l'énoncé précis du théorème 3 (ou un résultat du type $a_n - \theta n = O(1)$ pour une suite (a_n) ayant la propriété (A′), même si on la suppose relativement dense. Il n'est pas difficile, en effet, de montrer qu'on peut supprimer de la suite (a_n) une sous-suite lacunaire tout en conservant la propriété (A′) (cf. remarque (2.1)). Cependant dans le cas relativement dense l'argument du théorème 3 peut être repris et en raisonnant uniquement sur la mesure μ (on considère μ_c au lieu de ω_c) on obtient le résultat suivant. (Les détails sont laissés au lecteur.)

THÉORÈME 3 bis. *Soit (a_n) une suite de nombre réels relativement dense, ayant la propriété* (A′). *Il existe une suite presque-périodique unique (b_n) telle que la distance de a_n à la suite (b_n) a une moyenne nulle (uniformément dans $\mathbf{Z}$).*

(4.1) Remarque. La façon dont la suite (b_n) du théorème 3 ou 3 bis est construite à partir de (a_n) montre que

$$\inf(b_{n+1} - b_n) \geqslant \underline{\lim}\ (a_{n+1} - a_n),$$
$$\sup(b_{n+1} - b_n) \leqslant \overline{\lim}\,(a_{n+1} - a_n).$$

(On peut aussi le déduire de la conclusion du théorème 3 ou 3 bis.)

On peut généraliser l'argument de l'exemple (3.17) pour établir:

THÉORÈME 4 (avec l'hypothèse et les notations du théorème 3). *Soit $l = \underline{\lim}\ (a_{n+1} - a_n)$ et $d = \overline{\lim}\,|a_n - b_n|$. Supposons que $d < l/2$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $a_n - b_n$ est un intervalle.*

Démonstration. Supposons par exemple que pour $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < d$, l'intervalle $]b_n + \alpha_0, b_n + \alpha_1[$ ne contienne pas a_n dès que n est assez grand, mais qu'il existe une infinité de termes $a_n \geqslant b_n + \alpha_1$. Choisissons α tel que

$$0 < \alpha < \alpha_0 < \alpha_0 + \alpha < \alpha_1 - \alpha < \alpha_1 < d - \alpha$$

et considérons la mesure ω du théorème 1. Ou bien $a_n \geqslant b_n + \alpha_1$ auquel cas $\hat{\omega}_c(x) = -\theta$ si $b_n \leqslant x \leqslant a_n - \alpha$, en particulier sur l'intervalle $[b_n + \alpha_0, b_n + \alpha_1 - \alpha]$; ou bien $a_n \leqslant b_n + \alpha_0$ et $\hat{\omega}_c(x) = 0$ si $\sup\{a_n, b_n\} \leqslant x \leqslant b_n + d - \alpha$, en particulier sur l'intervalle $[b_n + \alpha_0, b_n + \alpha_1]$.

Par ailleurs on déduit aisément de la propriété (1.1) pour la suite (b_n) l'existence d'une mesure σ (discrète) telle que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\hat{\sigma}(x) = 1 \quad \text{si } b_n + \alpha_0 + \alpha \leqslant x \leqslant b_n + \alpha_1 - \alpha,$$
$$\hat{\sigma}(x) = 0 \quad \text{si } b_n + \alpha_1 \leqslant x \leqslant b_{n+1} + \alpha_0.$$

Soit n_k la suite des entiers pour lesquels $a_{n_k} \geqslant b_{n_k} + \alpha_1$. On vérifie que la mesure $-\frac{1}{\theta}\omega_c * \sigma$ a la propriété (1.1) relativement à la suite

$$a_{2k-1} = b_{n_k} + \alpha_0 + \alpha, \qquad a_{2k} = b_{n_k} + \alpha_1.$$

Ceci est impossible d'après le théorème 1, car la suite b_{n_k} est de densité nulle (théorème 3).

5. Une propriété générale des mesures continues. Applications. Soient $E \subset F$ deux parties de $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{Z}$. Nous dirons que E est *relativement dense dans* F s'il existe $T > 0$ tel que $F \subset E + [-T, T]$.

THÉORÈME 5. *Soit* $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ (*resp.* $M(\boldsymbol{T})$). *Soit* $\varepsilon \leqslant (1+\sqrt{2})^{-(\|\mu\|+1)}$. *Si l'ensemble où* $|\hat{\mu}(x)| \geqslant 1-\varepsilon$ *est relativement dense dans l'ensemble où* $|\hat{\mu}(x)| \geqslant \varepsilon$, *alors ou bien il est compact* (*resp. fini*), *ou bien il est relativement dense dans* $\boldsymbol{R}$ (*resp.* $\boldsymbol{Z}$) (*et dans ce cas* μ *ne peut être purement continue*).

Démonstration. C'est la même pour la droite ou le cercle. Prenons $\boldsymbol{R}$ pour fixer les idées. On introduit $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ adhérence des caractères de $\boldsymbol{R}$ dans la boule unité de $L^{\infty}(\mu)$ pour la topologie $*$ faible de dual de $L^1(\mu)$. Pour concilier la multiplication des fonctions avec la notation additive usuelle de $\boldsymbol{R}$ nous distinguerons un nombre réel x et le caractère γ_x défini par $\gamma_x(t) = e^{ixt}$. Nous utiliserons seulement les propriétés suivantes de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$, faciles à établir, que nous nous contenterons de citer, renvoyant à [4] pour plus de détails : $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ est un compact métrisable et l'application $x \mapsto \gamma_x$ de $\boldsymbol{R}$ dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ est continue. $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ est un semi-groupe multiplicatif stable pour la conjugaison des fonctions. Le produit est séparément continu. Il résulte de là notamment que si γ_{x_j} est une suite de caractères convergeant dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ vers un élément χ, alors γ_{-x_j} converge vers $\bar{\chi}$ et, en remplaçant x_j par une sous-suite, on peut faire en sorte que $\gamma_{x_j - x_{j-1}} = \gamma_{x_j}\bar{\gamma}_{x_{j-1}}$ converge vers $|\chi|^2$.

Supposons que la conclusion du théorème soit en défaut. On pourrait trouver des intervalles disjoints arbitrairement grands $]a_j, b_j[$ sur lesquels $|\hat{\mu}(x)| < \varepsilon$, séparés par des points où $|\hat{\mu}(x)| \geqslant 1-\varepsilon$. On peut supposer par exemple que $\lim a_j = +\infty$ et que les intervalles ont été choisis maximaux; c'est à dire notamment que $|\hat{\mu}(b_j)| \geqslant \varepsilon$. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer

$$a_j < b_j - 2b_{j-1}$$

ce qui assure que, quel que soit $x \in \boldsymbol{R}$, on aura

$$a_j < b_j - b_{j-1} + x < b_j \tag{5.1}$$

dès que j sera assez grand. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer aussi que γ_{b_j} converge dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ vers un élément χ et que $\gamma_{b_j - b_{j-1}}$ converge vers $|\chi|^2$. On aura donc, quel que soit $x \in \boldsymbol{R}$,

$$\int |\chi|^2 \gamma_x \, d\mu = \lim \int \gamma_{b_j - b_{j-1}} \gamma_x \, d\mu = \lim \hat{\mu}(b_j - b_{j-1} + x)$$

et il résulte de (5.1) que

$$\left| \int |\chi|^2 \gamma_x \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon \qquad (x \in \boldsymbol{R}). \tag{5.2}$$

D'autre part, comme $\hat{\mu}(b_j) \geqslant \varepsilon$, on pourra, par hypothèse, trouver $t_j \in [-T, T]$ tel que $\hat{\mu}(b_j + t_j) \geqslant 1 - \varepsilon$ où T est un nombre indépendant de j. Quitte à passer à une sous-suite, on peut admettre que t_j converge vers t pour la topologie usuelle de $\boldsymbol{R}$; a fortiori γ_{t_j} converge vers γ_t dans $L^1(\mu)$. Comme

$$\left|\int \chi\gamma_t \, d\mu - \int \gamma_{b_j} \gamma_{t_j} \, d\mu\right| \leqslant \left|\int \chi\gamma_t \, d\mu - \int \gamma_{b_j} \gamma_t \, d\mu\right| + \int |\gamma_t - \gamma_{t_j}| \, d|\mu|,$$

$$\left|\int \chi\gamma_t \, d\mu\right| \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{5.3}$$

L'élément $\phi = \chi\gamma_t$ de $L^\infty(\mu)$ est donc tel que

$$\left|\int \phi \, d\mu\right| \geqslant 1 - \varepsilon \tag{5.4}$$

tandis que, d'après (5.2),

$$\left|\int |\phi|^2 \gamma_x \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon \quad (x \in \boldsymbol{R}).$$

On déduit de cette dernière inégalité, par passage à la limite dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$,

$$\left|\int |\phi|^2 \psi \, d\mu\right| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $\psi \in \bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ et en particulier, en prenant $\psi = (\phi)^m (\bar{\phi})^{m-1}$, avec m entier $\geqslant 0$,

$$\left|\int |\phi|^{2m} \phi \, d\mu\right| \geqslant \varepsilon \quad (m \geqslant 1). \tag{5.5}$$

Pour conclure il suffit de remarquer qu'on ne peut avoir simultanément (5.4) et (5.5) si ε est trop petit par rapport à $\|\mu\|$. Ceci est démontré dans [3], lemme 1, avec l'estimation précise figurant dans l'énoncé du théorème. (Voir aussi [4] chap. III.) On obtient ainsi une contradiction, ce qui termine la démonstration.

Applications. Soit μ une mesure continue sur $\boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{T}$, telle que $\overline{\lim} |\hat{\mu}(x)| > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ notons $E(\varepsilon)$ l'ensemble où $|\hat{\mu}(x)| \geqslant \varepsilon$. On déduit immédiatement du théorème 5 la propriété: quel que soit $0 < \theta < \overline{\lim} |\hat{\mu}(x)|$, l'ensemble $E(\theta)$ n'est pas relativement dense dans $E(\varepsilon)$ dès que $\varepsilon < \theta c^{-\|\mu\|/\theta}$, où c est une constante voisine de $1 + \sqrt{2}$.

Soit α la borne inférieure des nombres $\varepsilon \leqslant \theta$ pour lesquels $E(\theta)$ est relativement dense dans $E(\varepsilon)$. Soient ε' et ε'' tels que $0 < \varepsilon' < \alpha < \varepsilon''$. Alors $E(\varepsilon'')$ ne peut pas être relativement dense dans $E(\varepsilon')$. En effet si $\varepsilon'' \geqslant \theta$ c'est impossible car $E(\varepsilon'') \subset E(\theta)$; si $\varepsilon'' < \theta$, $E(\theta)$ est relativement dense dans $E(\varepsilon'')$ et par transitivité il serait relativement dense dans $E(\varepsilon')$ contrairement à la définition de α. Quel que soit $T > 0$ il existe donc un point x où $\varepsilon' \leqslant |\hat{\mu}(x)|$ et tel que $|\hat{\mu}| < \varepsilon''$ sur l'intervalle $[x - T, x + T]$. On peut formuler la propriété comme suit:

THÉORÈME 6. *Il existe une constante absolue c voisine de $1 + \sqrt{2}$ pour laquelle la propriété suivante est vraie: Soit $\mu \in M(\boldsymbol{R})$ (resp. $M(\boldsymbol{T})$) une mesure* *continue dont la transformée de Fourier ne tend pas vers* 0 *à l'infini. Quel que soit* $0 < \theta < \overline{\lim}\,|\hat{\mu}(x)|$, *pour au moins un* α *de l'intervalle* $[\theta c^{-\|\mu\|/\theta}, \theta]$ *il existe une suite* x_j *tendant vers l'infini telle que* $\hat{\mu}(x_j)$ *converge vers* α *et que* $|\hat{\mu}(x)|$ *ait pour limite supérieure* α *sur une réunion d'intervalles arbitrairement grands de centres* x_j.

Note. Le théorème 6 n'est pas classique semble-t-il, en tout cas pas sous la forme précise où il est formulé. Il donne une mesure des irrégularités de la transformée de Fourier d'une mesure continue, lorsqu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini. De telles mesures ressemblent toutes, d'un certain point de vue, à des produits de Riesz.

Remarque. Soit (c_n) la suite des coefficients de Fourier–Stieltjes d'une mesure sur le cercle. Si c_n ne tend pas vers 0 à l'infini, la suite $a_n = n+c_n$ (qui possède la propriété (A′) d'après le théorème 2) présente nécessairement de grandes irrégularités qu'on peut décrire par le théorème précédent. Il n'est pas possible notamment que la suite a_n "oscille" entre $n-\varepsilon$ et $n+\varepsilon$, ou entre n et $n+\varepsilon$.

Plus généralement on peut montrer que la suite $a_n - b_n$ du théorème 3 ou la suite des distances de a_n à (b_n) (théorème 3 bis) se comporte comme la suite des coefficients de Fourier–Stieltjes d'une mesure continue. Nous omettons les démonstrations pour ne pas alourdir l'exposé.

THÉORÈME 7. *Soit* (a_n) *une suite de réels qui a la propriété* (1.2) *pour un certain* α, *un certain* ε *et une mesure* μ *de masse* $\|\mu\| \leqslant (\operatorname{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}\,|\operatorname{Log}\varepsilon| - 2$. *Alors* (a_n) *est relativement dense.*

Démonstration. De façon évidente $E(1-\varepsilon')$ est relativement dense dans $E(\varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$ et l'hypothèse sur $\|\mu\|$ permet d'appliquer le théorème 5 avec ε' arbitrairement voisin de ε. La conclusion est que la réunion des intervalles $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ est relativement dense, c'est à dire que $\sup(a_{2n+1} - a_{2n}) < +\infty$. On peut refaire le raisonnement avec $\delta - \mu$ au lieu de μ, qui est norme $\leqslant \|\mu\| + 1$ et vérifie encore l'hypothèse du théorème 5, ce qui nous donne $\sup(a_{2n} - a_{2n-1}) < +\infty$.

Que peut-on dire d'une suite (a_n) non relativement dense, qui possède la propriété (A′)?

Supposons par exemple que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,(a_{2n+1} - a_{2n}) = +\infty$. Pour toute mesure μ ayant la propriété (1.2) la moyenne de $|\hat{\mu}|$ doit être $\leqslant \varepsilon$. En prenant des valeurs de ε arbitrairement petites, on voit que ceci impose que les intervalles $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ soient de longueur uniformément bornée et que leur réunion soit de densité supérieure uniforme nulle. En particulier on doit avoir aussi $\overline{\lim\limits_{n\to-\infty}}\,(a_{2n+1} - a_{2n}) = +\infty$.

Considérons une mesure μ ayant la propriété (1.2) pour un certain α et un certain ε. On a dit que $\hat{\mu}_d$ est limite uniforme sur tout compact de translatées de $\hat{\mu}$. On en déduit que $|\hat{\mu}_d(x)| \leqslant \varepsilon$ sur des intervalles arbitrairement grands, donc partout puisque $\hat{\mu}_d$ est presque-périodique. La mesure μ_c aura la propriété (1.2) avec 2ε au lieu de ε.

En conclusion, pour tout α et tout ε, on peut réaliser (1.2) à l'aide d'une mesure continue.

Théorème 8. *Soit (a_n) une suite de réels non relativement dense, qui a la propriété* (1.2) *pour un certain α, un certain ε et une mesure μ. Alors la réunion des intervalles $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ (ou des intervalles $[a_{2n}, a_{2n+1}]$) ne peut contenir un ensemble de la forme $A_1 + \ldots + A_p$, où les A_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ sont des parties non compactes de $\boldsymbol{R}$, dès que*

$$p > 2C\,\|\mu\|/|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$$

où C est une constante absolue voisine de $\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})$.

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 5 nous considérons le semi-groupe $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ (avec la topologie $*$ faible de $L^\infty(\mu)$). $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ contient outre les caractères de $\boldsymbol{R}$, des éléments qui sont limites (dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$) de suites de caractères tendant vers l'infini: on dira que ce sont les éléments à l'infini; il est facile de vérifier que ces éléments constituent un sous-semi-groupe fermé de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ (et même un idéal de semi-groupe) (cf. [4]).

Soit χ un élément à l'infini de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$. Que peut-on dire de la mesure $\chi\mu$? Si χ est limite d'une suite γ_{x_j}, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$, on a

$$(\chi\mu)\hat{}\,(x) = \int \chi\gamma_x\,d\mu = \lim \int \gamma_{x_j}\gamma_x\,d\mu = \lim \hat{\mu}(x+x_j)$$

et, par un argument de compacité, on voit que $(\chi\mu)\hat{}$ est limite uniforme sur tout compact de translatées de $\hat{\mu}$. De sorte qu'on a deux situations possibles: ou bien $|(\chi\mu)\hat{}\,(x)| \leqslant \varepsilon$ dans $\boldsymbol{R}$ (nous dirons par commodité qu'une telle mesure est *triviale*); ou bien $(\chi\mu)\hat{}$ ressemble à $\hat{\mu}$ dans le sens que $|(\chi\mu)\hat{}\,(x)| \geqslant 1-\varepsilon$ sur des intervalles de longueur bornée (en nombre fini ou infini) et $|(\chi\mu)\hat{}\,(x)| \leqslant \varepsilon$ sur des intervalles de longueur non bornée (éventuellement infinie), séparés des premiers par de petits intervalles de longueur $\leqslant \alpha$.

A partir des remarques précédentes il est possible d'adapter la démonstration du théorème 2, chapitre III de [4], en démontrant les lemmes suivants.

Lemme 3. *$\chi\mu$ est triviale pour tout élément à l'infini χ de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$, de module idempotent.*

Démonstration. $h = |\chi|^2 = |\chi|$ est aussi un élément à l'infini de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ et il suffit de montrer que $h\mu$ est triviale car $\chi = \chi h$ et $\chi\mu = \chi\cdot(h\mu)$.

Supposons que la mesure $\nu = h\mu$ ne soit pas triviale. Soit y_j une suite tendant vers l'infini telle que γ_{y_j} converge vers h dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$. Notons que $\gamma_{-y_j} = \bar{\gamma}_{y_j}$ tend aussi vers h et on peut supposer que $y_j > 0$ pour fixer les idées.

Ecrivons

$$\int |\gamma_{y_j}-1|\,d|\nu| = \int |h\gamma_{y_j}-h|\,d|\mu|$$
$$\leqslant \|\mu\|^{1/2}\left(\int |h\gamma_{y_j}-h|^2\,d|\mu|\right)^{1/2}$$

et

$$\int |h\gamma_{y_j}-h|^2\,d|\mu| = 2\int h\,d|\mu| - \int h\gamma_{y_j}\,d|\mu| - \int h\bar{\gamma}_{y_j}\,d|\mu|.$$

L'expression précédente a pour limite 0 et en conséquence

$$\lim_{j\to+\infty} \int |\gamma_{y_j}-1|\,d|\nu| = 0.$$

Pour j assez grand on aura donc, quel que soit $x\in \boldsymbol{R}$,

$$|\hat{\nu}(x+y_j)-\hat{\nu}(x)| \leqslant \int |\gamma_{y_j}-1|\,d|\nu| < 1-2\varepsilon.$$

En particulier toutes les fois que $|\hat{\nu}(x)| \geqslant 1-\varepsilon$ on doit avoir $|\hat{\nu}(x+y_j)| > \varepsilon$. Ceci est impossible dès que $|y_j| > \alpha$ vu la forme particulière de $\hat{\nu}$ (cf. plus haut).

LEMME 4. *Pour tout élément à l'infini χ de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ pour lequel $\chi\mu$ n'est pas triviale, on a*

$$\|\mu-|\chi|\,\mu\| > |\mathrm{Log}\,\varepsilon|/2C$$

où C est une constante absolue voisine de $\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})$.

Démonstration. Pour tout $m\geqslant 1$, $|\chi|^{2m}$ est un élément à l'infini et la suite décroissante $|\chi|^{2m}$ converge dans $L^1(\mu)$ (et à fortiori dans $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$) vers un élément à l'infini idempotent h tel que $|\chi h| = h$. Pour tout $x\in \boldsymbol{R}$

$$\left|\int \chi\,|\chi|^{2m}\gamma_x\,d\mu - \int \chi h\gamma_x\,d\mu\right| \leqslant \int \big||\chi|^{2m}-h\big|\,d|\mu| < 1-2\varepsilon$$

dès que m est assez grand. La mesure $\chi h\mu$ étant triviale d'après le lemme 3, on en déduit que

$$\left|\int \chi\,|\chi|^{2m}\gamma_x\,d\mu\right| < 1-\varepsilon \qquad (x\in \boldsymbol{R})$$

ce qui prouve que la mesure $\chi\,|\chi|^{2m}\mu$ est elle-même triviale (cf. plus haut).

Il existe donc un plus petit entier $m_0 > 0$ tel que la mesure $\chi\,|\chi|^{2m}\mu$ soit triviale pour $m > m_0$.

Pour un certain réel x_0 on aura

$$\left|\int \chi\,|\chi|^{2m_0}\gamma_{x_0}\,d\mu\right| \geqslant 1-\varepsilon$$

tandis que

$$\left|\int \chi|\chi|^{2m}\gamma_{x_0}\,d\mu\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{si } m > m_0.$$

Considérons la mesure

$$\nu = |\chi|^{2m_0}(\mu-|\chi|^2\,\mu).$$

Elle est telle que

$$\left|\int \chi\, d\nu\right| \geqslant 1-2\varepsilon,$$
$$\left|\int \chi |\chi|^{2m}\, d\nu\right| \leqslant 2\varepsilon \quad (m \geqslant 1).$$

On est dans la même situation qu'à la fin de la démonstration du théorème 5, avec ν à la place de μ et 2ε au lieu de ε. On en conclut que

$$\|\nu\| > (\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}))^{-1}|\mathrm{Log}\, 2\varepsilon| - 1.$$

Pour obtenir le lemme 4, il suffit de remarquer

$$\left\|\mu - |\chi|^2\mu\right\| = \int (1-|\chi|^2)\, d|\mu| \leqslant 2\int (1-|\chi|)\, d|\mu| = 2\left\|\mu - |\chi|\,\mu\right\|.$$

La fin de la démonstration du théorème 8 est identique à celle du théorème 2, chapitre III de [4]. On la reproduit ici pour la commodité du lecteur.

Supposons que $|\hat{\mu}(x)| \geqslant 1-\varepsilon$ dans un ensemble de la forme $A_1 + \ldots + A_p$ où les A_j sont des parties de $\boldsymbol{R}$ non compactes ($1 \leqslant j \leqslant p$). Pour $1 \leqslant j \leqslant p$ soit ϕ_j un élément à l'infini de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ adhérent aux caractères γ_x ($x \in A_j$). Le produit de $\bar{\boldsymbol{R}}(\mu)$ étant séparément continu, on aura

$$\left|\int \phi_1 \ldots \phi_p\, d\mu\right| \geqslant 1-\varepsilon.$$

Posons

$$\mu_0 = \mu,$$
$$\mu_k = \phi_k \mu_{k-1} = \phi_1 \ldots \phi_k \mu \quad (1 \leqslant k \leqslant p).$$

Pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$, la mesure μ_k est non triviale car

$$\left|\int \phi_{k+1} \ldots \phi_p\, d\mu_k\right| = \left|\int \phi_1 \ldots \phi_p\, d\mu\right| \geqslant 1-\varepsilon.$$

D'après le lemme 4

$$\left\|\mu_{k-1} - |\phi_k|\,\mu_{k-1}\right\| > |\mathrm{Log}\,\varepsilon|/2C,$$
$$\|\mu_{k-1}\| - \|\mu_k\| > |\mathrm{Log}\,\varepsilon|/2C$$

et en sommant

$$\|\mu\| - \|\mu_p\| > p\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|/2C,$$
$$\|\mu\| - 1 + \varepsilon > p\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|/2C$$

en remarquant que

$$\|\mu_p\| \geqslant \left|\int \phi_1 \ldots \phi_p\, d\mu\right| \geqslant 1-\varepsilon.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 8.

Note. Le problème que j'ai cité au début me paraissait naguère facile (peut-être l'est-il en réalité?) et je l'avais soumis à un étudiant P. Quost. Cet article part de discussions que j'avais eues avec lui et tire profit des remarques de B. Host.

RÉFÉRENCES

[1] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer-Verlag.
[2] J. Lopez and K. Ross, *Sidon Sets*, Marcel Dekker.
[3] J. F. Méla, *Mesures ε-idempotentes de norme bornée*, Studia Mathematica 72 (1982), p. 131–149.
[4] *Séminaire sur l'analyse harmonique des mesures* (Villetaneuse), Astérisque 135–136 (1986).
[5] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Tracts 12.
[6] J. L. Taylor, *Measures algebras*, CBMS 16.

Reçu par la Rédaction le 25. 04. 1984