COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIV 1971 FASC. 1

# ИЗ ПРОБЛЕМ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Б. КУДАЕВ (НАЛЬЧИК, КАБАРДИНО-БАЛКАРСКАЯ АССР)

**I.** Выпишем в строку последовательность $S$ простых чисел

$$S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, \ldots\},$$

на второй строке запишем последовательно суммы (абсолютные величины разностей) соседних чисел 1-й строки

$$5, 8, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 52, 60, \ldots \qquad (1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, \ldots),$$

на 3-й строке запишем модули разностей (суммы) соседних чисел 2-й строки и т.д. Обозначим последовательность первых чисел этих строк через $S_1$ ($S_2$). Тогда

$$S_1 = \{2, 5, 3, 7, 3, 5, 3, 5, 3, 5, 1, \ldots\},$$

$$S_2 = \{2, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 3, \ldots\}.$$

Последовательности $S_{13}$ ($S_{23}$) составим так: выпишем в строку последовательность $S_1$ ($S_2$), а под ней последовательность модулей разностей соседних членов $S_1$ ($S_2$), затем на 3-й строке выпишем модули разностей соседних чисел 2-й строки и т.д. Теперь последовательность первых чисел, стоящих на этих строках, обозначим $S_{13}$ ($S_{23}$). Имеем

$$S_{13} = \{2, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\},$$

$$S_{23} = \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}.$$

Тем способом, каким из $S$ получены $S_1$ и $S_2$, составим из $S_1$ последовательности $S_{11}$ и $S_{12}$, а из $S_2$ — последовательности $S_{21}$ и $S_{22}$.

Надо доказать или опровергнуть следующие две гипотезы [1]:

1. Каждый член каждой из последовательностей $S_1$, $S_2$, $S_{11}$, $S_{12}$, $S_{13}$, $S_{21}$, $S_{22}$, $S_{23}$ представляет собою или 1 или простое число. (**P 750**)

2. Каждый член последовательности $S_{23}$ ($S_{13}$), начиная со второго

---

[1] Д-р Е. Щепкович проверил их на вычислительной машине Odra-1204 вплоть до 3500-й строки, т. е. для простых чисел не превышающих 32 609. Машина работала 63 минуты. (Прим. Ред.)

(с третьего), есть 1, точнее: $S_{23} = \{2, 1, 1, \ldots\}$, $S_{13} = \{2, 3, 1, \ldots\}$, где многоточие заменяет члены, равные 1. (**P 751**)

**II.** Назовем то, как из $S$ получены $S_1$ и $S_2$ соответственно 1- и 2- -преобразованиями последовательности $S$, а то, как из $S_1$ получено $S_{13}$ будем называть 3-преобразованием последовательности $S_1$. Символ $M_{132}$ у нас будет означать, что к последовательности $M$ последовательно применены 1-, 3- и 2-преобразования. Так $S$ в гипотезе Гильбрайта (1) подвергнута 3-преобразованию.

Нетрудно видеть, что

а) если верна гипотеза Гильбрайта, то

$$S_{32} = S_{33} = S_{3\alpha\beta\ldots} = S_3 = \{2, 1, 1, \ldots\}, \quad \alpha, \beta = 2, 3,$$

причем многоточие в $\{2, 1, 1, \ldots\}$ указывает на бесконечное повторение члена 1, а в $S_{3\alpha\beta\ldots}$ — на бесконечное повторение (в любом порядке) любого из индексов $\alpha$ и $\beta$;

б) если верно утверждение гипотезы 2 о $S_{23}$, то $S_{232} = S_{233} = S_{23\alpha\beta\ldots} = S_{23}$, $\alpha, \beta = 2, 3$, где многоточие обозначает, что индексы $\alpha$ и $\beta$ могут повториться любое число раз (так и в следующем пункте);

в) если верно утверждение гипотезы 2 о $S_{13}$, то $S_{133} = S_{1332} = S_{1333} = S_{133\alpha\beta\ldots}$, $\alpha, \beta = 2, 3$; $S_{133} = \{2, 1, 1, \ldots\}$; $S_{1331} = S_{13}$ и (поэтому) $S_{133} = S_{13313} = S_{13313\alpha\beta\ldots}$, $\alpha, \beta = 2, 3$.

Заметим, что $S_{111} = \{2, 9, 1, 5, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, \ldots\}$ содержит составной член 9.

Следующие две гипотезы обобщают гипотезы 1 и 2:

3. Рассмотрим при фиксированном $i (= 1, 2, 3)$ бесконечное семейство последовательностей

$$S^{i\alpha} = \{S_i, S_{i\alpha}, S_{i\alpha\beta}, S_{i\alpha\gamma}, S_{i\beta\alpha}, S_{i\beta\gamma}, S_{i\gamma\alpha}, S_{i\gamma\beta}, S_{i\alpha\beta\gamma}, \ldots, S_{i\gamma\beta\alpha}, \ldots\},$$
$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

Доказать или опровергнуть, что в $S^{i\alpha}$ содержится бесконечное множество последовательностей, члены которых или единицы или простые числа. Аналогичное установить и для $S^{i\beta}$ и $S^{i\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$. (**P 752**)

4. Доказать или опровергнуть, что любая последовательность, входящая в семейства $S^{i\alpha}$, $S^{i\beta}$, $S^{i\gamma}$, будучи подвергнута 3-преобразованию, дает последовательность, у которой лишь конечное число членов, считая от начала, отлично от единицы, а все последующие члены единицы. (**P 753**)

---

(1) См., например, W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.

*Reçu par la Rédaction le 8. 10. 1970*