

ТРИ ПРОБЛЕМЫ ПО РАСЩЕПЛЕНИЮ ГРУПП

П. КОНТОРОВИЧ (СВЕРДЛОВСК)

Проблема 1 (P 599). Полугруппы A и B образуют покрывающую пару для группы G , если их теоретико-множественная сумма $A \cup B$ равна G . Покрывающая пара называется *тривиальной*, если одна из ее полугрупп равна 1 или G .

Спрашивается, существует ли R -группа без нетривиальных пар покрывающих полугрупп?

Замечание. R -группа есть группа с однозначным извлечением корня (т.е. из $x^n = y^n$ следует $x = y$ для $x, y \in G$). Если $G = A \cup B$, $A \cap B = 1$ и A, B полугруппы инвариантных в G и без отличных от 1 обратимых элементов, то G линейно упорядочиваема и обязательно является R -группой. Существуют примеры не линейно упорядочиваемых R -групп. Существуют также примеры групп без кручения, но не R -групп, не покрываемых парой полугрупп (см. [3]).

Проблема 2 (P 600). Пусть G -группа без кручения, для любой пары элементов x, y которой имеет место отношение $x^n = y^m$ (n и m целые неотрицательные числа, зависящие от x и y). Очевидно, что аддитивная группа рациональных чисел удовлетворяет указанному требованию.

Спрашивается, существуют ли некоммутативные группы без кручения с указанным условием?

Проблема 3 (P 601). Подгруппа H группы G называется *изолированной*, если для любого $x \in G$ из $x^n \in H$, $x^n \neq 1$, следует $x \in H$. Группа G называется *плотной*, если в ней нет собственных изолированных подгрупп.

а) Дать описание плотных некоммутативных групп.

б) Существуют ли плотные некоммутативные группы без кручения?

Замечание. Изолированные подгруппы играют существенную роль в теории расщепляемых групп. Группа G называется *расщепляемой*, если она представима в виде теоретико-множественной суммы собственных подгрупп с единичным попарным пересечением. Система-

тическое исследование расщепляемых групп начато в работах автора настоящей проблемы (см. в особенности [1]). Там же дана общая постановка проблемы расщепления для конечных и бесконечных групп. В настоящее время литература вопроса довольно обширна (работы Свердловской алгебраической школы, работы В. Вагера, М. Suzuki, О. Кегеля, Ваумслэга и др. Обзор состояния вопроса расщепления групп на 1960 г. можно найти в обзорной статье [2]).

Группа с локально-циклическими компонентами расщепления называется *вполне расщепляемой*. В такой группе и только в такой все максимальные (локально-) циклические компоненты изолированы. Вполне расщепляемая группа без кручения есть R -группа (это другое определение R -группы проблемы 1). Непримарная периодическая абелева группа всегда является плотной. (Подгруппа H примарной абелевой группы G тогда и только тогда изолирована, когда H p -группа типа p и прямой множитель в G). Абелева группа без кручения тогда и только тогда плотна, когда она локально циклическая. Смешанная абелева группа всегда неплотна. Пункт б настоящей проблемы, по существу, является видоизменением проблемы 2.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Г. Конторович, *Группы с базисом расщепления I*, Математический сборник 12 (1943), стр. 56-70; *II*, там же 19 (1946), стр. 287-308; *III*, там же 22 (1948), стр. 79-100.

[2] — А. Пекелис и А. И. Старостина, *Структурные вопросы теории групп*, Математические записки, Свердловск, 3 (1961), тетрадь 1.

[3] Г. Фукс, *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Москва 1965.

Reçu par la Rédaction le 19. 9. 1966