COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XL 1979 FASC. 2

EIN KRITERIUM FÜR DIE FORMALE SELBSTADJUNGIERTHEIT DES DIRAC-OPERATORS

VON

TH. FRIEDRICH UND S. SULANKE (BERLIN)

1. Einleitung. Besitzt eine parakompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M^k eine Spin-Struktur, so definiert jeder Zusammenhang Z im Hauptfaserbündel der orientierten, orthonormalen Repere einen elliptischen Differentialoperator D^Z erster Ordnung — den sogenannten Dirac-Operator, welcher auf Schnitten des assoziierten Spinorbündels wirkt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Zusammenhang Z zu beweisen, so daß D^Z ein formal-selbstadjungierter Differentialoperator ist. Im Fall homogener Räume und invarianter Zusammenhänge wurde ein derartiges Kriterium von Ikeda (vergl. [2]) gegeben.

2. Die Spin-Darstellung Δ. Sei $e_1, e_2, \ldots, e_k$ eine orthonormale Basis des euklidischen Raumes $(R^k, \langle,\rangle)$ und bezeichne $\mathrm{Cliff}(R^k)$ die Clifford-Algebra der Bilinearform $(R^k, -\langle,\rangle)$. Ihre Komplexifizierung $\mathrm{Cliff}^c(R^k)$ ist isomorph zur Matrizenalgebra $C(2^n)$, falls $k = 2n$, beziehungsweise isomorph zu $C(2^n)+C(2^n)$, falls $k = 2n+1$ (vergl. [1]). Bezeichnet

$$g_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$a(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \text{ ungerade}, \\ 2, & \text{falls } j \text{ gerade}, \end{cases}$$

so ist eine Isomorphie $\mathrm{Cliff}^c(R^{2n}) = C(2^n)$ durch die Zuordnung

$$e_j \to E \otimes \ldots E \otimes g_{a(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \ldots \otimes T}_{[(j-1)/2]\text{-mal}} \tag{1}$$

gegeben.

Eine Isomorphie $\mathrm{Cliff}^c(R^{2n+1}) = C(2^n)+C(2^n)$ erhält man mittels

$$e_j \to (E \otimes \ldots \otimes E \otimes g_{a(j)} \otimes T \otimes \ldots \otimes T, E \otimes \ldots \otimes E \otimes g_{a(j)} \otimes T \otimes \ldots \otimes T)$$

für $1 \leqslant j \leqslant 2n$ und

$$e_{2n+1} \to (iT \otimes \ldots \otimes T,\ -iT \otimes \ldots \otimes T). \tag{2}$$

Wir bezeichnen diese Isomorphien mit $\varkappa$.

Sei ϱ: $\mathrm{Spin}(k) \to \mathrm{SO}(k)$ die zweifache Überlagerung der speziellen, orthogonalen Gruppe $\mathrm{SO}(k)$. Aus $\mathrm{Spin}(k) \subset \mathrm{Cliff}^c(R^k)$ ergibt sich mittels $\varkappa$ und der Projektion auf die erste Achse im ungeraden Fall eine komplexe, 2^n-dimensionale Darstellung Δ_k der Gruppe $\mathrm{Spin}(k)$. Weiterhin induziert die Multiplikation der Clifford-Algebra einen Homomorphismus

$$\mu\colon R^k \otimes \Delta_k \to \Delta_k$$

der entsprechenden $\mathrm{Spin}(k)$-Darstellungen. Die Lie-Algebra $\mathbf{spin}(k)$ der Gruppe $\mathrm{Spin}(k)$ kann mit der linearen Hülle der Menge $\{e_i e_j\colon i < j\}$ in $\mathrm{Cliff}(R^k)$ identifiziert werden. Ist E_{ij} die Standardbasis von $\mathbf{so}(k)$, so ist unter Verwendung dieser Identifikation das Differential

$$\varrho_*\colon \mathbf{spin}(k) \to \mathbf{so}(k)$$

gegeben durch

$$\varrho_*(e_i e_j) = 2E_{ij}. \tag{3}$$

Für das Differential der Darstellung

$$\varkappa\colon \mathrm{Spin}(k) \to GL(\Delta_k)$$

gilt

$$\varkappa_* = \varkappa. \tag{4}$$

Betrachtet man

$$u_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad u_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

so bildet die Menge $u_{\varepsilon_1} \otimes u_{\varepsilon_2} \otimes \ldots \otimes u_{\varepsilon_n}$ eine Basis des Vektorraumes Δ_k $(k = 2n, 2n+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned} Tu_\varepsilon &= -\varepsilon u_\varepsilon, \\ g_{\alpha(j)} u_\varepsilon &= (-1)^{j-1} (i)^{\alpha(j)} \varepsilon^{\alpha(j+1)} u_{-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5}$$

Abschließend bemerken wir noch, daß Δ_k ein positiv-definites, hermitisches Produkt mit der Eigenschaft

$$\big(\varkappa(x) l, l'\big) + \big(l, \varkappa(x) l'\big) = 0 \tag{6}$$

besitzt (vergl. [4]), welches wir im weiteren verwenden.

3. Die Definition des Dirac-Operators. Gegeben sei eine parakompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M^k der Dimension k und bezeichne $\big(Q, \pi, M^k, \mathrm{SO}(k)\big)$ das assoziierte $\mathrm{SO}(k)$-Hauptfaserbündel. Eine

Spin-Struktur ist ein Hauptfaserbündel $(P, \pi, M^k, \mathrm{Spin}(k))$ und eine Überlagerung $\lambda: P \to Q$ derart, daß

(7)
$$\begin{tikzcd} P \times \mathrm{Spin}(k) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda \times \varrho"] & P \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ Q \times \mathrm{SO}(k) \arrow[r] & Q \arrow[r, "\pi"'] & M^k \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist M^k kompakt, so existiert bekanntlicherweise genau dann eine Spin-Struktur, falls die zweite Stiefel-Whitney-Klasse von M^k verschwindet. In diesem Fall werden die Spin-Strukturen durch $H^1(M^k; Z_2)$ klassifiziert (vergl. [3]).

Für unsere weiteren Überlegungen fixieren wir eine Spin-Struktur. Gegeben sei weiterhin ein Zusammenhang $Z: TQ \to \mathbf{so}(k)$, welcher sich natürlich zu einem Zusammenhang $\hat{Z}: TP \to \mathbf{spin}(k)$ so hebt, daß

(8)
$$\begin{tikzcd} TP \arrow[r, "\hat{Z}"] \arrow[d, "\lambda_*"] & \mathbf{spin}(k) \arrow[d, "\varrho_*"] \\ TQ \arrow[r, "Z"] & \mathbf{so}(k) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der Zusammenhang $\hat{Z}$ induziert im assoziierten Spinorbündel

$$S = P \underset{\mathrm{Spin}(k)}{\times} \Delta_k$$

eine kovariante Ableitung

$$\nabla^Z: \Gamma(S) \to \Gamma\big(T^*(M^k) \otimes S\big).$$

Die Riemannsche Metrik gestattet es, $T^*(M^k)$ mit $T(M^k)$ zu identifizieren. Weiterhin induziert die Clifford-Multiplikation μ einen Homomorphismus $\mu: T(M^k) \otimes S \to S$. Der Dirac-Operator D^Z wird nun als Superposition folgender Abbildungen definiert:

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\nabla^Z} \Gamma\big(T^*(M^k) \otimes S\big) \approx \Gamma\big(T(M^k) \otimes S\big) \xrightarrow{\mu} \Gamma(S).$$

D^Z ist ein elliptischer Differentialoperator 1. Ordnung.

Ist $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ein orthonormales Reper von Vektorfeldern auf einer offenen Menge $V \subset M^k$ und $u \in \Gamma(S)$ ein Schnitt im Spinorbündel, so gilt

(9)
$$D^Z(u) = \sum_{j=1}^{k} s_j \nabla^Z_{s_j}(u)$$

(vergl. [6]).

4. Die lokale Darstellung der kovarianten Ableitung ∇^Z. Sei $V \subset M^k$ offen und $s: V \to Q$ ein Schnitt, $s(x) = \big(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_k(x)\big)$, $x \in V$.

Die lokale Zusammenhangsform Z^s ist definiert durch

$$Z^s = Z \circ s_*: TV \to \mathbf{so}(k).$$

Wählen wir in $\mathbf{so}(k)$ die Standardbasis E_{ij} $(i < j)$, so erhalten wir durch

$$Z^s = \sum_{i<j} \omega_{ij} E_{ij} \tag{10}$$

1-Formen ω_{ij} $(i < j)$ auf V, welche wir durch Antisymmetrie $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$ für beliebige *Indizes* $1 \leqslant i, j \leqslant k$ definieren können. Der Zusammenhang Z induziert eine kovariante Ableitung ${}^Z\nabla$ im Tangentialbündel und für diese gilt

$${}^Z\nabla_{s_i}(s_j) = \sum_{l=1}^{k} \omega_{jl}(s_i) s_l. \tag{11}$$

Ist V einfach-zusammenhängend, so definiert der Schnitt s zwei Schnitte im $\mathrm{Spin}(k)$-Hauptfaserbündel P über V, unter denen wir einen auswählen und mit $\hat{s}: V \to P$ bezeichnen. Der Zusammenhang $\hat{Z}$ und der Schnitt $\hat{s}$ ergeben eine lokale Zusammenhangsform

$$\hat{Z}^{\hat{s}} = \hat{Z} \circ \hat{s}_*: TV \to \mathbf{spin}(k)$$

und somit mittels

$$\hat{Z}^{\hat{s}} = \sum_{i<j} \hat{\omega}_{ij} e_i e_j \tag{12}$$

auf V definierte 1-Formen $\hat{\omega}_{ij}$. Aus (3), (8) und (10) folgt unmittelbar

$$\hat{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \omega_{ij}. \tag{13}$$

Im assoziierten Spinorbündel

$$S = P \underset{\mathrm{Spin}(k)}{\times} \Delta_k$$

betrachten wir die durch

$$\eta_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = [\hat{s}, u_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}]$$

definierten, linear unabhängigen Schnitte $\eta_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ über V. Die kovariante Ableitung ∇^Z ist dann durch

$$\nabla^Z_{s_j}(\eta_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}) = \sum_{(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')} \Gamma^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'}_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} \eta_{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'} \tag{14}$$

gegeben. Wir berechnen jetzt die Funktionen $\Gamma^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'}_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$. Es gilt

$$[\varkappa_*(\hat{Z}^{\hat{s}}(s_j))](u_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}) = \sum_{(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')} \Gamma^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'}_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} u_{\varepsilon_1'} \otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n'} \tag{15}$$

(vergl. [5], S. 151), woraus unter Berücksichtigung von (4), (12) und (13)

$$\frac{1}{2}\sum_{l<m} \omega_{lm}(s_j)\varkappa(e_l e_m)(u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}) = \sum_{(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')} \Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'} u_{\varepsilon_1'}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n'}$$

folgt.

Sei

$$C_{l,m} = (-1)^{[(l-1)/2]+[(m-1)/2]+m}\, i^{a(l+1)+a(m)+1}.$$

Dann erhält man aus (1), (2) und (5) folgende Formeln:

(a) Ist $[(l-1)/2] < [(m-1)/2]$ und $m < 2n+1$, so gilt

$$\begin{aligned}\varkappa(e_l e_m)&(u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n})\\ &= C_{l,m}\varepsilon_{n-[(m-1)/2]}^{a(m+1)}\varepsilon_{n-[(l-1)/2]}^{a(l)}\varepsilon_{n-[(m-1)/2]+1}\dots\varepsilon_{n-[(l-1)/2]-1}u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes\\ &\qquad \otimes u_{-\varepsilon_{n-[(m-1)/2]}}\otimes \dots \otimes u_{-\varepsilon_{n-[(l-1)/2]}}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}.\end{aligned}$$

(b) Ist $l < m < 2n+1$ und $[(l-1)/2] = [(m-1)/2]$, so gilt

$$\varkappa(e_l e_m)(u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}) = i\varepsilon_{n-[(l-1)/2]}u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}.$$

(c) Ist $l < 2n+1$, so gilt

$$\begin{aligned}\varkappa(e_l e_{2n+1})&(u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n})\\ &= (-1)^{n-[(l+1)/2]+l}\, i^{a(l)+1}\,\varepsilon_1\dots\varepsilon_{n-[(l+1)/2]}\varepsilon_{n-[(l-1)/2]}^{a(l)}u_{\varepsilon_1}\otimes \dots \otimes\\ &\qquad \otimes u_{-\varepsilon_{n-[(l-1)/2]}}\otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_n}.\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir nach elementaren Rechnungen

SATZ 1. *Sei* $\dim(M^k) = 2n$ (*gerade*). *Die die kovariante Ableitung* ∇^Z *lokal beschreibenden Funktionen* $\Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'}$ *sind gegeben durch:*

(1) $\Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'} = 0$, *falls* $(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')$ *nicht durch genau zwei oder null Vorzeichenveränderungen aus* $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ *hervorgeht.*

(2) $\Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} = \frac{1}{2}\, i \sum_{l=1}^{n} \omega_{2l-1,2l}(s_j)\varepsilon_{n-l+1}.$

(3) $\Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1,\dots,-\varepsilon_{n-t},\dots,-\varepsilon_{n-s},\dots,\varepsilon_n} = \dfrac{\varepsilon_{n-t+1}\dots\varepsilon_{n-s-1}}{2}\{C_{2s+1,2t+1}\varepsilon_{n-s}\times$
$\times\,\omega_{2s+1,2t+1}(s_j) + C_{2s+1,2t+2}\varepsilon_{n-t}\varepsilon_{n-s}\omega_{2s+1,2t+2}(s_j) + C_{2s+2,2t+1}\omega_{2s+2,2t+1}(s_j) +$
$+\, C_{2s+2,2t+2}\varepsilon_{n-t}\omega_{2s+2,2t+2}(s_j)\}.$

Ist $\dim(M^k) = 2n+1$ (*ungerade*), *so gilt*

(4) $\Gamma_{j,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n'} = 0$, *falls* $(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_n')$ *nicht genau durch null, eine oder zwei Vorzeichenveränderungen aus* $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ *hervorgeht.*

(5) *Ist*

$$(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

oder

$$(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \ldots, -\varepsilon_{n-t}, \ldots, -\varepsilon_{n-s}, \ldots, \varepsilon_n),$$

so gelten die Formeln (2) *und* (3) *entsprechend.*

$$(6)\quad \Gamma_{j,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}^{\varepsilon_1,\ldots,-\varepsilon_{n-t},\ldots,\varepsilon_n} = \frac{1}{2}(-1)^{n-t-1}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-t-1}\big(\varepsilon_{n-t}\omega_{2t+1,2n+1}(s_j) - \\ - i\,\omega_{2t+2,2n+1}(s_j)\big).$$

5. Die formale Selbstadjungiertheit des Dirac-Operators. Das positiv-definite, hermitische Produkt in Δ_k ergibt eine Metrik im Spinorbündel S. Der zu D^Z formal-adjungierte Operator $(D^Z)^*$ ist durch

$$\int \big(D^Z(u), v\big) = \int \big(u, (D^Z)^*(v)\big)$$

definiert, wobei u und v Schnitte in S mit kompakten Trägern sind. Bezeichne div den Divergenz-Operator bezüglich der Riemannschen Metrik auf M^k.

Lemma 1. *Ist $s_1, s_2, \ldots, s_k$ ein orthonormales Reper von Vektorfeldern auf einer offenen Menge $V \subset M^k$ und $u \in \Gamma(S)$ ein Schnitt im Spinorbündel, so gilt*

$$(D^Z)^*(u) = \sum_{j=1}^{k} \big(\nabla_{s_j}^Z(s_j u) + \operatorname{div}(s_j)(s_j u)\big).$$

Weiterhin gilt für eine auf M^k definierte Funktion f

$$\big(D^Z - (D^Z)^*\big)(fu) = f\big(D^Z - (D^Z)^*\big)(u).$$

Der Beweis von Lemma 1 ergibt sich durch eine einfache Anwendung des Satzes von Stokes und wird analog dem des Satzes 4.3 der Arbeit [6] geführt.

Insbesondere ist der Dirac-Operator genau dann formal-selbstadjungiert, falls $(D^Z)(\eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}) = (D^Z)^*(\eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n})$ für jede Folge $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ gilt. Dies bedeutet

$$\sum_{j=1}^{k} s_j \nabla_{s_j}^Z(\eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}) = \sum_{j=1}^{k} \big(\nabla_{s_j}^Z(s_j \eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}) + \operatorname{div}(s_j) s_j \eta_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\big)$$

und aus (14), (15) erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{k} e_j \big[\varkappa_*\big(\hat{\hat{Z}}^s(s_j)\big)\big](u_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes u_{\varepsilon_n}) \\ = \sum_{j=1}^{k} \Big(\big[\varkappa_*\big(\hat{\hat{Z}}^s(s_j)\big)\big](e_j u_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes u_{\varepsilon_n}) + \operatorname{div}(s_j) u_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes u_{\varepsilon_n}\Big).$$

Weil $u_{s_1} \otimes u_{s_2} \otimes \ldots \otimes u_{s_n}$ eine Basis von Δ_k bildet, folgt unter Berücksichtigung von (4) und (12)

$$\sum_{j=1}^{k} e_j \Big(\sum_{l<m} \hat{\omega}_{lm}(s_j) e_l e_m \Big) = \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{l<m} \hat{\omega}_{lm}(s_j) e_l e_m e_j + \operatorname{div}(s_j) e_j \Big).$$

Somit gilt

$$\sum_{l<m} \Big(\sum_{j=1}^{k} \hat{\omega}_{lm}(s_j)(e_j e_l e_m - e_l e_m e_j) \Big) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}(s_j) e_j ,$$

woraus

$$\sum_{l=1}^{k} \Big(\sum_{m=1}^{k} \omega_{lm}(s_m) \Big) e_l = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{div}(s_j) e_j$$

folgt. Wir sehen somit, daß D^Z genau dann formal-selbstadjungiert ist, falls für alle $j = 1, 2, \ldots, k$

$$\operatorname{div}(s_j) = \sum_{i=1}^{k} \omega_{ji}(s_i) \tag{16}$$

gilt. Der Zusammenhang Z induziert eine kovariante Ableitung ${}^Z\nabla$ im Tangentialbündel und daher mittels

$$\operatorname{div}^Z(X) = \sum_{j=1}^{k} \omega^j({}^Z\nabla_{X_j} X)$$

einen Divergenz-Operator div^Z. Hierbei ist $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ein lokales Reper von Vektorfeldern und $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^k$ dual zu diesem. Aus (11) folgt nun

$$\operatorname{div}^Z(s_j) = \sum_{i=1}^{k} \langle {}^Z\nabla_{s_i} s_j, s_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \Big\langle \sum_{m=1}^{k} \omega_{jm}(s_i) s_m, s_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \omega_{ji}(s_i)$$

und aus (16) erhalten wir $\operatorname{div}^Z(s_j) = \operatorname{div}(s_j)$. Daher gilt

Satz 2. *Sei M^k eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Spin-Struktur und einem Zusammenhang Z im Hauptfaserbündel der orientierten, orthonormalen Repere. Bezeichne* div *den Divergenz-Operator der Riemannschen Mannigfaltigkeit und* div^Z *denjenigen des Zusammenhangs Z. Der Dirac-Operator D^Z ist genau dann formal-selbstadjungiert, falls* $\operatorname{div} = \operatorname{div}^Z$.

Folgerung 1. *Sei M^2 eine 2-dimensionale, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer ausgezeichneten Spin-Struktur und einem Zusammenhang Z im Hauptfaserbündel der orientierten, orthonormalen Repere. Der Dirac-Operator D^Z ist genau dann formal-selbstadjungiert, falls Z der Levi-Cività-Zusammenhang der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist.*

Beweis. Sei $\theta = (\theta^1, \theta^2)$ die Torsionsform des Zusammenhanges Z und $s^*\theta = (\theta^1_s, \theta^2_s)$ die lokale Torsionsform. Gemäß den Strukturgleichungen (vergl. [5]) gilt

$$d\sigma^i = \sum_j \omega_{ij}\sigma^j + \theta^i_s$$

wobei σ^1, σ^2 dual zu s_1, s_2 ist. Daraus erhalten wir

$$-\sigma^i([s_l, s_m]) = \omega_{im}(s_l) - \omega_{il}(s_m) + \theta^i_s(s_l, s_m).$$

Für $i = l$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{2} \sigma^i([s_i, s_m]) = \sum_{i=1}^{2} \omega_{mi}(s_i) - \sum_{i=1}^{2} \theta^i_s(s_i, s_m).$$

Der Levi-Cività-Zusammenhang ist torsionsfrei

$$\nabla_{s_i} s_m - \nabla_{s_m} s_i = [s_i, s_m]$$

und $\nabla_{s_m} s_i$ ist orthogonal zu s_i. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{2} \sigma^i(\nabla_{s_i} s_m) = \sum_{i=1}^{2} \omega_{mi}(s_i) - \sum_{i=1}^{2} \theta^i_s(s_i, s_m),$$

also

$$\mathrm{div}(s_m) = \sum_{i=1}^{2} \omega_{mi}(s_i) - \sum_{i=1}^{2} \theta^i_s(s_i, s_m).$$

Aus (16) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{2} \theta^i_s(s_i, s_m) = 0 \qquad (m = 1, 2)$$

und somit

$$\theta^1_s(s_1, s_2) = 0 = \theta^2_s(s_1, s_2).$$

Der Zusammenhang Z ist daher torsionsfrei.

LITERATURNACHWEIS

[1] D. Husemoller, *Fibre bundles*, New York 1966.

[2] A. Ikeda, *Formally self-adjointness for the Dirac operator on homogeneous spaces*, Osaka Journal of Mathematics 12 (1975), S. 173-185.

[3] J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, l'Enseignement Mathématique 9 (1963), S. 198-203.

[4] R. Parthasarathy, *Dirac operator and discrete series*, Annals of Mathematics 96 (1972), S. 1-30.

[5] R. Sulanke und P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, Berlin 1972.

[6] J. A. Wolf, *Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square*, Indiana University Mathematics Journal 22 (1973), S. 611-640.

Reçu par la Rédaction le 28. 10. 1976