COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVIII 1990 FASC. 2

STABILITÉ DE CERTAINES SOUS-VARIÉTÉS D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE LOCAL PRODUIT

PAR

GHEORGHE PITIŞ (BRAŞOV)

Les sous-variétés semi-invariantes d'une variété riemannienne local produit ont été définies et étudiées par Bejancu [1]. En utilisant les groupes de cohomologie de de Rham, nous avons étudié les propriétés des distributions qui définissent une telle sous-variété, ainsi que la stabilité des sous-variétés anti-invariantes [5].

Dans cette note nous continuons l'étude, en obtenant une formule de calcul pour la seconde variation du volume d'une sous-variété semi-invariante minimale et générique. De cette formule on déduit des conditions sous lesquelles la sous-variété est stable. Enfin, nous illustrons ces considérations par des exemples de sous-variétés semi-invariantes stables d'une variété riemannienne local produit.

1. Soit $\tilde{M}$ une C^∞-variété différentiable douée de la structure métrique presque produit donnée par la métrique riemannienne g et par le champ tensoriel F, de type (1, 1) ($F \neq \pm I$), tels que

$$F^2 = I, \quad g(FX, FY) = g(X, Y) \tag{1}$$

pour tous X et Y, tangents à $\tilde{M}$ (voir [7]). Désignons par $\tilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Cività sur $\tilde{M}$, relative à g et supposons que $\tilde{M}$ est local produit, i.e.

$$\tilde{\nabla}_X F = 0. \tag{2}$$

Étant donnée une sous-variété M de $\tilde{M}$, nous désignons toujours par g la métrique riemannienne induite sur M et par ∇ la connexion de Levi-Cività sur M.

S'il existe deux distributions D et $D^\perp$, telles que

$$T_x M = D_x \oplus D_x^\perp, \quad F(D_x) = D_x, \quad F(D_x^\perp) \subseteq T_x M^\perp$$

pour tout $x \in M$, alors M s'appelle *sous-variété semi-invariante* de $\tilde{M}$ ([1]; conf. [2]). La sous-variété semi-invariante M est dite *$D^\perp$-géodésique* [1], si $h(X, Y) = 0$ pour tous X, $Y \in D^\perp$, h étant la deuxième forme fondamentale de M.

2. Soit M une sous-variété semi-invariante de la variété riemannienne local produit $\tilde{M}$ et désignons par P, Q les projecteurs de TM sur D, resp. sur $D^{\perp}$. En appliquant les formules de Gauss et de Weingarten relatives à M

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad \tilde{\nabla}_X \bar{n} = -A_{\bar{n}} X + \nabla^{\perp}_X \bar{n}, \tag{3}$$

nous obtenons

$$\nabla^{\perp}_Y (FX) = F(\nabla_Y X) + Fh(X, Y) + A_{FX} Y, \tag{4}$$

d'où il résulte le

Lemme 1. *Pour $X \in D^{\perp}$ et $Y \in TM$ on a*

$$\nabla^{\perp}_Y (FX) = FQ(\nabla_Y X), \quad FP(\nabla_Y X) + P(A_{FX} Y) = 0, \tag{5}$$

$$Fh(X, Y) + Q(A_{FX} Y) = 0. \tag{6}$$

Dorénavant nous supposons que M est générique (i.e. $\dim D^{\perp} = \operatorname{codim} M$) et soient

$$\mathscr{B}_D = \{X_1, \ldots, X_p\}, \quad \dim D = p, \quad \mathscr{B}_{D^{\perp}} = \{X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}\}, \quad \dim D^{\perp} = q,$$

deux bases locales orthonormées des distributions D et $D^{\perp}$.

Proposition 1. *Toute sous-variété semi-invariante générique d'une variété riemannienne local produit est $D^{\perp}$-géodésique.*

En effet, de (1) et de (6) on déduit

$$g(h(X, X), FX_i) = -g(Q(A_{FX} X), X_i) \tag{7}$$

pour tous $X \in D^{\perp}$ et $X_i \in \mathscr{B}_{D^{\perp}}$. Mais on sait que (voir [1])

$$A_{FX} Y + A_{FY} X = 0, \quad X, Y \in D^{\perp}, \tag{8}$$

et alors de (7) on obtient $h(X, X) = 0$, car M est générique. Notre affirmation résulte à présent de la symétrie de h.

Pour tout champ normal $\bar{n} \in TM^{\perp}$ nous pouvons considérer la variation normale $\mathscr{V}''(\bar{n})$ de M dans $\tilde{M}$, qui, dans le cas d'une variété minimale et compacte, est donnée par la formule [6]

$$\mathscr{V}''(\bar{n}) = \int_M \{\|\nabla^{\perp} \bar{n}\|^2 - \sum_{i=1}^{p+q} \tilde{R}(X_i, \bar{n}, \bar{n}, X_i) - \|A_{\bar{n}}\|^2\} \, dV, \tag{9}$$

où $X_i \in \mathscr{B}_D \cup \mathscr{B}_{D^{\perp}}$, $\tilde{R}$ est le tenseur de Riemann de $\tilde{M}$ et dV est la forme de volume sur M.

Soit $\tilde{S}$ le tenseur de Ricci de $\tilde{M}$. On a la

Proposition 2. *Pour toute sous-variété semi-invariante compacte, générique et minimale M, d'une variété riemannienne local produit, la variation normale induite par le champ normal $\bar{n}$ est donnée par la formule*

$$\mathscr{V}''(\vec{n}) = \int_M \{\tfrac{1}{2}\|d\theta\|^2+(\delta\theta)^2-\sum_{i=1}^{p}[R(X_i, F\vec{n}, F\vec{n}, X_i)+\|h(X_i, F\vec{n})\|^2]$$

$$-\sum_{\substack{i=1,p+q\\ j=1,p}} g^2(h(X_i, FX_j), \vec{n})$$

$$-\sum_{\substack{i=1,p\\ j=p+1,p+q}} g^2(h(X_i, X_j), \vec{n})-\tilde{S}(\vec{n}, \vec{n})\}\,dV,$$

où θ est la 1-forme associée au champ vectoriel $F\vec{n}$ et R est le tenseur de Riemann sur M.

Démonstration. En utilisant la définition de $\|A_Z\|$, on montre par calcul que pour tout $X\in D^{\perp}$ on a

$$\sum_{i=1}^{p}\|h(X_i, X)\|^2+\sum_{\substack{i=1,p\\ j=1,p+q}} g^2(A_{FX}X_i, X_j) = \|A_{FX}\|^2. \tag{10}$$

D'autre part de (5), (8) et de (10) il résulte

$$\|\nabla X\|^2-\|Q\nabla X\|^2 = \sum_{\substack{i=1,p+q\\ j=1,p}} g^2(h(X_i, FX_j), FX). \tag{11}$$

De (1) et de (2) on déduit

$$\tilde{R}(X_i, FX, FX, X_i) = \tilde{R}(FX_i, X, X, FX_i). \tag{12}$$

Enfin, de l'équation de Gauss, de (12) et par application de la proposition 1, on obtient

$$\sum_{i=1}^{p+q}\tilde{R}(X_i, FX, FX, X_i) = \tilde{S}(X, X)-S(X, X)+\sum_{i=1}^{p}\tilde{R}(X_i, X, X, X_i) -\sum_{i=1}^{p}\|h(X, X_i)\|^2. \tag{13}$$

De (10)–(13) et en tenant compte de l'égalité connue (v. par exemple [3], p. 51)

$$\int_M \{S(X, X)+\|\nabla X\|^2-\tfrac{1}{2}\|d\theta\|^2-(\delta\theta)^2\}\,dV = 0,$$

on obtient la formule annonçée.

Rappelons que la sous-variété M est dite *stable* si

$$\mathscr{V}''(\vec{n}) \geqslant 0$$

pour tout champ normal $\vec{n}$ ([3], p. 9). Nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 1. *Soit M une sous-variété semi-invariante générique compacte* *et totalement géodésique d'une variété riemannienne local produit. Si $\tilde{S}(X, X) \leqslant 0$ pour tout $X \in D^{\perp}$, alors M est stable.*

En effet, M étant totalement géodésique, de l'équation de Codazzi il résulte

$$\tilde{R}(D^{\perp}, D, D^{\perp}, D) = 0 \tag{14}$$

et il suffit d'appliquer la proposition 2.

Supposons que $\tilde{M}$ a la courbure sectionnelle constante. Si M est totalement géodésique, elle a la même courbure sectionnelle. En tenant compte de (14) on a la

CONSÉQUENCE 1. *Dans une variété riemannienne local produit plate toute sous-variété semi-invariante compacte, générique et totalement géodésique est plate et stable.*

3. EXEMPLES. Soient M et N deux variétés parallélisables compactes de dimensions m, resp. n, et considérons la variété produit

$$\tilde{M} = M_1 \times M_2 \times M_3, \quad M_1 = M, \ M_2 = M_3 = N.$$

Désignons par $\{U_1, \ldots, U_m\}$, $\{V_1, \ldots, V_n\}$ deux familles de champs de vecteurs, parallélisant les variétés M, N et soient g_1, g_2 les métriques riemanniennes correspondantes

$$g_1(U_i, U_j) = \delta_{ij}, \quad g_2(V_a, V_b) = \delta_{ab}.$$

En utilisant les projecteurs π_i: $\tilde{M} \to M_i$, $i = 1, 2, 3$, on obtient une parallélisation $\{X_i, Y_a, Z_a\}$ de la variété $\tilde{M}$ telle que

$$\pi_1^* X_i = U_i, \quad \pi_2^* Y_a = V_a, \quad \pi_3^* Z_a = V_a,$$

la métrique produit sur $\tilde{M}$ étant donné par

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} g_i(\pi_i^* X, \pi_i^* Y), \quad g_2 = g_3, \tag{15}$$

pour tous X et Y tangents à $\tilde{M}$.

On vérifie aisément que

$$F(X_i) = X_i, \quad F(Y_a) = Y_a, \quad F(Z_a) = -Z_a \tag{16}$$

définit une structure presque produit métrique sur $\tilde{M}$. De plus, en tenant compte du type de la métrique (15), on trouve la connexion de Levi–Civitá associée et on déduit par calculs que $\tilde{M}$ est local produit.

Soit D la distribution engendrée par $\{X_i\}_{i \in \overline{1,m}}$ et $D^{\perp}$ celle engendrée par $\{Y_a + Z_a\}_{a \in \overline{1,n}}$. Ces deux distributions, définies sur $\tilde{M}$, vérifient les conditions

$$FD = D, \quad D^{\perp} \perp D, \quad FD^{\perp} \perp D, \quad FD^{\perp} \perp D^{\perp} \tag{17}$$

et $FD^{\perp}$ est engendrée par les champs de vecteurs $\{Y_a - Z_a\}_{\overline{1,n}}$. D'autre part, $D \oplus D^{\perp}$ est intégrable, donc il résulte de (17) que toute variété intégrale maximale M est semi-invariante et générique. Les distributions D, $D^\perp$ sont elles aussi intégrables, donc on déduit de [1] (theorems 2 et 4) et de la proposition 1 que M est totalement géodésique.

En utilisant la définition des distributions D, $FD^\perp$ et (14) on a $\tilde{S}(X, X) = 0$ pour tout $X \in D^\perp$. Du théorème 1 résulte alors la suivante

PROPOSITION 3. *Toute variété intégrale maximale compacte de la distribution intégrable $D \oplus D^\perp$ est stable.*

Remarque. D'après un résultat de Palais [4], la condition qu'une variété intégrale maximale de la distribution $D \oplus D^\perp$ soit compacte est vérifiée, par exemple, si $D \oplus D^\perp$ est régulière.

Comme cas particuliers des résultats précédents nous pouvons citer:

A. Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est stable dans le tore $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, muni de la structure riemannienne local produit donnée par (15) et (16), en tant que sous-variété semi-invariante.

B. Posons $M = S^1$, $N = S^3$. Il est bien connu que la sphère S^3 est parallélisable et on a

$$[U_1, U_2] = 2U_3, \quad [U_2, U_3] = 2U_1, \quad [U_3, U_1] = 2U_2.$$

Mais alors les générateurs de la distribution $D^\perp$ vérifient des conditions analogues et en utilisant la proposition 3 il résulte que

$S^1 \times S^3$ est stable dans la variété riemannienne local produit $S^1 \times S^3 \times S^3$.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Bejancu, *Semi-invariant submanifolds of locally product Riemannian manifolds*, An. Univ. Timişoara Ser. Ştiinţ. Mat. 22 (1984), pp. 3–11.

[2] M. Capursi and S. Ianuş, *Complex hypersurfaces of the product of two cosymplectic manifolds*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N. S.) 28 (1984), pp. 299–310; ibidem 29 (1985), pp. 215–224.

[3] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds and its Applications*, Sci. Univ. of Tokyo, 1981.

[4] R. S. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 22 (1957).

[5] Gh. Pitiş, *On some submanifolds of a locally product Riemannian manifold*, Kodai Math. J. 9 (1986), pp. 327–333.

[6] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), pp. 62–105.

[7] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

UNIVERSITÉ DE BRAŞOV
CHAIRE DE MATHÉMATIQUES
STR. K. MARX, 50
2200 BRAŞOV, ROMANIA

Reçu par la Rédaction le 23.2.1987;
en version modifiée le 18.12.1987