

**DÉMONSTRATION PROBABILISTE D'UN LEMME
COMBINATOIRE POUR L'APPROXIMATION DIOPHANTINNE
DES NOMBRES ALGÈBRIQUES**

PAR

MAURICE MIGNOTTE (ORSAY)

Introduction. La théorie de Roth comporte deux parties essentiellement différentes: le lemme de Roth, qui concerne le comportement d'un polynôme à coefficients entiers en des points rationnels, et la construction d'un polynôme à coefficients entiers $A(x_1, \dots, x_m)$ dont les coefficients ne sont „pas trop grands” at qui s'annule à un ordre „très élevé” au point (ξ, \dots, ξ) , où ξ est un nombre algébrique donné.

Le lemme de Roth n'a pas encore été amélioré de façon significative. La construction du polynôme A utilise un lemme combinatoire dû à Schneider [5] dont voici l'énoncé:

LEMME DE SCHNEIDER. Soient r_1, \dots, r_n des entiers positifs et soit s un nombre positif. Le nombre N de m -uples d'entiers (i_1, \dots, i_m) satisfaisant

$$(1) \quad 0 \leq i_1 \leq r_1, \quad \dots, \quad 0 \leq i_m \leq r_m$$

et

$$(2) \quad \frac{i_1}{r_1} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \leq m \left(\frac{1}{2} - s \right)$$

vérifie l'inégalité

$$(3) \quad N \leq \frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{m}} (r_1 + 1) \dots (r_m + 1).$$

La démonstration de ce lemme peut se faire par récurrence sur m . Ce résultat a été amélioré par G. C. H. Reuter (cf. [2], p. 163-166). La méthode de Reuter est très ingénieuse, elle consiste essentiellement à pondérer les points à coordonnées entières du domaine (1) de telle sorte que la plus grande partie de la masse totale soit portée par les points qui vérifient

$$\frac{i_1}{r_1} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \leq m \left(\frac{1}{2} - s \right) \quad \text{ou} \quad \frac{i_1}{r_1} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \geq m \left(\frac{1}{2} + s \right).$$

Cette méthode fournit la majoration

$$(4) \quad N \leq (r_1 + 1) \dots (r_m + 1) e^{-ms^2},$$

ce qui améliore l'inégalité (3).

En utilisant le théorème de Esseen (voir ci-dessous), qui précise le théorème central-limite de la théorie des probabilités, nous obtenons l'encadrement

$$(5) \quad \left| \frac{N}{(r_1 + 1) \dots (r_m + 1)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{sm/S_m}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right| \leq \frac{32}{\sqrt{m}}.$$

Ceci fournit la valeur approchée de N et la meilleure majoration possible de N .

Cette estimation de N nous permettra d'améliorer les résultats de [3] (ou [4]) qui généralisaient un théorème de Cugiani-Mahler (cf. [2], p. 169-180). Dans cette partie, nous suivrons de très près les démonstrations de l'ouvrage de Mahler [2] dont nous conservons les notations afin de faciliter la tâche du lecteur. Pour plus de détails, consulter le livre de Mahler.

1. Un lemme combinatoire. Énonçons tout d'abord le théorème de Esseen.

THÉORÈME ([1], p. 544). *Soient X_1, \dots, X_m des variables aléatoires centrées, indépendantes de moments d'ordre deux et trois, notés respectivement:*

$$\mathbf{E}(X_k^2) = \sigma_k^2, \quad \mathbf{E}(|X_k|^3) = \varrho_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Soit la variable aléatoire

$$X = \frac{1}{S_m} (X_1 + \dots + X_m), \quad \text{où } S_m^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_m^2.$$

Soit F la fonction de répartition de X , définie pour tout x par la formule

$$F(x) = \text{Prob}(X \leq x).$$

Alors, pour tout x , on a l'inégalité

$$|F(x) - \mathcal{N}(x)| \leq 6 \frac{\varrho_1 + \dots + \varrho_m}{S_m^3},$$

où

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Rappelons le problème combinatoire qui nous intéresse.

Soient r_1, \dots, r_m des entiers positifs et soit s un nombre positif. Nous cherchons une estimation du nombre $N(s)$ d'entiers (i_1, \dots, i_m) qui vérifient les inégalités (1), et (2). Remarquons que l'inégalité (2) peut se mettre sous la forme

$$(2') \quad \sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \leq -sm.$$

Ceci amène à considérer les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m réparties uniformément aux points respectifs

$$\begin{aligned} \frac{i_1}{r_1} - \frac{1}{2} & \text{ avec } 0 \leq i_1 \leq r_1, \\ \frac{i_2}{r_2} - \frac{1}{2} & \text{ avec } 0 \leq i_2 \leq r_2, \\ & \dots \dots \dots \\ \frac{i_m}{r_m} - \frac{1}{2} & \text{ avec } 0 \leq i_m \leq r_m. \end{aligned}$$

Il est clair que les variables aléatoires X_h sont centrées et que leurs moments respectifs sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} \sigma_h^2 &= \sum_{i=0}^{r_h} \left(\frac{i}{r_h} - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{r_h+1} \\ &= \frac{1}{r_h+1} \left[\frac{r_h(r_h+1)(2r_h+1)}{6r_h^2} - \frac{r_h(r_h+1)}{2r_h} + \frac{r_h+1}{4} \right] \\ &= \frac{2r_h+1}{6r_h} - \frac{1}{4} = \frac{r_h+2}{12r_h} \end{aligned}$$

et

$$\varrho_h = \sum_{i=0}^{r_h} \left| \frac{i}{r_h} - \frac{1}{2} \right|^3 \frac{1}{r_h+1}.$$

Il en résultent aussitôt les inégalités

$$(6) \quad \varrho_h \leq \sum_{i=0}^{r_h} \frac{1}{8} \frac{1}{r_h+1} = \frac{1}{8}.$$

De plus, il est clair que les variables X_h sont indépendantes. Nous sommes donc dans le cas d'application du théorème de Esseen, d'où l'inégalité

$$(7) \quad \left| \text{Prob} \left(\sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \leq xS_m \right) - \mathcal{N}(x) \right| \leq \frac{6(\varrho_1 + \dots + \varrho_m)}{S_m^3}.$$

Remarquons que S_m vérifie l'inégalité

$$(8) \quad S_m^2 = \frac{m}{12} + \sum_{h=1}^m \frac{1}{6r_h} \geq \frac{m}{12}.$$

En utilisant (6) et (8), l'inégalité (7) conduit à la majoration

$$(9) \quad \left| \text{Prob} \left(\sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \leq xS_m \right) - \mathcal{N}(x) \right| \leq \frac{6}{8 \cdot 12^{-3/2} \sqrt{m}} \leq \frac{32}{\sqrt{m}}.$$

D'autre part, les conditions (1) et (2') montrent qu'on a la relation

$$(10) \quad \text{Prob} \left(\sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \leq xS_m \right) = \frac{N(-xS_m/m)}{K},$$

où $K = (r_1 + 1) \dots (r_m + 1)$.

L'inégalité (9) fournit l'estimation cherchée, à savoir:

$$(11) \quad \left| \frac{N(s)}{K} - \mathcal{N} \left(-\frac{sm}{S_m} \right) \right| \leq \frac{32}{\sqrt{m}}.$$

On en déduit, en particulier, la majoration

$$(12) \quad N(s) \leq K \left(\mathcal{N} \left(\frac{-sm}{S_m} \right) + \frac{32}{\sqrt{m}} \right).$$

Par la transformation $(i_1, \dots, i_m) \mapsto (r_1 - i_1, \dots, r_m - i_m)$ sur l'ensemble des m -uples (i_1, \dots, i_m) vérifiant (1), les m -uples qui vérifient

$$\sum_{h=1}^m \frac{i_h}{r_h} \leq \left(\frac{1}{2} - s \right) m$$

et ceux qui vérifient

$$\sum_{h=1}^m \frac{i_h}{r_h} \geq \left(\frac{1}{2} + s \right) m$$

s'échangent mutuellement, on a donc la relation

$$N(s) + N(-s) = K.$$

Ceci permet de se limiter au cas où s est positif. Dans ce cas, puisque \mathcal{N} est une fonction croissante, pour tout majorant S de S_m on a l'inégalité

$$(12') \quad N(s) \leq K \left(\mathcal{N} \left(\frac{-sm}{S} \right) + \frac{32}{\sqrt{m}} \right).$$

La formule

$$S_m^2 = \frac{m}{12} + \sum_{h=1}^m \frac{1}{6r_h}$$

montre que, pour tout r_1, \dots, r_m , on a l'inégalité

$$(13) \quad S_m^2 \leq \frac{m}{12} + \sum_{h=1}^m \frac{1}{6} = \frac{m}{4},$$

et que, pour tout ε positif donné, on a l'inégalité

$$(14) \quad S_m^2 \leq (1 + \varepsilon) \frac{m}{12}$$

pourvu que les r_h vérifient les inégalités

$$r_h \geq \frac{2}{\varepsilon}, \quad h = 1, \dots, m.$$

On peut aussi majorer $\mathcal{N}(x)$, pour x négatif, de la façon suivante. On a posé

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Par le changement de variable $t \mapsto x - t$, on obtient les formules

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dt = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(tx - \frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Comme x est négatif sur l'intervalle d'intégration, e^{tx} est au plus égal à 1, d'où la majoration

$$(15) \quad \mathcal{N}(x) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\exp(-x^2/2)}{2}.$$

Si S désigne un majorant de S_m , on a donc pour s positif l'inégalité

$$(16) \quad N(s) \leq \frac{K}{2} \left(\exp\left(-\frac{m^2 s^2}{2S^2}\right) + \frac{64}{\sqrt{m}} \right).$$

L'inégalité (13) montre alors que, pour tout r_1, \dots, r_m , on a la majoration

$$(17) \quad N(s) \leq \frac{K}{2} \left(\exp(-2ms^2) + \frac{64}{\sqrt{m}} \right).$$

En utilisant (14) et (16), on voit que, si les r_h vérifient $r_h \geq 2/\varepsilon$ ($h = 1, \dots, m$), on a l'inégalité

$$(18) \quad N(s) \leq \frac{K}{2} \left(\exp\left(-\frac{6ms^2}{1+\varepsilon}\right) + \frac{64}{\sqrt{m}} \right).$$

Résumons les résultats obtenus:

LEMME 1. Soient r_1, \dots, r_m des entiers positifs et soit s un réel positif. Soit $N(s)$ le nombre de m -uples (i_1, \dots, i_m) qui vérifient les inégalités (1) et (2), ou, ce qui revient au même, le nombre de m -uples qui vérifient les inégalités (1) et

$$(2'') \quad \frac{i_1}{r_1} + \dots + \frac{i_m}{r_m} \geq \left(\frac{1}{2} + s\right)m.$$

Alors, on a l'encadrement

$$(19) \quad \left| \frac{N(s)}{(r_1+1) \dots (r_m+1)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{sm/S_m}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right| \leq \frac{32}{\sqrt{m}},$$

où $S_m^2 = \frac{m}{12} + \sum_{h=1}^m \frac{1}{6r_h}.$

En particulier, on a toujours la majoration

$$(20) \quad N(s) \leq \frac{1}{2} (r_1+1) \dots (r_m+1) \left(\exp(-2ms^2) + \frac{64}{\sqrt{m}} \right).$$

De plus, pour tout ε positif fixé, on a l'inégalité

$$(21) \quad N(s) \leq \frac{1}{2} (r_1+1) \dots (r_m+1) \left(\exp\left(-\frac{6ms^2}{1+\varepsilon}\right) + \frac{64}{\sqrt{m}} \right)$$

dès que les r_h vérifient les inégalités

$$r_h \geq \frac{2}{\varepsilon}, \quad h = 1, \dots, m.$$

2. Construction du polynôme d'approximation. Auparavant, rappelons deux définitions. Si A est un polynôme à coefficients entiers, soit

$$A = \sum a_{i_1, \dots, i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m},$$

on appelle *hauteur* de A , et on note $|A|$, la quantité $\max |a_{i_1, \dots, i_m}|$. Soit ξ un nombre algébrique de degré f . A ξ correspond un seul polynôme à coefficients entiers de degré f , soit

$$F(x) = F_0 X^f + \dots + F_f,$$

tel que F_0 soit positif et que les F_i soient premiers entre eux dans leur ensemble. On appelle *hauteur de ξ* , la hauteur du polynôme F .

Nous pouvons maintenant énoncer le

LEMME 2. *On conserve les notations du lemme 1. Soit ξ un nombre algébrique de degré f . Supposons que s vérifie la condition*

$$N(s) \leq \frac{(r_1 + 1) \dots (r_m + 1)}{(1 + \varepsilon)f + 2},$$

où ε est un nombre réel positif donné. Alors, il existe une constante c , qui ne dépend que de ε et de la hauteur de ξ , telle qu'il existe un polynôme non nul à coefficients entiers,

$$A = \sum_{0 \leq i_1 \leq r_1} \dots \sum_{0 \leq i_m \leq r_m} a_{i_1 \dots i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m},$$

qui possède les propriétés suivantes:

1. $|A| \leq c^{r_1 + \dots + r_m}$.
2. Si les indices i_1, \dots, i_m vérifient l'inégalité

$$\left| \sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \right| \geq sm,$$

alors $a_{i_1 \dots i_m}$ est nul.

3. Pour tout m -uplet (j_1, \dots, j_m) tel que

$$0 \leq j_1 \leq r_1, \quad \dots, \quad 0 \leq j_m \leq r_m \quad \text{et} \quad \sum_{h=1}^m \frac{j_h}{r_h} \leq \left(\frac{1}{2} - s \right) m,$$

on a

$$A_j(\xi, \dots, \xi) = 0,$$

où A_j désigne le polynôme à coefficients entiers

$$A_j = \frac{1}{j_1! \dots j_m!} \frac{\partial^{j_1 + \dots + j_m}}{\partial X_1^{j_1} \dots \partial X_m^{j_m}}.$$

4. En tout point (x_1, \dots, x_m) , on a

$$|A_j(x_1, \dots, x_m)| \leq c^{r_1 + \dots + r_m} (1 + |x_1|)^{r_1} \dots (1 + |x_m|)^{r_m}.$$

Démonstration. Soit a un entier positif qui sera fixé ultérieurement. Considérons l'ensemble des polynômes du type

$$B(X_1, \dots, X_m) = \sum_{0 \leq i_1 \leq r_1} \dots \sum_{0 \leq i_m \leq r_m} b_{i_1 \dots i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m}$$

de hauteur au plus égale à a , à coefficients entiers positifs ou nuls, et qui

vérifient de plus $b_{i_1 \dots i_m} = 0$ pour tout multi-indice pour lequel on a l'égalité

$$\left| \sum_{h=1}^m \left(\frac{i_h}{r_h} - \frac{1}{2} \right) \right| \geq sm.$$

D'après le choix de s , cette dernière condition impose l'annulation d'au plus

$$\frac{2}{(1+\varepsilon)f+2} (r_1+1) \dots (r_m+1)$$

coefficients b_{i_1, \dots, i_m} .

Il y a donc au moins

$$M = (a+1)^{(1+\varepsilon)f((1+\varepsilon)f+2)^{-1}(r_1+1)\dots(r_m+1)}$$

polynômes B .

On voit facilement que les polynômes $B_j(X, X, \dots, X)$ ont leurs coefficients majorés en module par $a \cdot 2^{r_1 + \dots + r_m}$. Pour tout $j = (j_1, \dots, j_m)$ il est clair qu'il existe des entiers $B_\varphi^{(j)}$ tels que

$$F_0^{r_1 + \dots + r_m} B_{j_1, \dots, j_m}(\xi, \dots, \xi) = \sum_{\varphi=0}^{f-1} B_\varphi^{(j)} \xi^\varphi.$$

On démontre facilement que les $B_\varphi^{(j)}$ sont majorés en module par $ac_1^{r_1 + \dots + r_m}$, où c_1 est une constante qui ne dépend que de la hauteur de ξ .

Considérons j vérifiant les inégalités

$$(22) \quad 0 \leq j_1 \leq r_1, \quad \dots, \quad 0 \leq j_m \leq r_m, \quad \sum_{h=1}^m \frac{j_h}{r_h} \leq \left(\frac{1}{2} - s \right) m.$$

D'après le choix de s , il y a au plus

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)f+2} (r_1+1) \dots (r_m+1)$$

valeurs de j possibles.

Le nombre de valeurs distinctes $B_j(\xi, \dots, \xi)$ est donc au plus égal à

$$M^* = (ac_1^{r_1 + \dots + r_m})^{(r_1+1)\dots(r_m+1)f((1+\varepsilon)f+2)^{-1}}.$$

Il suffit de choisir a égal à $c_1^{(r_1+1)\dots(r_m+1)\varepsilon^{-1}}$ pour que M soit strictement supérieur à M^* ; autrement dit, il existe alors deux polynômes \bar{B} et $\overline{\bar{B}}$ distincts tels que, pour tout j vérifiant les inégalités (22), on ait

$$\bar{B}_\varphi^{(j)} = \overline{\bar{B}}_\varphi^{(j)} \quad \text{pour } \varphi = 0, 1, \dots, f-1.$$

Il est alors facile de vérifier que le polynôme $A = \bar{B} - \overline{\bar{B}}$ vérifie les propriétés énoncés dans le lemme. (La démonstration diffère peu de celle de Mahler, voir [2], p. 101-105.)

3. Une généralisation d'un théorème de Cugiani-Mahler. Énonçons d'abord le résultat que nous nous proposons de démontrer :

THÉORÈME 1. *Soit ξ un nombre algébrique réel non nul de degré f . Soient g' et g'' deux entiers ≥ 2 premiers entre eux; soient λ, μ deux réels qui vérifient les inégalités*

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda + \mu > 0.$$

Soient c_1, c_2, c_3 des constantes positives. On pose, pour η positif fixé,

$$\varepsilon(H) = \alpha(\log \log \log H)^{-1/2},$$

où

$$\alpha = 4 \left(\log \left(\frac{f+2}{2} \right) (\log 2)(1+\eta)/6 \right)^{1/2}.$$

On suppose qu'il existe une suite Σ de rationnels distincts $K^{(h)}$ qui vérifient les conditions

$$K^{(h)} = \frac{P^{(h)}}{Q^{(h)}} \quad \text{avec} \quad (P^{(h)}, Q^{(h)}) = 1, \quad H^{(h)} = \max(P^{(h)}, Q^{(h)}) > \exp(e),$$

tels que pour tout h on ait les inégalités

$$|K^{(h)} - \xi| \leq c_1 (H^{(h)})^{-(\lambda + \mu + \varepsilon(H^{(h)}))}$$

et

$$|P^{(h)}|_{g'} \leq c_2 (H^{(h)})^{\lambda-1}, \quad |Q^{(h)}|_{g''} \leq c_3 (H^{(h)})^{\mu-1}.$$

Alors, si ϱ est un réel qui vérifie $1 \leq \varrho < 2^\eta$, on a

$$\limsup \frac{\log H^{(h+1)}}{(\log H^{(h)})^\varrho} = \infty.$$

Remarques. 1. Dans son ouvrage [2], Mahler démontre un théorème un peu moins fort où α est remplacé par $5\sqrt{\log 4f}$ et où ϱ est égal à 1. Dans [4], on trouve le théorème 1 à ceci près que α est remplacé par

$$\alpha' = \alpha (\log(f+2)/\log(f+2)/2)^{1/2}$$

(donc $\alpha' > \alpha$).

2. La démonstration du théorème 1 utilise l'inégalité (21) du lemme 1. En utilisant l'estimation (19), on peut, quitte à compliquer encore un peu plus l'énoncé du théorème 1, améliorer la valeur de α en fonction de f en remplaçant α par $4(\beta \log 2(1+\eta))^{1/2}$, où β vérifie $\mathcal{N}(-\sqrt{12}\beta) = (2+f)^{-1}$.

Démonstration du théorème. La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème 1 de Mahler ([2], p. 169). Elle consiste à reprendre la démonstration du théorème 1 de [4], mais en utilisant le lemme 1 du présent article, au lieu du lemme 3 de [4].

En utilisant le théorème 1 (cf. [2], p. 169), Mahler démontre le résultat suivant:

THÉORÈME. *Soit p un nombre premier et q un entier tel que $p > q \geq 2$. Soit $N = (n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, \dots)$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, tels que*

$$(a) \quad \left\| \left(\frac{p}{q} \right)^n \right\| \leq \exp \left(- \frac{10n \log p}{(\log \log n)^{1/2}} \right) \quad \text{si } n \in N,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Alors

$$(b) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n^{(k+1)}}{n^{(k)}} = \infty.$$

Dans [4], nous avons démontré un théorème analogue où la condition (a) était remplacée par

$$(a.1) \quad \left\| \left(\frac{p}{q} \right)^n \right\| \leq \exp \left(- \frac{\theta n \log p}{(\log \log n)^{1/2}} \right),$$

où

$$\theta = 4 \left(\frac{\log 3 \log 2}{6} (1 + \eta) \right)^{1/2}, \quad \eta > 0, \quad \text{si } n \in N,$$

et où la conclusion (b) était remplacée par

$$(b.1) \quad \lim \frac{n^{(k+1)}}{(n^{(k)})^e} = \infty, \quad \text{si } 1 \leq e < 2^\eta.$$

Si on reprend la démonstration du théorème précédent de Mahler, mais en utilisant le théorème 1, amélioré de plus par la remarque 2, on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Les notations étant les mêmes que dans le théorème de Mahler ci-dessus, si on suppose que pour tout $n \in N$, on a*

$$(a.2) \quad \left\| \left(\frac{p}{q} \right)^n \right\| \leq \exp \left(- \frac{\theta' n \log p}{(\log \log n)^{1/2}} \right), \quad \text{où } \theta' = 0,43(1 + \eta)^{1/2}, \eta > 0,$$

alors la suite N vérifie la condition

$$(b.2) \quad \limsup \frac{n^{(k+1)}}{(n^{(k)})^e} = \infty \quad \text{pour tout } e \text{ tel que } 1 \leq e < 2^\eta.$$

On peut remarquer que, dans la condition (a.1), θ a pour valeur approchée $\theta \simeq 1,4(1 + \eta)^{1/2}$.

TRAVAUX CITÉS

- [1] W. Feller, *An introduction to probability theory and applications*, Vol. 2, 1968 (3-ème édition).
- [2] K. Mahler, *Lectures on diophantine approximations*, Part 1, Ann Arbor 1961.
- [3] M. Mignotte, *Approximations diophantiennes et nombres transcendants*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 1970-1971, No. 22.
- [4] – *Une généralisation d'un théorème de Cugiani-Mahler*, Acta Arithmetica 22 (1972), p. 57-67.
- [5] T. Schneider, *Über die Approximation algebraischer Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 175 (1936), p. 182-192.

Reçu par la Rédaction le 14. 11. 1972
