C O L L O Q U I U M M A T H E M A T I C U M

VOL. XXXI 1974 FASC. 2

ОБ АЛГЕБРАХ ФОРМУЛ СЧЁТНО КАТЕГОРИЧНЫХ ТЕОРИЙ

Е. А. ПАЛЮТИН (НОВОСИБИРСК)

В этой заметке мы построим пример разрешимой счётно категоричной теории T, для которой функция $a_n(T)$ — мощность алгебры $F_n(T)$ формул от n переменных — не общерекурсивна. Это опровергает гипотезу P 818 Вашкевича [2].

Сигнатура теории T будет состоять из предикатов P_i^k, $k \geqslant 1$, $i \geqslant 0$, где верхний индекс обозначает местность предиката. Формулы вида $P_m^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, $x_i = x_j$, $\neg P_m^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ и $\neg(x_i = x_j)$ будем называть *базисными*. Через $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ будем обозначать формулу R, все свободные переменные которой находятся среди $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Конъюнкцию базисных формул $Q(x_1, \ldots, x_n)$ назовём *описанием*. Конъюнктивный член описания Q будем называть просто *членом* Q.

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ не вычислится за меньше чем } y \text{ шагов,} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где φ_x — частично рекурсивная функция с номером x [1]. По тезису Чёрча, $f(x, y)$ общерекурсивна. Будем писать $i \overset{k}{\sim} j$, если $f(k, i) = f(k, j)$. Две базисные формулы R_1 и R_2 назовём *эквивалентными* в следующих двух случаях:

(а) $R_1 = P_n^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ и $R_2 = P_m^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ для $m \overset{k}{\sim} n$;

(б) $R_1 = \neg P_n^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ и $R_2 = \neg P_m^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ для $m \overset{k}{\sim} n$.

Описание $Q(x_1, \ldots, x_n)$ назовём *n-типом*, если оно удовлетворяет следующим условиям: (а) не содержит члена вместе с его отрицанием, (б) не содержит члена $x_{i_r} = x_{i_t}$ вместе с членом $P_m^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, где $r \neq t$, $1 \leqslant r$, $t \leqslant k$, (в) не содержит двух вхождений эквивалентных членов, (г) для любых $k, m \leqslant n$ либо $x_k = x_m$ либо $\neg(x_k = x_m)$ являются членами Q, причём если $k = m$, то членом Q является $x_k = x_m$.

Формулу $\forall x_1(x_1 = x_1)$ назовём *0-типом*. Если Q — описание, то через $Q^{(k)}$ будем обозначать конъюнкцию членов Q с переменными из множества $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. При этом конъюнкцию пустого множества членов будем полагать равной 0-типу. Очевидно, что если Q является n-типом, то $Q^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, является $(k-1)$-типом.

Аксиомами теории T будут универсальные замыкания формул из множества $X \cup Y \cup Z$, где

$$X = \{(P_n^k(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow P_m^k(x_1, \ldots, x_k)) \mid n \overset{k}{\sim} m,\ k \geqslant 1\},$$

$$Y = \{(x_i = x_j \to \neg P_n^k(x_1, \ldots, x_k)) \mid i \neq j;\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant k;\ n \geqslant 0;\ k \geqslant 1\},$$

$$Z = \{(Q^{(n)} \to \exists x_n Q) \mid Q - n\text{-тип},\ n \geqslant 1\}.$$

Так как множество гёделевских номеров n-типов и отношение $n \overset{k}{\sim} m$ рекурсивны, то T аксиоматизируема. Мы будем отождествлять элементы $X \cup Y \cup Z$ с их универсальными замыканиями. Из аксиом теории T следует, что любая формула эквивалентна в T дизъюнкции n-типов. В частности, любая замкнутая формула эквивалентна в T либо 0-типу, либо его отрицанию. Следовательно T полна. Так как число классов эквивалентности по отношению $\overset{k}{\sim}$ не больше двух, то число неэквивалентных в T n-типов конечно и, следовательно, алгебра $F_n(T)$ конечна. По теореме Рыль-Нардзевского T счётно категорична. Разрешимость T следует из аксиоматизируемости и полноты.

Покажем совместность T. Занумеруем аксиомы множества Z

$$R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots, \qquad k \in \omega,$$

так, чтобы каждая аксиома повторялась бесконечное число раз. Так как аксиомы T являются $\forall\exists$-формулами, а $\forall\exists$-формулы сохраняются при переходе к объединению возрастающей по включению последовательности моделей, то достаточно доказать следующее утверждение:

Любую модель B_k аксиом множества $X \cup Y$ можно расширить до модели $B_{k+1} \supseteq B_k$ аксиом множества $X \cup Y$, на которой истинна аксиома R_k.

Пусть $R_k = (Q^{(n)} \to \exists_{x_n} Q)$. Если $x_n = x_m$ для некоторого $m < n$ является членом Q, то R_k — тождественно истинная в B_k формула и полагаем $B_{k+1} = B_k$. Пусть теперь $x_n = x_m$ не является членом Q ни для какого $m < n$ и X_1 — множество $(n-1)$-ок $\bar a$, выполняющих $Q^{(n)}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в модели B_k. Для каждой $(n-1)$-ки $\bar a \in X_1$ вводим новые, различные при различных $\bar a$ символы $b_{\bar a}$ и определяем расширение $A_1 \supseteq B_k$, $A_1 \setminus B_k = \{b_{\bar a} \mid \bar a \in X_1\}$, так чтобы в A_1 выполнялись аксиомы множества $X \cup Y$ и n-ка $\langle \bar a, b_{\bar a}\rangle$ выполняла формулу $Q(x_1, \ldots, x_n)$. В силу свойств (а)-(в) n-типа Q это можно сделать. Продолжая эту процедуру, получим возрастающую последовательность

$$B_k \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_m \subseteq \ldots \qquad m \in \omega,$$

моделей множества аксиом $X \cup Y$, такую, что для любого $m \in \omega$ и любой $(n-1)$-ки $\bar a \in A_m^{n-1}$ формула $R_k(\bar a)$ истинна в A_{m+1}. Очевидно, что $B_{k+1} = \bigcup_{m \in \omega} A_m$ будет иметь требуемые свойства.

Покажем теперь, что $a_n(T)$ не общерекурсивна. Предположим, что она общерекурсивна. Тогда функция β, отображающая n в число атомов $F_n(T)$ также общерекурсивна. Так как β общерекурсивна, а T аксиоматизируема, то можно выписать n-типы, являющиеся представителями всех атомов $F_n(T)$. Если $i \overset{n}{\sim} j$ для любых P_i^n и P_j^n из этих n-типов, то $\varphi_n(n)$ расходится. В противном случае $\varphi_n(n)$ сходится. Таким образом, можем вычислить характеристическую функцию множества $\{x \mid \varphi_x(x)$ сходится$\}$, что невозможно [1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective computability*, New York 1967 (русский перевод: *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Москва 1972).

[2] J. Waszkiewicz, *On cardinalities of algebras of formulas for ω_0-categorical theories*, Colloquium Mathematicum 27 (1973), стр. 7-11.

Reçu par la Rédaction le 16. 7. 1973