COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 1

# SUR LA CONSTRUCTION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE DE L'ÉQUATION PARABOLIQUE AUX COEFFICIENTS NON BORNÉS

PAR

J. CHABROWSKI (KATOWICE)

Aronson et Besala (voir [1]) ont construit récemment la solution fondamentale de l'équation de la forme

$$(1)\qquad LU = \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{a_{ij}(t,x)\frac{\partial U}{\partial x_i}\right\} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\{a_j(t,x)U\} - \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\cdot\frac{\partial U}{\partial x_j} - c(t,x)U = 0$$

où $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$, $i,j = 1,\ldots,n$ et $x = (x_1,\ldots,x_n)$ dont les coefficients admettent la croissance suivante à l'infini:

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right|, |a_j|,\ |b_j| \leqslant \mathrm{const}\cdot(|x|^2+1)^{1/2},$$

$$|a_{ji}| \leqslant \mathrm{const}\cdot(|x|^2+1)^{\frac{2-\lambda}{2}}, \qquad c+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x_j},$$

$$c-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial x_j} \leqslant \mathrm{const}\cdot(|x|^2+1)^{\lambda/2}, \qquad \text{où} \qquad \lambda\in[0,2],\ |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

La communication présente contient la construction de la solution fondamentale sous les hypothèses plus générales (théorème 1) et celle d'Aronson et Besala qui en résulte comme un cas particulier (exemple I).

**1.** Introduisons d'abord les hypothèses et les définitions. Soit $A(s)$ une fonction de classe $C^1$ dans $[1,\infty)$ et satisfaisant aux conditions

(a) $A(s) > 0$ pour $s \geqslant 1$, (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} = \infty$,

(c) $\displaystyle\sqrt{A(s)} \leqslant M_1 s\int_1^s \frac{dt}{\sqrt{A(t)}}$ et (d) $\displaystyle\left|\frac{d}{ds}\sqrt{A(s)}\right| \leqslant M_2\int_1^s\frac{dt}{\sqrt{A(t)}}$.

Les coefficients de l'équation (1) seront supposés soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les fonctions $a_{ij}$, $\partial a_{ij}/\partial x_j$, $a_j$, $\partial a_j/\partial x_j$, $b_j$, $\partial b_j/\partial x_j$ et $c$ sont définies et localement hölderiennes par rapport aux variables $(t, x)$ dans la couche $H = (0, T] \times E_n$ ($E_n$ étant l'espace euclidien à $n$ dimensions et $T$ un nombre positif) et de plus

$$\left|\frac{\partial a_{ij}(t, x)}{\partial x_j}\right|, \ |a_j(t, x)|, \ |b_j(t, x)| \leqslant K_2 \sqrt{A(r_1)} \int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}},$$

$$c(t, x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j(t, x)}{\partial x_j}, \qquad c(t, x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j(t, x)}{\partial x_j} \leqslant K_3 \left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2,$$

où $r_1(x) = (|x|^2+2)^{1/2}$, $i,j = 1, \ldots, n$ ($K_2$ et $K_3$ étant des constantes positives).

II. Il existe des constantes positives $\nu$ et $K_1$ telles que

$$\nu |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leqslant K_1 A(r_1) |\xi|^2$$

pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et tout $(t, x) \in H$.

Une fonction $\Gamma(t, x; \tau, \xi)$ définie pour $x, \xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ est dite *la solution fondamentale de l'équation* (1) lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes:

1° $\Gamma(t, x; \tau, \xi)$, en tant que fonction de $(t, x)$ pour chaque point fixé $(\tau, \xi) \in [0, T) \times E_n$, possède les dérivées $\Gamma x_i$, $\Gamma x_i x_j$ (où $i, j = 1, \ldots, n$) et $\Gamma_t$ continues dans $(\tau, T] \times E_n$, et elle y satisfait à l'équation $L\Gamma = 0$).

2° Si $h(x)$ est une fonction continue au support compact dans $E_n$, alors

$$\lim_{(t,x) \to (\tau+, x_0)} \int_{E_n} \Gamma(t, x; \tau, \xi) h(\xi) d\xi = h(x_0) \qquad \text{pour tout } x_0 \in E_n.$$

**2.** La méthode employée sera celle d'Aronson et Besala de leur travail [1]. Définissons pour un $\alpha > 0$ la fonction

$$g_\alpha(t, x) = (\alpha + \beta t) \left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2$$

pour $(t, x) \in \bar{H}_\alpha = [0, T_\alpha] \times E_n$, où les constantes positives $\beta(\alpha)$ et $T_\alpha$ seront choisies respectivement tout à l'heure, et posons

$$u_\alpha(t, x) = e^{-g_\alpha(t,x)} U(t, x)$$

pour tout $(t, x) \in H_\alpha$. La fonction $u_\alpha$ satisfait à l'équation

$$LU = e^{g_\alpha} \left\{\frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right) - \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} - c^\alpha u_\alpha\right\} = e^{g_\alpha} L^\alpha u_\alpha,$$

où

$$a_j^a = a_j + b_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g_a}{\partial x_i},$$

$$c^a = c + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_j}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g_a}{\partial x_i}\frac{\partial g_a}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)\frac{\partial g_a}{\partial x_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\frac{\partial g_a}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 g_a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial g_a}{\partial t}.$$

Vu que $r_1(x) \geqslant \sqrt{2}$, on peut admettre que $\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}} \geqslant 1$. On a en vertu des hypothèses I et II

$$c^a(t,x) \leqslant K_3\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + K_1 A(r_1)|\nabla_x g_a|^2 + (2+n)K_2\sqrt{A(r_1)}\times$$

$$\times \int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial g_a}{\partial x_i}\right| + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 g_a}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial g_a}{\partial t} = C^a(t,x)$$

où

$$\nabla_x g_a = \left(\frac{\partial g_a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_a}{\partial x_n}\right).$$

On en tire par un calcul simple

$$C^a(t,x) \leqslant K_3\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + 4(a+\beta t)^2 K_1\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 +$$

$$+2(a+\beta t)(2+n)nK_2\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + 2(a+\beta t)K_1 M_1\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 +$$

$$+2(a+\beta t)K_1 M_2\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 + (2a+\beta t)K_1 +$$

$$+2n(a+\beta t)K_1 M_1\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2 - \beta\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2$$

$$\leqslant \{K_3 + 4(a+\beta t)^2 K_1 + 2(a+\beta t)(2+n)nK_2 + 2(a+\beta t)K_1 M_1 +$$

$$+2(a+\beta t)K_1 M_2 + 2(a+\beta t)K_1 + 2n(a+\beta t)K_1 M_1 - \beta\}\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2$$

$$= Q(t)\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2.$$

Choisissons à présent les constantes $\beta(a)$ et $T_a$ en posant

$$\beta(a) = 2\{K_3+4a^2K_1+2n(2+n)K_2a+2aK_1M_1+2aK_1M_2+2aK_1 \\ +2naK_1M_1\},$$

$$T_a = \min(T, \hat{T}_a),$$

où $\hat{T}_a$ est la racine positive de l'équation $Q(t) = -\beta(a)/4$. Il est évident que $C^a(t, x) < 0$ dans $H_a$. Remarquons que $T_a$ est une fonction non croissante par rapport au paramètre $a$ et que de plus

$$\lim_{a\to\infty} T_a = 0, \quad \lim_{a\to 0} T_a = T_0(K_1, K_2, K_3, M_1, M_2).$$

On a en particulier $0 < T_a \leqslant T_0$ pour $a \in (0, \infty)$.

Il est clair que $LU = 0$ dans $H_a$ si et seulement si $L^a u_a = 0$. Si $\gamma_a(t, x; \tau, \xi)$ est la solution fondamentale de l'équation $L^a u = 0$, la fonction

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = e^{g_a(t,x)-g_a(\tau,\xi)}\gamma_a(t, x; \tau, \xi)$$

est la solution fondamentale de l'équation $LU = 0$. Il suffit donc de construire la solution fondamentale de l'équation $L^a u = 0$.

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites, il existe la solution fondamentale de l'équation $L^a u = 0$ définie pour $x, \xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$. Cette solution fondamentale possède les propriétés suivantes*:

$$\int_{E_n} \gamma_a(t, x; \tau, \xi)d\xi \leqslant 1 \quad \textit{pour} \quad (t, x) \in (\tau, T_a] \times E_n, \tag{2}$$

$$0 \leqslant \gamma_a(t, x; \tau, \xi) \leqslant k(t-\tau)^{-n/2} \quad \textit{pour} \quad x, \xi \in E_n \textit{ et } 0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a \tag{3}$$

(*la constante $k > 0$ dépendant de $n$ et $\nu$ mais ne dépendant pas de $a$*).

Démonstration. La démonstration est strictement analogue à celle du théorème I dans [1]; c'est pourquoi je la présente ici en abrégé.

Soit $\Sigma_a^m = \{(|x| < m) \times (0, T_a]\}$ pour $m = 1, 2, \ldots$ Les coefficients de l'opérateur $L^a$ sont hölderiens dans $\Sigma_a^m$; il existe donc la fonction de Green $\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)$ (voir [3]). On sait qu'elle l'est aussi par rapport aux variables $\tau, \xi$ pour l'opérateur $\tilde{L}^a$, adjoint à $L^a$, qui prend la forme

$$\tilde{L}^a v = -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial \xi_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_j^a \frac{\partial v}{\partial \xi_j} - \tilde{c}^a v,$$

où

$$\tilde{c}^a = c - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial \xi_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g_a}{\partial \xi_i}\frac{\partial g_a}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)\frac{\partial g_a}{\partial \xi_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_j}\frac{\partial g_a}{\partial \xi_j} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 g_a}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - \frac{\partial g_a}{\partial \tau}.$$

Il est évident que $\tilde{c}^a(t, x) \leqslant C^a(t, x) < 0$ dans $H_a$. Les coefficients $c^a$ et $\tilde{c}^a$ sont négatifs; en appliquant donc le principe d'extremum, il est facile de montrer que

(4) $$\int_{|\xi|<m} \gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\,d\xi \leqslant 1 \quad \text{pour } |x| \leqslant m \text{ et } 0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a,$$

(5) $$\int_{|x|<m} \gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\,dx \leqslant 1 \quad \text{pour } |\xi| \leqslant m \text{ et } 0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$$

et qu'en outre $\gamma_a^{m+1}(t, x; \tau, \xi) \geqslant \gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)$ dans $\bar{\Sigma}_a^m$ pourvu que $\xi \in \Sigma_a^m$.

En posant $\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi) = 0$ pour $|x|$ ou $|\xi| \geqslant m$, on a

(6) $$0 \leqslant \gamma_a^1(t, x; \tau, \xi) \leqslant \gamma_a^2(t, x; \tau, \xi) \leqslant \ldots \leqslant \gamma_a^m(t, x; \tau, \xi) \leqslant \gamma_a^{m+1}(t, x; \tau, \xi) \leqslant \ldots$$

pour tous $x, \xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$. Il résulte de (4), (5) et (6) que la suite $\{\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\}$ converge presque partout vers une limite qui est finie presque partout. Pour démontrer l'inégalité (3), on peut utiliser la méthode employée par Nash dans son travail [5], à savoir: $(\tau, \xi) \in [0, T_a) \times \times E_n$ étant un point fixé arbitrairement, posons

$$E_a^m(t) = \int_{|x|<m} \{\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\}^2 dx$$

pour $t > \tau$, où m est choisi de façon que $|\xi| < m$. Alors

$$\frac{d}{dt} E_a^m(t) = 2 \int_{|x|<m} \gamma_a^m \frac{\partial}{\partial t} \gamma_a^m dx$$

$$= 2 \int_{|x|<m} \gamma_a^m \left\{ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial \gamma_a^m}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n a_j^a \frac{\partial \gamma_a^m}{\partial x_j} + c^a \gamma_a^m \right\} dx.$$

Les fonctions $\gamma_a^m$ et $\nabla_x \gamma_a^m$ sont continues pour $|x| < m$ et $t > \tau$; on a en outre $\gamma_a^m = 0$ pour $|x| = m$ (voir [3]). Par conséquent, on a en vertu du théorème de Green

$$\frac{d}{dt} E_a^m(t) = -2 \int_{|x|<m} a_{ij} \frac{\partial \gamma_a^m}{\partial x_i} \frac{a\gamma_a^m}{\partial x_j} dx + 2 \int_{|x|<m} \left( c^a - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j^a}{\partial x_j} \right) (\gamma_a^m)^2 dx,$$

où

$$c^a - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j^a}{\partial x_j}$$

$$= c + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial g_a}{\partial x_i} \frac{\partial g_a}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) \frac{\partial g_a}{\partial x_j} - \frac{\partial g_a}{\partial t} \right\}$$

$$\leqslant C^a(t, x) < 0$$

dans $H_a$. L'hypothèse II et la dernière inégalité entraînent

(7) $$\frac{d}{dt} E^m(t) \leqslant -2\nu \int_{|x|<m} |\Delta_x \gamma_a^m|^2 dx.$$

La fonction $\gamma_a^m$ appartient à la classe $W^{1/2}(|x| < m)$ et elle est continue pour $|x| < m$ et $\gamma_a^m = 0$ pour $|x| = m$; on a par conséquent $\gamma_a^m \in W_0^{1,2}(|x|<m)$ (voir [6], p. 104, théorème 2). En posant donc $\gamma_a^m = 0$ pour $|x| \geqslant m$, on a $\gamma_a^m \in W_0^{1,2}(E_n)$. Il résulte de l'inégalité de Nirenberg (voir [6], p. 68, théorème 4) que

$$\int_{|x|<m} (\gamma_a^m)^2 dx \leqslant \beta \Big( \int_{|x|<m} |\nabla_x \gamma_a^m|^2 dx \Big)^{n/(2+n)} \Big( \int_{|x|<m} \gamma_a^m dx \Big)^{4/(n+2)},$$

où $\beta$ est une constante dépendant de $n$. Il est clair que

$$\int_{|x|<m} |\nabla_x \gamma_a^m|^2 dx \geqslant \beta^{-(1+2/n)} (E_a^m)^{1+2/n} = \tilde{\beta}^{-1} (E_a^m)^{1+2/n},$$

d'où en vertu de (7)

$$\frac{d}{dt} \{(E_a^m)^{-2/n}\} \geqslant \frac{4\nu}{\tilde{\beta} n}.$$

On sait que $\lim\limits_{t\to\tau+} E_a^m(t) = \infty$ (voir [3]); en intégrant donc dans $(\tau, t)$, on trouve

$$(8) \qquad \int_{|x|<m} \{\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\}^2 dx \leqslant \left(\frac{\tilde{\beta} n}{4\nu}\right)^{n/2} (t-\tau)^{-n/2} \quad \text{pour } t > \tau$$

et pareillement

$$(9) \qquad \int_{|\xi|<m} \{\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi)\}^2 d\xi \leqslant \left(\frac{\tilde{\beta} n}{4\nu}\right)^{n/2} (t-\tau)^{-n/2} \quad \text{pour } t > \tau.$$

D'une part, les fonctions $\gamma_a^m$ satisfont à l'identité de Kolmogorov

$$\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi) = \int_{|\xi|<m} \gamma_a^m\left(t, x; \frac{t+\tau}{2}, y\right) \gamma_a^m\left(\frac{t+\tau}{2}, \xi; \tau, y\right) dy$$

pour $|x|$, $|\xi| < m$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$. D'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwartz, on conclut de (8) et (9) que

$$(10) \qquad \gamma_a^m(t, x; \tau, \xi) \leqslant \left(\frac{\tilde{\beta} n}{4\nu}\right)^{n/2} (t-\tau)^{-n/2} = k(t-\tau)^{-n/2}.$$

Si l'on prolonge les fonctions $\gamma_a^m$ en posant $\gamma_a^m = 0$ pour $|x|$ ou $|\xi| \geqslant m$, l'inégalité (10) reste valable pour tous $x$, $\xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$. Observons que la constante $k$ dans l'inégalité (10) ne dépend pas de $a$ et $m$. La suite $\gamma_a^m$ étant non-décroissante et bornée, il en existe la limite pour $(t, x)$, $(\tau, \xi) \in \bar{H}_a$ où $t > \tau$, à savoir $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma_a^m = \gamma_a$. Le passage à la limite dans (9), (4) et (5) conduit aux inégalités $0 \leqslant \gamma_a(t, x; \tau, \xi) \leqslant k(t-\tau)^{-n/2}$, $\int_{E_n} \gamma_a(t, x; \tau, \xi) d\xi \leqslant 1$ et $\int_{E_n} \gamma_a(t, x; \tau, \xi) dx \leqslant 1$ pour tous $x$, $\xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$.

Reste à prouver que $\gamma_a$ est la solution fondamentale. Soient $(\tau, \xi) \in [0, T_a) \times E_n$ un point fixé et $D$ un domaine borné arbitraire contenu dans $(\tau, T_a] \times E_n$. Choisissons un domaine borné $\mathscr{D}$ tel que $\bar{D} \subset \mathscr{D} \subset \bar{\mathscr{D}} \subset (\tau, T_a] \times E_n$. On a $|\xi| < m$ et $\bar{\mathscr{D}} \subset \Sigma_a^m$ pour $m$ suffisamment grand; en outre, $L^a \gamma_a^m = 0$ pour $(t, x) \in \bar{\mathscr{D}}$ et

$$\gamma_a^m(t, x; \tau, \xi) \leqslant k\,[\min_{(t,x)\in\bar{\mathscr{D}}}(t-\tau)]^{-n/2}.$$

Les estimations intérieures de Schauder et Friedman (voir [3]) permettent de choisir une suite $\gamma_a^{m\nu}$ qui converge uniformément vers $\bar{\gamma}_a$ dans $\bar{D}$ avec ses dérivées $\partial/\partial x_i$, $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ et $\partial/\partial t$ où $i, j = 1, \ldots, n$. Il est clair que $L^a \bar{\gamma}_a = 0$, mais d'après la convergence monotone de toute la suite $\gamma_a^m$ vers $\gamma_a$, on a $\bar{\gamma}_a = \gamma_a$, donc $L^a \gamma_a = 0$ pour $x, \xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$.

Tout comme dans le travail [1], on prouve que si $x_0$ appartient à l'intérieur d'un ensemble compact $\Sigma$, on a

$$\lim_{(t,x)\to(\tau+,x_0)} \int_{\Sigma} \gamma_a(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 1 \tag{11}$$

et que si $x_0$ appartient à l'intérieur d'un ensemble compact $\Sigma_0 \subset \Sigma$, on a

$$\lim_{(t,x)\to(\tau+,x_0)} \int_{\Sigma-\Sigma_0} \gamma_a(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = 0. \tag{12}$$

En utilisant les formules (11) et (12), on établit facilement la propriété 2° de la définition de la solution fondamentale.

*EXEMPLES*

I. Si $A(s) = s^{2-\lambda}$ où $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, on a $|a_{ij}| = O\big((|x|^2+1)^{(2-\lambda)/2}\big)$, $|b_i| = O\big((|x|^2+1)^{1/2}\big)$ et

$$c = \begin{cases} O\big((|x|^2+1)^{\lambda/2}\big) & \text{pour } \lambda > 0, \\ O\big(\ln^2(|x|^2+2)\big) & \text{pour } \lambda = 0. \end{cases}$$

Ce cas a été traité par Aronson et Besala sous l'hypothèse que $c \leqslant$ const lorsque $\lambda = 0$.

II. Si $A(s) = e^{-2s}$, on a $a_{ij} = O(e^{-2(|x|^2+1)^{1/2}})$, $|b_i| \leqslant$ const, $c = O(e^{(|x|^2+1)^{1/2}})$.

Le théoreme suivant est une conséquence immédiate du théorème 1 qui vient d'être démontré:

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites, il existe pour tout* $a > 0$ *la solution fondamentale de l'équation* (1) *et elle est donnée par la formule*

$$\Gamma(t, x; \tau, \xi) = e^{g_a(t,x)-g_a(\tau,\xi)} \gamma_a(t, x; \tau, \xi)$$

*pour* $x, \xi \in E_n$ et $0 \leqslant \tau < t \leqslant T_a$.

**3.** La solution fondamentale construite dans la section 2 permet de résoudre le problème de Cauchy dans la classe des fonctions ayant la croissance suivante à l'infini:

$$|u(t, x)| \leqslant M \exp K\left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{A(s)}}\right]^2. \tag{13}$$

Désignons en effet par $E_A(K, T)$ la classe des fonctions définies dans $[0, T] \times E_n$ et satisfaisant à l'inégalité (13).

THÉORÈME 3. *Les hypothèses* I *et* II *étant satisfaites, soient $h(x)$ une fonction continue dans $E_n$ de classe $E_A(a, T)$ et $f(t, x)$ une fonction localement hölderienne dans $H$, de classe $E_A(a, T)$. Alors la fonction*

$$U(t, x) = \int_{En} \Gamma(t, x; 0, \xi)h(\xi)d\xi - \int_0^t d\tau \int_{En} \Gamma(t, x; \tau, \xi)f(\tau, \xi)d\xi \tag{14}$$

*est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$LU = f \quad pour\ (t, x) \in (0, T_a] \times E_n, \tag{15}$$

$$U(0, x) = h(x) \quad pour\ x \in E_n \tag{16}$$

*dans la classe $E_A(a + \beta(a)T_a, T_a)$.*

L'unicité en résulte du théorème 2 de [2]. La démonstration que la fonction $U(t, x)$ définie par la formule (14) satisfait à (15) et (16) est tout à fait analogue à celle du théorème III de [1]; c'est pourquoi elle est omise ici.

## *TRAVAUX CITÉS*

[1] D. G. Aronson and P. Besala, *Parabolic equations with unbounded coefficients*, Journal of Differential Equations 3 (1967), p. 1–14.

[2] J. Chabrowski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques dans un domaine non borné*. Annales Polonici Mathematici 22 (1969), p. 27-35.

[3] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Printice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[4] A. N. Il'in, A. S. Kalashnikov and O. A. Olejnik, *Second order linear equations of parabolic type*, Russian Mathematical Surveys 17 (1962), No. 3, p. 1–143.

[5] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, American Journal of Mathematics 80 (1958), p. 931–954.

[6] J. Serrin, *Introduction to differentiation theory* (Lecture Notes), University of Minnesota, 1965.

*Reçu par la Rédaction le 8. 4. 1968*