COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVII 1973 FASC. 2

SUR LES SECTIONS DES HYPERGRAPHES ET SUR LEURS AUTOMORPHISMES

PAR

FRANCESCO SPERANZA (PARMA)

1. Dans cette communication* nous étudions des problèmes qui se rattachent aux sections d'un graphe simpliciel à plusieurs dimensions, c'est-à-dire d'un hypergraphe simple régulier, et aux rapports entre les automorphismes du graphe et ceux de ses sections.

Un *graphe orienté* (généralisé) $[G, (a^i)]$ — ou plus simplement $[G]$ — est une classe G munie d'une famille $(a^i)_{i\in I}$ de surjection de G sur une sous-classe G_0, telles que la restriction de chaque a^i à G_0 se réduise à l'identité. On a donc une application $i\mapsto a^i$, où $a^i\colon G\twoheadrightarrow G_0$, et $a^i_{G_0} = 1_{G_0}$. Nous dirons que $[G, (a^i)]$ *est structuré par la famille* (a^i), ou aussi *par l'ensemble* I. Les éléments de $G-G_0$ sont les *simplexes* du graphe; si x est un simplexe, les $a^i(x)$ sont les *sommets* de x.

Dans la classe des graphes orientés définis sur la même G et structurés par le même I, on introduit la relation $\sim$ que voici:

$[G, (a^i)] \sim [\overline{G}, (\overline{a}^i)]$ si et seulement si, pour tout $x\in G$, il y a une bijection $\lambda_x\colon I\to I$ telle que $\overline{a}^{\lambda_x(i)}(x) = a^i(x)$.

C'est une relation d'équivalence. Les *graphes non orientés* (généralisés) (G) sont ses classes d'équivalence.

Pour un graphe non orienté [4] on emploie encore les termes „sommet" et „simplexe" (ou „arête").

Soient $[G]$, $[\overline{G}]$ ou (G), $(\overline{G})$ deux graphes structurés par le même I. Un *homomorphisme* de $[G]$ dans $[\overline{G}]$ est une application $\varphi\colon G\to\overline{G}$ telle que ([2] et [4])

$$\overline{a}^i\circ\varphi = \varphi\circ a^i \quad \text{pour tout } i\in I.$$

Un *homomorphisme* de (G) dans $(\overline{G})$ est une application $\varphi\colon G\to\overline{G}$ qui est un homomorphisme d'un des graphes orientés de (G) dans un des

* Le travail executé dans le cadre des activités de G. N. S. A. G. A. (Gruppo nazionale per le strutture algebriche e geometriche e loro applicazioni) de C. N. R.

graphes orientés de $(\bar{G})$, c'est-à-dire il y a, pour tout $x \in G$, une bijection $\lambda_x\colon I \to I$ telle que

$$\bar{a}^{\lambda_x(i)}\big(\varphi(x)\big) = \varphi\big(a^i(x)\big).$$

On notera que, si φ est un homomorphisme de (G) dans $(\bar{G})$, il est aussi un homomorphisme de chaque graphe orienté de (G) sur un des graphes orientés de $(\bar{G})$.

Les isomorphismes sont les homomorphismes bijectifs. L'application reciproque d'un isomorphisme est elle-même un isomorphisme [4].

Si $[G, (a^i)]$ et $[G', (a'^i)]$ sont structurés par le même I, nous dirons que $[G', (a'^i)]$ est un *sous-graphe* (*orienté*) de $[G, (a^i)]$ si $G' \subseteq G$ et si a'^i est la restriction de a^i à G'. Nous dirons que (G') est un *sous-graphe* (*non orienté*) de (G) si un des graphes orientés de (G') est un sous-graphe d'un des graphes orientés de (G) (alors tout graphe orienté de (G') est un sous-graphe d'un des graphes orientés de (G)).

Dans la suite de cette section nous considérerons des *graphes non orientés simpliciels*, c'est-à-dire des graphes sans couples de simplexes ayant les mêmes sommets, et telles que les sommets de chaque simplexe soient distingués. Un homomorphisme d'un graphe simpliciel dans un autre — et, par suite, un automorphisme d'un graphe simpliciel — est donc parfaitement déterminé par sa restriction à la classe des sommets.

Si G et I sont finis, on peut identifier un graphe non orienté simpliciel à un *hypergraphe simple régulier* [1]. Si $n+1$ est la cardinalité de I, nous poserons $I = \{1, \ldots, n+1\}$ et (G^n) ($[G^n]$ dans le cas orienté) signifiera un graphe de dimension n.

La *p-section* de (G^n) $(1 \leqslant p \leqslant n)$ est le graphe $(G^n)^{/p}$ de dimension p qui a pour sommets les sommets de (G^n) et pour simplexes les $(p+1)$-ples de sommets (distingués) de (G^n) qui sont les sommets d'un des simplexes de (G^n) au moins [5]. Evidemment

$$\big((G^n)^{/p}\big)^{/q} = (G^n)^{/q}.$$

On peut de même définir le graphe p-section pour un graphe (G) non simpliciel (pour I fini); dans ce cas, on peut aussi définir une autre section conformément aux simplexes ayant les mêmes sommets [5].

Un homomorphisme φ de (G) dans $(\bar{G})$ définit un homomorphisme de $(G)^{/p}$ dans $(\bar{G})^{/p}$ [5]; nous dirons aussi, pour abréger, que *φ est un homomorphisme* de $(G)^{/p}$ dans $(\bar{G})^{/p}$ (cette expression est exacte si l'on considère seulement la restriction φ_0 de φ à G_0). En particulier, les automorphismes de (G) s'identifient à des automorphismes de $(G)^{/p}$, mais dans certains cas il y a des automorphismes de $(G)^{/p}$ qui ne sont pas définis par un automorphisme de (G).

Autrement dit: un (G^n) à s sommets définit une matrice booléenne carrée d'ordre s, si nous posons $a_{jk} = 1$ ou 0, selon que les sommets numerotés par j et k sont des sommets du même simplexe ou ne le sont pas.

Telle matrice ne détermine pas (G^n), mais seulement, à un isomorphisme près, sa 1-section. Par analogie, on peut penser à une matrice booléenne $(p+1)$-dimensionnelle, où $a_{j_1 \dots j_{p+1}} = 1$ si et seulement si les sommets numerotés par $j_1, \dots, j_{p+1}$ sont des sommets du même simplexe: elle détermine $(G^n)^{/p}$ $((G^n)$ pour $p = n)$.

On a ainsi le problème de l'étude des graphes qui admettent une p-section donnée d'avance. Nous appelons *complet* un graphe (G^n) simpliciel tel que, pour tout $(n+1)$-ple $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ de sommets, il y ait un simplexe dont les sommets sont les a_k. Alors, un graphe simpliciel (G^p) est isomorphe à la p-section d'un graphe simpliciel de dimension n $(n \geqslant p)$ si et seulement si la condition suivante est vérifiée:

(A) *Pour chaque simplexe x de (G^p), il y a un sous-graphe complet (γ_n^p) de (G^p) à $n+1$ sommets, dont x est un simplexe.*

THÉORÈME 1. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait des graphes (G^n) non isomorphes dont les p-sections sont isomorphes à un graphe donné (G^p) est que (G^p) vérifie la condition* (A) *et que tout simplexe d'un au moins des sous-graphes (γ_n^p) de (G^p) appartienne à un autre (γ_n^p).*

En effet, soit (G^p) un graphe vérifiant la condition (A), et soient $(\bar{\gamma}_n^p)$ les sous-graphes du type (γ_n^p), dont chaque simplexe appartient à un autre sous-graphe (γ_n^p) de (G^p). Considérons les graphes (H^n), dont les sommets sont les sommets de (G^p) et les simplexes sont tous les graphes (γ_n^p), et les graphes (K^n), dont les sommets sont les sommets de (G^p) et les simplexes sont les graphes (γ_n^p), sauf les $(\bar{\gamma}_n^p)$; ils ne sont pas isomorphes, mais leurs p-sections sont isomorphes à (G^p).

Inversement, s'il n'y a aucun sous-graphe du type $(\bar{\gamma}_n^p)$, tous les graphes à n dimensions, dont la p-section est isomorphe à (G^p), sont isomorphes à (H^n), c.q.f.d.

Les valeurs de n et p étant fixées, parmi les graphes qui vérifient les conditions du théorème, les plus simples (c'est-à-dire, ceux qui ont le plus petit nombre de sommets, ou bien de simplexes) sont les (G^p) complets à $n+2$ sommets.

Dans l'ensemble des (G^n) dont les p-sections sont isomorphes à un (G^p) donné l'inclusion détermine une relation d'ordre. Prenons, pour modèle de chacun de ces graphes, celui qui a pour sommets les sommets de (G^p) et dont chaque simplexe est un sous-graphe (γ_n^p) de (G^p). Dans l'ensemble des ces modèles il y a un qui est maximum pour l'inclusion: ses simplexes sont les sous-graphes (γ_n^p). Il y a aussi des (G^n) minima; il peut arriver que:

I. il y a seulement un (G^n) minimum,
II. il y en a plusieurs, isomorphes deux à deux,
III. il y en a plusieurs, pas tous isomorphes.

Pour $n = 2$ et $p = 1$ les trois possibilités sont vérifiées par les graphes suivants (nous écrivons seulement les simplexes; ab est le simplexe dont les sommets sont a, b):

I. $(G^p) = \{ab, bc, ca, ae, ec, cd, bd, bf, fa\}$.

II. $(G^p) = \{ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, cd, cf\}$, pour lequel les (G^n) minimaux sont $\{abe, abd, acf, bcd\}$ et $\{abe, acd, acf, bcd\}$.

III. $(G^p) = \{ab, ac, ad, ae, bc, bd, cd, ce\}$, pour lequel les graphes $\{abd, acd, bcd, ace\}$, $\{abc, acd, abd, ace\}$ sont minimaux, mais ne sont pas isomorphes.

L'ensemble des automorphismes d'un graphe (G^n) est un groupe $\Gamma(G^n)$. Alors (en identifiant chaque automorphisme avec sa restriction à l'ensemble des sommets) on a

$$\Gamma(G^n) \subseteq \Gamma(G^n)^{/n-1} \subseteq \ldots \subseteq \Gamma(G^n)^{/1}.$$

Théorème 2. *Si (H^n) est maximal entre les graphes dont la p-section est isomorphe à un graphe donné, on a (à l'identification usuelle près)*

$$\Gamma(H^n) = \Gamma(H^n)^{/p}.$$

Soit G_0 l'ensemble des sommets de (H^n). Soit φ un automorphisme de $(H^n)^{/p}$. Si x est un simplexe de (H^n), dont les sommets sont $a_0, \ldots, a_n$, les a_k sont les sommets d'un sous-graphe de $(H^n)^{/p}$ du type (γ_n^p). Donc $\varphi(a_0), \ldots$ $\ldots, \varphi(a_n)$ sont les sommets d'un sous graphe de $(H^n)^{/p}$, encore du type (γ_n^p). Mais (H^n) est maximal, donc dans (H^n) il y a un simplexe x' dont les sommets sont les $\varphi(a_k)$. Si nous associons à chaque sommet de (H^n) son image par φ, et à chaque simplexe x le simplexe x', nous avons défini un automorphisme de (H^n) dont la restriction à l'ensemble des sommets coïncide avec celle de φ. Inversement, tout automorphisme de (H^n) s'identifie avec un automorphisme de $(H^n)^{/p}$, c.q.f.d.

Plus généralement, si φ est un homomorphisme d'un graphe (G^p) dans $(\bar{G}^p)$ (où (G^p) et $(\bar{G}^p)$ satisfont à (A)), φ s'identifie avec un homomorphisme des graphes maximaux de dimension n dont (G^p) et $(\bar{G}^p)$ sont les p-sections.

Remarque. Il peut arriver que un graphe non maximal dont la p-section est isomorphe à (G^p) ait pour groupe des automorphismes un groupe isomorphe à celui de (G^p). Pour exemple, le graphe $\{abc, bcd, cef, dfg, fgh\}$ n'est pas maximal parmi les graphes qui ont la même 1-section (il peut être majoré en ajoutant le simplexe cdf); toutefois son groupe des automorphismes est isomorphe à celui de sa 1-section.

2. Dans la suite nous considérerons des graphes orientés définis sur un ensemble.

Soient $[G, (a^i)]$ et $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$ deux graphes orientés, structurés par le même ensemble I.

Définition. Nous appelons *semi-homomorphisme* de $[G, (a^i)]$ dans $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$ une application φ de G dans $\bar{G}$ telle que

$$\bar{a}^{\lambda(i)} \circ \varphi = \varphi \circ a^i \quad \text{pour tout } i \in I,$$

où λ est une bijection de I sur I, dite *bijection relative au semi-homomorphisme* φ.

Un *semi-isomorphisme* est un semi-homomorphisme bijectif. Dans le cas $[G, (a^i)] = [\bar{G}, (\bar{a}^i)]$ on dira de *semi-endomorphisme* et de *semi-automorphisme.*

La bijection inverse d'un semi-isomorphisme est un semi-isomorphisme.

Si la cardinalité de I est 2, un semi-homomorphisme est un homomorphisme ou bien le produit d'un homomorphisme et de l'application dualisante, qui transforme chaque graphe orienté dans son opposé.

Si Λ est un sous-monoïde (avec unité) du groupe symétrique $\mathfrak{S}_I$ de I, les semi-homomorphismes tels que $\lambda \in \Lambda$ seront appelés Λ*-semi-homomorphismes.*

Théorème 3. *Nous avons une catégorie* $\mathbf{Gph}^I_\Lambda$ *en prenant pour objets les graphes orientés structurés par* I *et pour morphismes les triplets* $([\bar{G}], \varphi, [G])$, *où* φ *est un* Λ*-semi-homomorphisme de* $[G]$ *dans* $[\bar{G}]$.

En outre, si nous associons à chaque morphisme $([\bar{G}], \varphi, [G])$ *de* $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$ *la bijection* λ *relative à* φ, *on obtient un foncteur de la catégorie* $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$ *sur le groupe* $\mathfrak{S}_I$.

Soient, en effet, $[G, (a^i)]$, $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$, $[\bar{\bar{G}}, (\bar{\bar{a}}^i)]$ trois graphes orientés structurés par le même I, et soient φ et ψ des semi-homomorphismes de $[G, (a^i)]$ dans $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$, et de $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$ dans $[\bar{\bar{G}}, (\bar{\bar{a}}^i)]$ respectivement. Nous pouvons écrire (pour chaque i et j)

$$(1) \qquad \bar{a}^{\lambda(i)} \circ \varphi = \varphi \circ a^i, \qquad \bar{\bar{a}}^{\mu(j)} \circ \psi = \psi \circ \bar{a}^j \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda).$$

Composons la deuxième formule de (1) à droite avec φ et posons $j = \lambda(i)$; grâce à la première formule de (1) on a

$$(2) \qquad \bar{\bar{a}}^{\mu \circ \lambda(i)} \circ (\psi \circ \varphi) = (\psi \circ \varphi) \circ a^i \qquad (\mu \circ \lambda \in \Lambda).$$

La formule (2) démontre que $\psi \circ \varphi$ est un Λ-semi-homomorphisme. L'application identité dans chaque graphe est un Λ-semi-homomorphisme, donc on a une catégorie.

On voit de (1) et (2) que, si les bijections relatives à φ et ψ sont respectivement λ et μ, la bijection relative à $\psi \circ \varphi$ est $\mu \circ \lambda$. L'application identité dans I est relative à l'application identité dans $[G]$, donc on a un foncteur de $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$ sur $\mathfrak{S}_I$, c.q.f,d.

En particulier, si nous associons à chaque semi-automorphisme de $[G]$ la bijection relative λ, nous avons un homomorphisme du groupe des semi-automorphismes $\Gamma^*([G])$ sur $\mathfrak{S}_I$; le noyau de cet homomorphisme est le groupe $\Gamma([G])$ des automorphismes, qui est donc invariant dans $\Gamma^*([G])$.

Remarque. Si $[G, (a^i)]$ et $[\bar{G}, (a^{i'})]$ sont deux graphes, structurés par les ensembles I et I' distingués mais équipotents, on peut parler d'un homomorphisme de $[G]$ dans $[\bar{G}]$ seulement à une bijection (de I sur I') près. Donc, si l'on ne fixe pas l'ensemble I, mais seulement sa cardinalité, on obtient la catégorie des graphes orientés structurés par un ensemble de cardinalité donnée, et cette catégorie est isomorphe à la catégorie $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$.

Soit $[G, (a^i)]$ un graphe orienté, structuré par I, et soit $J \subseteq I$. On peut définir sur G le graphe orienté $[G, (a^j)]$, où $j \in J$ (graphe orienté J-section). Si Λ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_I$ tel que $\Lambda(J) \subseteq J$, chaque Λ-semi-homomorphisme de $[G, (a^i)]$ dans $[\bar{G}, (\bar{a}^i)]$ définit un $\mathfrak{S}_J$-semi-homomorphisme de $[G, (a^j)]$ dans $[\bar{G}, (\bar{a}^j)]$. Toutefois les sections peuvent avoir des homomorphismes qui ne sont pas définis par des homomorphismes des graphes donnés.

D'une façon analogue, on peut définir la catégorie $\mathbf{Sgr}^I$, dont les objets sont les graphes non orientés qui sont des classes de graphes orientés structurés par I, tandis que les morphismes sont les triplets $\big((\bar{G}), \varphi, (G)\big)$, où φ est un homomorphisme de (G) dans $(\bar{G})$. Associons à chaque graphe orienté $[G]$ son graphe non orienté (G), et à chaque morphisme $([\bar{G}], \varphi, [G])$ de $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$, le triplet $\big((\bar{G}), \varphi, (G)\big)$. On a ainsi un foncteur surjectif (mais ni plein ni fidèle) de $\mathbf{Gph}^I_{\mathfrak{S}_I}$ sur $\mathbf{Sgr}^I$ (et aussi un foncteur de chaque $\mathbf{Gph}^I_\Lambda$ sur $\mathbf{Sgr}^I$).

TRAVAUX CITÉS

[1] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Paris 1970.

[2] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Paris 1965.

[3] O. Ore, *Theory of graphs*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence 1962.

[4] F. Speranza, *Omomorfismi fra grafi e grafi moltiplicativi*, Annali di Matematica (IV) 71 (1966), p. 281-294.

[5] — *Su alcuni singrammi che si possono associare ad un dato singramma pluridimensionale*, Studia Ghisleriana, Ser. spec. (1967), p. 22-31.

Reçu par la Rédaction le 30. 10. 1971;
en version modifiée le 10. 2. 1972