COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIII 1975 FASC. 2

ISOMETRIEN DES RAUMES DER KONVEXEN KÖRPER

VON

ROLF SCHNEIDER (BERLIN)

Auf der Menge der nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen eines metrischen Raumes (X, δ) wird nach Hausdorff [2], S. 293, in natürlicher Weise eine Metrik d induziert durch die Festsetzung

$$d(K, L) = \max\{\sup_{x\in K} \inf_{y\in L} \delta(x, y), \sup_{x\in L} \inf_{y\in K} \delta(x, y)\}. \tag{1}$$

Besondere Bedeutung kommt dieser *Hausdorff-Metrik* in der Theorie der konvexen Körper zu, seitdem sie von Blaschke [1], S. 60, erstmals herangezogen worden ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}^n$ die Menge der konvexen Körper (nichtleere, kompakte, konvexe Teilmengen) des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\boldsymbol{R}^n$. Für $K, L \in \mathfrak{K}^n$ kann man (1) auch ersetzen durch die gleichwertige Definition

$$d(K, L) = \min\{\lambda \geqslant 0\colon K \subseteq L+\lambda B, L \subseteq K+\lambda B\}, \tag{2}$$

wo $+$ die Minkowskische Addition (Vektoraddition) bezeichnet und

$$B = \{x \in \boldsymbol{R}^n\colon |x| \leqslant 1\}$$

die Einheitskugel des $\boldsymbol{R}^n$ ist (dabei ist $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, $\langle\, ,\, \rangle$ das Skalarprodukt, $\delta(x, y) = |x-y|$). Wenn auch in der Theorie der konvexen Körper bei der Benutzung der Hausdorff-Metrik häufig nur die von ihr induzierte Topologie von Belang ist, so erscheint diese Metrik aufgrund ihrer einfachen geometrischen Bedeutung doch als hinreichend interessanter Gegenstand für eine selbständige Betrachtung. Wir bestimmen hier (für $n \geqslant 2$) die Isometrien (isometrischen Abbildungen auf sich) des metrischen Raumes $(\mathfrak{K}^n, d)$.

SATZ. *Jede Isometrie T von $(\mathfrak{K}^n, d)$ wird durch eine Isometrie (Bewegung) $t\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ des $\boldsymbol{R}^n$ induziert (in dem Sinne, daß $TK = \{tx\colon x \in K\}$ für alle $K \in \mathfrak{K}^n$ gilt).*

Vor dem Beweis seien einige Bezeichnungen zusammengestellt. Affine Hülle und Dimension eines konvexen Körpers K werden mit $\operatorname{aff} K$ beziehungsweise $\dim K$ bezeichnet. Es sei

$$S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n\colon |x| = 1\}$$

die Einheitssphäre des $\boldsymbol{R}^n$. Für einen konvexen Körper $K \in \mathfrak{K}^n$ ist durch

$$H(K, u) = \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\} \qquad \text{für } u \in S^{n-1}$$

die (auf S^{n-1} eingeschränkte) Stützfunktion $H(K, \cdot)$ erklärt. Für eine stetige reellwertige Funktion F auf S^{n-1} sei

$$\|F\| = \max\{|F(u)| : u \in S^{n-1}\}.$$

Dann gilt bekanntlich

$$d(K, L) = \|H(K, \cdot) - H(L, \cdot)\| \qquad \text{für } K, L \in \mathfrak{K}^n. \tag{3}$$

Durch

$$S(K, u) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \langle x, u\rangle = H(K, u)\}$$

wird die zum äußeren Normalenvektor $u \in S^{n-1}$ gehörende Stützhyperebene an K gegeben, und $S^+(K, u)$ sei der von ihr berandete, den Körper K enthaltende, abgeschlossene Halbraum. Ein Punkt eines n-dimensionalen Körpers $K \in \mathfrak{K}^n$ heißt *regulär*, wenn er in genau einer Stützhyperebene an K liegt. Einen Punkt eines $(n-1)$-dimensionalen Körpers $K \in \mathfrak{K}^n$ wollen wir als *regulär* bezeichnen, wenn er zum relativen Inneren von K gehört; durch einen solchen Punkt gehen also genau die Stützhyperebenen $S(K, u)$ und $S(K, -u)$, wobei u senkrecht zu $\operatorname{aff} K$ ist. Es sei $R(K)$ die Menge aller Vektoren $u \in S^{n-1}$ mit der Eigenschaft, daß die Stützhyperebene $S(K, u)$ einen regulären Punkt von K enthält (mit $R(K) = \emptyset$, falls $\dim K < n-1$). Wir notieren die Relation

$$R(K) \cup R(L) \subseteq R(K+L) \qquad \text{für } K, L \in \mathfrak{K}^n. \tag{4}$$

Zum Beweis sei etwa $u \in R(K)$. Sei $x \in S(K, u)$ ein regulärer Punkt von K und $y \in S(L, u)$ ein Randpunkt von L. Dann ist $z = x+y$ ein Randpunkt von $K+L$ mit $z \in S(K+L, u)$. Wäre z nicht ein regulärer Punkt von $K+L$, so wäre $z \in S(K+L, v)$ mit einem geeigneten Vektor $v \in S^{n-1} \setminus \{u, -u\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle &= \langle z, v\rangle = H(K+L, v)\\ &= H(K, v) + H(L, v) > \langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle\end{aligned}$$

wegen $x \in K$, $x \notin S(K, v)$ und $y \in L$. Der Widerspruch zeigt, daß z regulär, also $u \in R(K+L)$ ist.

Sind K, $L \in \mathfrak{K}^n$ konvexe Körper, so hat der Körper $M = \frac{1}{2}(K+L)$ die Eigenschaft

$$d(M, K) = d(M, L) = \tfrac{1}{2} d(K, L),$$

wie aus (3) hervorgeht. Ist $\frac{1}{2}(K+L)$ der einzige Körper aus $\mathfrak{K}^n$ mit dieser Eigenschaft, so soll das Paar $\{K, L\}$ als *zentriert* bezeichnet werden.

HILFSSATZ 1. *Seien K, $L \in \mathfrak{K}^n$ konvexe Körper. Ist $\{K, L\}$ ein zentriertes Paar, so gilt*

$$|H(K, u) - H(L, u)| = d(K, L) \qquad \textit{für alle } u \in R(K+L). \tag{5}$$

Beweis. Sei $\{K, L\}$ ein zentriertes Paar. Wir dürfen $d(K, L) = 1$ annehmen. Setze $M = \frac{1}{2}(K+L)$. Nehmen wir an, daß (5) falsch ist. Wegen $\|H(K,\cdot)-H(L,\cdot)\| = 1$ existiert dann ein $u \in R(M)$ mit $|H(K,u)-H(L,u)| < 1$, etwa

$$0 \leqslant H(K,u)-H(L,u) < 1.$$

Wegen der Stetigkeit der Stützfunktionen gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine (bezüglich S^{n-1} offene) Umgebung $U \subset S^{n-1}$ von u mit

$$(6) \qquad -\tfrac{1}{2}+\varepsilon < H(M,v)-H(L,v) < \tfrac{1}{2}-\varepsilon \quad \text{für alle } v \in U.$$

Man setze

$$M' = \bigcap_{v \in S^{n-1} \setminus U} S^{+}(M,v).$$

Die Stützhyperebene $S(M,u)$ enthält einen regulären Punkt x von M. Es gibt eine Zahl ϱ mit $0 < \varrho < \varepsilon$ und $x+\varrho u \in M'$, denn andernfalls ginge wegen der Abgeschlossenheit von $S^{n-1} \setminus U$ durch x noch eine von $S(M,u)$ und $S(M,-u)$ verschiedene Stützhyperebene von M. Sei $\bar{M}$ die konvexe Hülle von $M \cup \{x+\varrho u\}$. Dann gilt

$$(7) \qquad H(\bar{M},v) = H(M,v) \quad \text{für } v \in S^{n-1} \setminus U,$$

$$(8) \qquad H(M,v) \leqslant H(\bar{M},v) \leqslant H(M,v)+\varepsilon \quad \text{für } v \in U.$$

Zusammen mit (6) und $\|H(M,\cdot)-H(L,\cdot)\| \leqslant \frac{1}{2}$ ergibt das

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant H(\bar{M},v)-H(L,v) \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{für } v \in S^{n-1},$$

also $d(\bar{M}, L) \leqslant \frac{1}{2}$. Wegen $H(M,\cdot)-H(K,\cdot) = -[H(M,\cdot)-H(L,\cdot)]$ folgt aus (6), (7) und (8) auch $d(\bar{M}, K) \leqslant \frac{1}{2}$. Nach der Dreiecksungleichung ist

$$1 = d(K,L) \leqslant d(K,\bar{M})+d(\bar{M},L) \leqslant \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2},$$

also $d(\bar{M},K) = d(\bar{M},L) = \frac{1}{2}$. Wegen $\bar{M} \neq M$ ist das Paar $\{K, L\}$ also nicht zentriert; aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit von (5).

Hilfssatz 2. *Seien $K, L \in \mathfrak{K}^n$, sei $\{K, L\}$ ein zentriertes Paar. Ist* $\dim K = k < n$ *und ist L in einer zu* $\operatorname{aff} K$ *parallelen k-dimensionalen Ebene E enthalten, so haben* $\operatorname{aff} K$ *und E den Abstand $d(K, L)$.*

Beweis. Wir dürfen wieder $d(K, L) = 1$ annehmen. Zunächst sei $k = n-1$. Nach Hilfssatz 1 gilt $|H(K,u)-H(L,u)| = 1$, wenn u einer der beiden zu $\operatorname{aff} K$ senkrechten Einheitsvektoren ist. Die zu $\operatorname{aff} K$ parallele Hyperebene, in der nach Voraussetzung der Körper L liegt, hat also von $\operatorname{aff} K$ den Abstand 1.

Nun sei $k < n-1$. Die parallelen k-dimensionalen Ebenen $\operatorname{aff} K$ und E sind in einer $(k+1)$-dimensionalen Ebene E_{k+1} enthalten. Wir können nun das eben bewiesene Resultat anwenden, indem wir den euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^n$ durch E_{k+1} ersetzen (auch bezüglich E_{k+1} bilden K

und L ein zentriertes Paar und sie haben den Abstand 1). Es ergibt sich, daß $\operatorname{aff} K$ und E den Abstand 1 haben.

HILFSSATZ 3. *Ist T eine Isometrie von $\mathfrak{K}^n$, so ist das Bild jedes nulldimensionalen Körpers unter T nulldimensional.*

Beweis. Im folgenden bezeichnen wir für $x \in \boldsymbol{R}^n$ den nulldimensionalen konvexen Körper $\{x\}$ häufig auch einfach mit x (bei dieser Schreibweise ist $\delta(x, y) = d(x, y)$).

Sei T eine Isometrie von $\mathfrak{K}^n$. Seien $x, y \in \boldsymbol{R}^n$, sei $0 < \lambda < 1$ und $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Dann gilt $d(z, x) = \lambda d(x, y)$ und $d(z, y) = (1-\lambda)d(x, y)$. Ist $M \in \mathfrak{K}^n$ ein konvexer Körper mit

$$d(M, x) = \lambda d(x, y), \qquad d(M, y) = (1-\lambda)d(x, y), \tag{9}$$

so gilt nach (2)

$$M \subseteq \big(x + \lambda d(x, y)B\big) \cap \big(y + (1-\lambda)d(x, y)B\big) = \{z\}.$$

Der Körper $M = \{z\}$ ist also durch (9) eindeutig bestimmt. Da die Abbildung $T\colon \mathfrak{K}^n \to \mathfrak{K}^n$ surjektiv und isometrisch ist, ist $N = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty$ der einzige konvexe Körper mit den Eigenschaften

$$d(N, Tx) = \lambda d(Tx, Ty), \qquad d(N, Ty) = (1-\lambda)d(Tx, Ty).$$

Notwendigerweise ist also $Tz = N$. Durch vollständige Induktion ergibt sich daraus

$$T(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r) = \lambda_1 Tx_1 + \ldots + \lambda_r Tx_r \tag{10}$$

für $x_1, \ldots, x_r \in \boldsymbol{R}^n$, $0 < \lambda_1, \ldots, \lambda_r < 1$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$, $r = 2, 3, \ldots$

Außerdem hat sich ergeben, daß für $x, y \in \boldsymbol{R}^n$ $\{Tx, Ty\}$ stets ein zentriertes Paar ist.

Sei $x_1 \in \boldsymbol{R}^n$ ein Punkt mit

$$\dim Tx_1 = k \geqslant \dim Tx \qquad \text{für alle } x \in \boldsymbol{R}^n.$$

Wir wählen Punkte $x_2, \ldots, x_{n+1} \in \boldsymbol{R}^n$ derart, daß $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise den Abstand n haben, und setzen

$$z_i = \frac{1}{n}(x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}), \qquad \text{wenn } \{i, i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n+1\}.$$

Nach (10) ist dann

$$Tz_i = \frac{1}{n}(Tx_{i_1} + \ldots + Tx_{i_n}), \tag{11}$$

insbesondere also

$$\dim Tz_i = k \qquad \text{für } i = 2, \ldots, n+1. \tag{12}$$

Nehmen wir an, daß $k = n$ ist. Dann gibt es einen Vektor $u \in R(Tx_1)$. Nach (4) und (11) gilt $u \in R(Tz_i)$ für $i = 2, \ldots, n+1$. Aus Hilfssatz 1 ergibt sich daher

$$|H(Tz_i, u) - H(Tz_j, u)| = 1 \quad \text{für } i, j \in \{1, \ldots, n+1\},\ i \neq j,$$

ein Widerspruch. Also ist $k \leqslant n-1$.

Für jeden Punkt $y \in \boldsymbol{R}^n$ muß der konvexe Körper Ty in einer zu Tx_1 parallelen k-dimensionalen Ebene liegen, da andernfalls

$$\dim T(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}y) = \dim(\tfrac{1}{2}Tx_1 + \tfrac{1}{2}Ty) > k$$

wäre, entgegen der Definition von k. Insbesondere gibt es also parallele k-dimensionale Ebenen $E_1, \ldots, E_{n+1}$ mit $Tz_i \subset E_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. Sei $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$, $i \neq j$, und etwa $i \neq 1$. Nach (12) und Hilfssatz 2 haben die Ebenen E_i und E_j den Abstand $d(Tz_i, Tz_j) = d(z_i, z_j)$ $= \delta(z_i, z_j) = 1$. Im $\boldsymbol{R}^n$ gibt es aber nur dann $n+1$ parallele k-dimensionale Ebenen, die paarweise den gleichen, von Null verschiedenen Abstand haben, wenn $k = 0$ ist. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Der Beweis des Satzes ist jetzt leicht zu Ende zu führen. Ist T eine Isometrie von $\mathfrak{K}^n$, so gibt es nach Hilfssatz 3 eine Abbildung $t\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ mit $T\{x\} = \{tx\}$ für $x \in \boldsymbol{R}^n$. Wegen

$$\delta(tx, ty) = d(\{tx\}, \{ty\}) = d(T\{x\}, T\{y\}) = d(\{x\}, \{y\}) = \delta(x, y)$$

ist t eine Isometrie von $\boldsymbol{R}^n$. Setzen wir $T'K = t^{-1}TK$ für $K \in \mathfrak{K}^n$, so ist T' eine Isometrie von $\mathfrak{K}^n$, die jeden nulldimensionalen Körper fest läßt. Für $K \in \mathfrak{K}^n$ und $x \in \boldsymbol{R}^n$ gilt also

$$d(T'K, x) = d(T'K, T'x) = d(K, x). \tag{13}$$

Im Fall $L = \{x\}$ vereinfacht sich (2) zu

$$d(K, x) = \min\{\lambda \geqslant 0\colon K \subseteq \lambda B + x\};$$

daher gilt nach (13)

$$K \subseteq \lambda B + x \Leftrightarrow T'K \subseteq \lambda B + x \quad \text{für } x \in \boldsymbol{R}^n,\ \lambda \geqslant 0.$$

Da ein konvexer Körper der Durchschnitt aller ihn enthaltenden Kugeln ist, folgt $T'K = K$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die isometrische Abbildung $T\colon \mathfrak{K}^n \to \mathfrak{K}^n$, auf die sich der eben bewiesene Satz bezieht, wurde als surjektiv vorausgesetzt. Verzichtet man auf diese Forderung, so gibt es noch weitere isometrische Abbildungen von $\mathfrak{K}^n$ in sich: Durch $TK = tK + L$, wo t eine Isometrie von $\boldsymbol{R}^n$ und $L \in \mathfrak{K}^n$ ein nicht von K abhängender konvexer Körper ist, wird, wie sofort aus (3) hervorgeht, eine isometrische Abbildung $T\colon \mathfrak{K}^n \to \mathfrak{K}^n$ erklärt; sie ist nicht surjektiv, wenn $\dim L > 0$ ist. Ob damit alle isometrischen Abbildungen von $\mathfrak{R}^n$ in sich erschöpft sind, ist uns nicht bekannt. (**P 947**)

Bemerkung. Es liegt nahe, allgemein nach den Isometrien des metrischen Raumes (X^*, d) zu fragen, wo X^* die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen eines metrischen Raumes (X, δ) und d die durch (1) erklärte Hausdorff-Metrik ist. Natürlich induziert jede Isometrie t von (X, δ) eine Isometrie T von (X^*, d) durch die Festsetzung $TK = \{tx : x \in K\}$ für $K \in X^*$. Im allgemeinen wird aber nicht jede Isometrie von (X^*, d) auf diese Weise erzeugt: Ist δ die diskrete Metrik auf X, so ist d die diskrete Metrik auf X^*, und X^* ist die Potenzmenge von X (ohne die leere Menge). Eine Abbildung eines diskreten metrischen Raumes in sich ist genau dann isometrisch, wenn sie injektiv ist. Es gibt aber, wenn X mehr als zwei Punkte enthält, injektive Abbildungen der Potenzmenge von X auf sich, die nicht durch eine Abbildung von X induziert werden. Es wäre interessant zu wissen, ob wenigstens im Fall des euklidischen Raumes $(\boldsymbol{R}^n, \delta)$ jede Isometrie von $\big((\boldsymbol{R}^n)^*, d\big)$ durch eine Isometrie des $\boldsymbol{R}^n$ induziert wird. (**P 948**)

LITERATURNACHWEIS

[1] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916.
[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Reçu par la Rédaction le 18. 10. 1973