COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIX 1978 FASC. 1

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE ALGÈBRE TOPOLOGIQUE EN PRODUIT CARTÉSIEN D'IDÉAUX

PAR

MICHEL BONNARD (PERPIGNAN)

0. Introduction. Etant donné une algèbre complexe commutative unitaire A, on considère le cas où existe un isomorphisme naturel entre A et le produit cartésien de certains de ses idéaux. On montre qu'un tel isomorphisme est toujours un homéomorphisme dans le cas où A est localement multiplicativement convexe, séparée et complète. On en déduit une bijection canonique entre:

les décompositions de A en produit cartésien d'idéaux;

les décompositions du spectre de A en somme topologique;

les décompositions de l'unité de A en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux.

Ces résultats étaient déjà connus dans le cas où A est une algèbre de Banach (c'est essentiellement le théorème de Shilov [3]). Dans ce cas les décompositions considérées étaient nécessairement finies (en raison de la compacité du spectre). Par contre, ici, les décompositions peuvent être infinies.

1. Préliminaires. Toutes les algèbres considérées sont des algèbres commutatives et unitaires sur le corps C des nombres complexes. Ces algèbres sont toujours munies de topologies localement multiplicativement convexes (en abrégé l.m.c.) et séparées. On appelle *caractère* d'une telle algèbre A toute application linéaire, multiplicative non nulle et continue de A dans C; on appelle *spectre de* A l'ensemble $\hat{A}$ des caractères de A muni de la topologie faible (topologie de la convergence simple dans A). Si $a \in A$, on appelle *spectre de* a l'ensemble de nombres complexes $\operatorname{sp} a = \{\chi(a); \chi \in \hat{A}\}$. Le spectre d'un élément a ainsi défini reste le même si on considère a comme élément de la complétée de A (par contre, si A n'est pas complète, $\operatorname{sp} a$ n'est pas l'ensemble des $\lambda \in C$ tels que $x-\lambda e$ ne soit pas inversible dans A (e désignant l'unité de A)). Si A est normée, $\hat{A}$ est compact et, pour tout $a \in A$, l'ensemble $\operatorname{sp} a$ est lui aussi compact.

Comme toute algèbre l.m.c. séparée complète est limite projective d'algèbres de Banach (cf. [2]) nous nous ramenons à utiliser des résultats sur les algèbres normées (pour les propriétés de ces algèbres cf., par exemple, [4]). Nous utilisons abondamment le vocabulaire de la théorie des catégories (cf., par exemple, [1]) mais en fait nous n'utilisons que des résultats très élémentaires de cette théorie.

Si ε est un idempotent d'une algèbre A et si χ est un caractère de A, le nombre complexe $\chi(\varepsilon)$ est 0 ou 1. Nous appellerons *support* de ε l'ensemble des $\chi \in \hat{A}$ tels que $\chi(\varepsilon) = 1$. Ce support est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\hat{A}$. Inversement, si A est complète, étant donnée une partie Y ouverte et fermée de $\hat{A}$, il existe un et un seul idempotent dont le support soit Y (pour le cas des algèbres de Banach c'est le théorème de Shilov [3] (cité, par exemple, dans [4], p. 95) qui se généralise aisément au cas général par passage à la limite projective). Pour une algèbre non complète on voit, en faisant intervenir sa complétée, qu'il y a au plus un idempotent ayant un support donné. Alors pour qu'un idempotent ε soit non nul, il faut et il suffit que son support soit non vide, c'est-à-dire qu'il existe $\chi \in \hat{A}$ tel que $\chi(\varepsilon) = 1$. Deux idempotents sont dits *orthogonaux* si leur produit est nul. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'ils aient leurs supports disjoints. On vérifie alors aisément le résultat suivant (A n'étant pas supposée complète):

Soit (e_i) une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux. On suppose que la famille (e_i) est sommable. Alors $\sum e_i$ est l'(unique) idempotent dont le support est la réunion des supports des e_i.

On appelle *décomposition de A en produit cartésien d'idéaux* la donnée d'une famille de couples $(A_i, P_i)_{i\in I}$ telle que:

(i) pour chaque i, A_i est un idéal de A,

(ii) pour chaque i, P_i est un projecteur multiplicatif de A sur A_i,

(iii) l'application (linéaire multiplicative)

$$S\colon\ A \to \prod_{i\in I} A_i \qquad \big(x \to (P_i(x))_{i\in I}\big)$$

est bijective.

S'il en est ainsi, *il existe des idempotents deux à deux orthogonaux e_i tels que, pour chaque i, on ait $A_i = e_i A$ et que P_i soit l'application $x \mapsto e_i x$.* De plus, les A_i sont fermés et les P_i sont continues, ce qui entraîne que S est continue.

Une telle décomposition sera dite *topologique* si S est un homéomorphisme de A sur l'espace topologique produit des A_i munis chacun de la topologie induite par A.

Remarque 1. Supposons que l'ensemble d'indices I soit fini. Alors l'application

$$(x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$$

de $\prod_i A_i$ dans A est continue et est l'inverse de S qui est donc un homéomorphisme. Plus généralement, ne supposons plus I fini, mais supposons que l'ensemble J des i tels que $A_i \neq 0$ est fini (ce que nous exprimerons en disant que la décomposition est *essentiellement finie*). Alors l'application S est composée des deux homéomorphismes

$$A \to \prod_{i\in J} A_i \to \prod_{i\in I} A_i.$$

Donc *toute décomposition essentiellement finie est topologique.*

Remarque 2. Supposons maintenant au contraire que la décomposition S n'est pas essentiellement finie. Soit alors (λ_i) une famille de nombres complexes telle que l'ensemble (infini) des λ_i tels que $A_i \neq 0$ soit un sous-ensemble non borné de C. On voit que le spectre de l'élément $x = S^{-1}\big((\lambda_i e_i)_{i\in I}\big)$ contient ce sous-ensemble non borné de C. Par conséquent, *si le spectre de tout élément de A est borné* (donc, en particulier, si A est normée), *toute décomposition de A en produit d'idéaux est essentiellement finie,* donc topologique.

2. Les résultats. En plus des hypothèses faites au § 1, on suppose dans tout ce qui suit que A est complète.

Donnons, sous le nom de *construction standard* une construction qui servira plusieurs fois par la suite. Soit (e_i) une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux de A et soit

$$S = (P_i): A \to \prod_i A_i$$

l'application définie par

$$x \mapsto (e_i x).$$

(On ne suppose pas ici que S soit une décomposition en produit.)

La topologie de A est définie par une famille filtrante de semi-normes sous-multiplicatives (n_a) (cf., par exemple, [2]). Pour chaque a soit A_a l'algèbre séparée associée à A *munie de* n_a (c'est-à-dire que A_a est le quotient de A par l'ensemble des x tels que $n_a(x) = 0$, et A_a est normée par la norme induite par n_a). Alors les morphismes canoniques Φ_a: $A \to A_a$ sont continus et surjectifs par construction. De plus, A étant séparée et complète, les Φ_a font de A la *limite projective* (*topologique*) des A_a (mais les A_a ne sont pas nécessairement complètes). Par ailleurs les A_i sont fermés donc complets donc les restrictions des Φ_a font de chaque A_i la limite projective des $\Phi_a(A_i)$.

Pour chaque i et chaque a, soit $e_{ia} = \Phi_a(e_i)$, soit $A_{ia} = e_{ia}A_a$, soit P_{ia}: $A_a \to A_{ia}$ l'application $x \mapsto e_{ia}x$, soit enfin

$$S_a = (P_{ia})_{i\in I}: A_a \to \prod_i A_{ia}$$

l'application définie par

$$x \mapsto (e_{ia}x)_{i\in I}.$$

Par ailleurs soit

$$\Psi_a\colon \prod_i A_i \to \prod_i A_{ia}$$

l'application définie par

$$(x_i)_{i\in I} \mapsto \big(\Phi_a(x_i)\big)_{i\in I}.$$

Alors on voit que $\Phi_a(A_i) = A_{ia}$ et on déduit que Ψ_a est surjective. On voit également que

$$S_a\circ \Phi_a = \Psi_a\circ S.$$

On sait que, dans toute catégorie, les limites projectives commutent aux produits; plus précisément ici, comme les restrictions des Φ_a font de chaque A_i la limite projective des A_{ia}, le produit $\prod_i A_i$ s'identifie à $\varprojlim_a \prod_i A_{ia}$, de sorte que les Ψ_a s'identifient aux morphismes définissant la limite projective. On en déduit que *S s'identifie au morphisme que les S_a induisent par passage à la limite projective.*

PROPOSITION. *Toute décomposition de A en produit cartésien d'idéaux est topologique.*

Démonstration. Soit

$$S = (P_i)_{i\in I}\colon A \to \prod_i A_i$$

une décomposition de A en produit cartésien d'idéaux. Par hypothèse, S est bijective, et de plus, d'après ce qu'on a vu, S est continue. Il s'agit de montrer que S est un homéomorphisme (si A était métrisable et I dénombrable, ce serait immédiat d'après le théorème du graphe fermé). Par ailleurs, on a vu que les A_i sont de la forme $A_i = e_iA$ et les P_i de la forme $x \mapsto e_ix$, où les e_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux.

Soit a l'indice d'une des semi-normes définissant la topologie de A. Utilisons les notations de la construction standard. Notons d'abord que S_a est surjectif (en effet, on a $S_a\circ\varphi_a = \psi_a\circ S$, et S et ψ_a sont surjectifs), ce qui entraîne que ceux des e_{ia} qui sont non nuls sont en nombre fini puisque A_a est normée (il suffit d'adapter le raisonnement de la remarque 2).

Soit alors B_a l'idéal de A_a engendré par les e_{ia}; on ignore, pour l'instant, si B_a est égal à A_a, mais B_a possède un idéal supplémentaire C_a qui est l'idéal engendré par l'idempotent $e_a - \sum_i e_{ia}$ (où e_a est l'unité de A_a). On vérifie que C_a est le noyau de S_a, ce qui entraîne que $S_a|_{B_a}$ est une bijection et est, par conséquent, une décomposition de B_a en produit, les projecteurs définissant cette décomposition étant les applications $x \mapsto e_{ia}x$.

Mais les $e_{i\alpha}$ sont presque tous nuls, donc la décomposition de B_α est essentiellement finie, donc topologique; autrement dit $S_\alpha|_{B_\alpha}$ est un isomorphisme topologique.

On a le diagramme commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "S_\alpha"] \arrow[d, shift right] & \prod_i A_{i\alpha} \\ B_\alpha \arrow[u, shift right] \arrow[ur, "S_\alpha|_{B_\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales de gauche correspondent à la décomposition $A_\alpha = B_\alpha \oplus C_\alpha$ et sont donc, en particulier, des applications continues.

Si n_α et n_β sont deux semi-normes comparables, les applications qu'on a construites commutent convenablement avec les applications induites par le morphisme canonique Φ_α^β: $A_\alpha \to A_\beta$; le diagramme (1) induit alors, par passage à la limite projective, le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, shift right] & A_i \\ \varprojlim_\alpha B_\alpha \arrow[u, shift right] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Il résulte des propriétés du diagramme (1) que, dans le présent diagramme, les flèches verticales sont continues et la flèche oblique est un isomorphisme topologique. De plus, S est une bijection par hypothèse; comme la flèche oblique est aussi une bijection, on en déduit que les deux flèches verticales sont des bijections inverses l'une de l'autre. Comme ce sont des applications continues, ce sont des homéomorphismes. D'où, finalement, S est aussi un homéomorphisme, c.q.f.d.

Notons, au sujet de cette démonstration que, maintenant qu'on a établi que la décomposition est topologique, on vérifie que $\sum e_i = e$ (unité de A), d'où, pour chaque α, $\sum e_{i\alpha} = e_\alpha$ (unité de A_α), d'où on déduit que $A_\alpha = B_\alpha$, ce qui entraîne que les S_α étaient bel et bien bijectives. On a donc établi que *toute décomposition de A en produit est induite par des décompositions des A_α.*

COROLLAIRE 1. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux de A. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *les supports des e_i recouvrent le spectre de A;*

(ii) *l'application $x \mapsto (e_i x)_{i\in I}$ est une décomposition de A en produit;*

(iii) *la famille $(e_i)_{i\in I}$ est sommable et a pour somme e.*

Seule l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) n'est pas immédiate. Reprenant les notations de la construction standard, on voit que, α étant fixé, ceux des $e_{i\alpha}$ qui sont non nuls sont en nombre fini et ont des supports qui recouvrent le spectre de A_α; on en déduit que chaque S_α est bijective (c'est une décomposition de A_α en produit); il en résulte que S est bijective par passage à la limite projective.

On déduit de cela que, pour qu'une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux dans A soit sommable, il faut et il suffit que la réunion de leurs supports soit fermée dans $\hat{A}$.

COROLLAIRE 2. *Il y a des bijections canoniques entre les ensembles suivants:*

(i) *l'ensemble des décompositions de A en produit cartésien d'idéaux;*

(ii) *l'ensemble des décompositions de e en somme d'une famille sommable d'idempotents deux à deux orthogonaux;*

(iii) *l'ensemble des décompositions de $\hat{A}$ en somme topologique.*

COROLLAIRE 3. *Soit (A_i) une famille d'idéaux de A. Pour que A se décompose en produit des A_i il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées:*

(i) *Tout élément de A s'écrit de façon unique sous forme de famille sommable $x = \sum x_i$, où, pour chaque i, on a $x_i \in A_i$.*

(ii) *Inversement, si (x_i) est une famille d'éléments de A telle que, pour chaque i, on ait $x_i \in A_i$, alors la somme $\sum x_i$ existe dans A.*

Dans un espace vectoriel topologique quelconque, les conditions (i) et (ii) sont entraînées par l'existence d'une décomposition en produit topologique, mais elles entraînent seulement l'existence d'une décomposition non topologique.

TRAVAUX CITÉS

[1] J. P. Lafon, *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*, Paris 1974.

[2] E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society 11, Providence 1952.

[3] Г. Е. Шилов, *О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов*, Математический сборник 32 (1953), p. 353-364. Traduction en englais: American Mathematical Society Translations 2 (1) (1955).

[4] W. Żelazko, *Banach algebras*, Warszawa 1973.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE UNIVERSITAIRE
PERPIGNAN

Reçu par la Rédaction le 3. 11. 1975;
en version définitive le 16. 11. 1976