COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XL | 1978 | FASC. 1

# ASYMPTOTISCH GLEICHVERTEILTE NETZE VON WAHRSCHEINLICHKEITSMASSEN AUF LOKALKOMPAKTEN GRUPPEN

VON

W. MAXONES UND H. RINDLER (WIEN)

In dieser Arbeit werden die in [8] begonnenen und auf [1] bzw. [5] zurückgehenden Untersuchungen unter besonderer Berücksichtigung der Gruppenstruktur fortgeführt. Es wird der Begriff der asymptotischen, insbesondere der schwach asymptotischen Gleichverteilung von Wahrscheinlichkeitsmaßen, der zuerst von Kerstan und Matthes in [5] für abelsche Gruppen formuliert und behandelt wurde (unabhängig davon wurde die asymptotische Gleichverteilung in [3] untersucht), auf lokalkompakten Gruppen studiert. Die Gruppen können als mittelbar vorausgesetzt werden, weil die Existenz von Netzen, die einer der folgenden Definitionen genügen, mit der Mittelbarkeit äquivalent ist — dies wurde u.a. in [1] gezeigt. Als Motivation für die Begriffsbildung läßt sich die Charakterisierung des (normierten) Haar-Maßes $\lambda$ einer kompakten Gruppe anführen, nämlich $\forall \nu \in P(G)$: $\nu * \lambda = \lambda$ (bzw. $\lambda * \nu = \lambda$). In nicht kompakten Gruppen ist daher die Forderung $\forall \nu \in P(G)$ konvergiere $\nu * \mu_a - \mu_a$ (bzw. $\mu_a * \nu - \mu_a$) in einer bestimmten Topologie gegen Null die entsprechende Übertragung; $\lambda$ wurde durch ein Netz von Wahrscheinlichkeitsmaßen ersetzt.

$G$ bezeichnet stets eine lokalkompakte (mittelbare) Gruppe; $dx$ bzw. $\lambda$ ein zugehöriges Haar-Maß, $\Delta$ den entsprechenden Haar-Modul. Mit UCr bzw. UCl bzw. UCb bezeichenen wir den Raum aller rechts bzw. links bzw. beidseitig gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen. Aus formalen Gründen wählen wir im Gegensatz zu [2] und [9] die von A. Weil geprägte Definition der uniformen Struktur; $f$ ist demnach *rechts gleichmäßig stetig*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine 1-Umgebung $V$ gibt mit

$$\forall v \in V \ \forall x \in G\colon \ |f(xv) - f(x)| < \varepsilon .$$

$K(G)$ bezeichnet die Menge aller stetigen Funktionen auf $G$ mit kompaktem Träger.

$P(G)$ bezeichnet die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße der Gruppe $G$ (mit „Maß" bzw. $\mu$ oder $\nu$ werden i.f. immer Wahrscheinlichkeitsmaße bezeichnet).

$L^1(G)$ wollen wir stets als Teilraum der beschränkten Radonmaße der Gruppe auffassen.

$\mu^*$ ist das zu $\mu$ adjungierte Maß:

$$\mu^*(f) = \int f(x^{-1})\, d\mu(x);$$

$\|\mu\|$ ist die Totalvariation von $\mu$.

$\delta_x$ bezeichnet das im Punkte $x$ konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß.

$f^{\vee}(x) := f(x^{-1}), \quad {}_xf(y) := f(xy).$

[SIN] bzw. $[\mathrm{FC}]^-$ bzw. $[\mathrm{FIA}]^-$ bezeichnet die Klasse aller Gruppen mit einer Basis invarianter (bezüglich innerer Automorphismen) 1-Umgebungen bzw. in denen jeder Punkt eine relativ kompakte Bahn besitzt bzw. deren Gruppe innerer Automorphismen relativ kompakt ist (vgl. [4]).

Definition. Wir nennen ein Netz $\mu_a$ (bzw. es hat die Eigenschaft):

$S_l$ bzw. $S_r$, wenn $\forall \nu \in P(G)$:

$$\lim_a (\nu * \mu_a - \mu_a) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_a (\mu_a * \nu - \mu_a) = 0$$

in der Normtopologie der Totalvariation $\|\cdot\|$;

$W_{lr}$, wenn $\forall \nu \in P(G)\ \forall f \in L^1(G)$: $\lim_a (\nu * \mu_a - \mu_a) * f = 0$ bezgl. $\|\cdot\|_1$;

Die Begriffe $W_{rr}$, $W_{rl}$, $W_{ll}$ werden analog gebildet; der erste Index von $W$ bezeichnet die Stellung von $\nu$ und der zweite die Stellung von $f$ relativ zu $\mu_a$.

$U_{lr}$, wenn $\forall \nu \in P(G)\ \forall h \in \mathrm{UCr}$: $\lim_a (\nu * \mu_a - \mu_a)(h) = 0$;

Die Bezeichnungen $U_{rr}$ $U_{rl}$ und $U_{ll}$ werden analog vorgenommen; der erste Index von $U$ beschreibt wiederum die Stellung von $\nu$ relativ zu $\mu_a$, wogegen der zweite Index die Art der gleichmäßigen Stetigkeit von $h$ kennzeichnet.

$U_l$ bzw. $U_r$, wenn $\forall \nu \in P(G)\ \ \forall h \in \mathrm{UCb}$:

$$\lim_a (\nu * \mu_a - \mu_a)(h) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_a (\mu_a * \nu - \mu_a)(h) = 0.$$

Diese Begriffe sind eine natürliche Verfeinerung der in [1] eingeführten Eigenschaft G3 bzw. der in [5] untersuchten (schwach) asymptotischen Gleichverteilung. Die Vielzahl dieser verschiedenen Begriffe erschien uns notwendig, weil ihre Beziehungen untereinander in engem Zusammenhang mit der Struktur der Gruppe stehen.

Bemerkungen. Man könnte $W_{rr}$ auch durch

$$\lim_a (\mu_a * f * \nu - \mu_a * f) = 0$$

definieren, beide Möglichkeiten sind jedoch zueinander äquivalent:

(1) $\mu_a$ ist $W_{rr} \Leftrightarrow \forall \nu \in P(G) \forall f \in L^1(G)$: $\lim_a (\mu_a * f * \nu - \mu_a * f) = 0.$

Dies folgt aus der Tatsache, daß die Linearkombinationen der Funktionen $f*\nu - f$, $f \in L^1(G)$ und $\nu \in P(G)$, in $L_0(G)$ — das ist jener Teilraum von $L^1(G)$, der aus allen Funktionen $f$ mit $\int f(x)dx = 0$ besteht — dicht liegen (dasselbe gilt für $\nu * f - f$); daraus folgt unmittelbar, daß beide Begriffe äquivalent sind. Außerdem erhalten wir:

(2) $\quad \mu_a$ ist $W_{rr} \Leftrightarrow \forall f \in L_0(G)\colon \lim\limits_{a} \mu_a * f = 0.$

Der Begriff $W_{rr}$ wurde unabhängig von [5] in einer speziellen Form bereits in [10] untersucht, es gilt nämlich für die einer Punktfolge $x_n$ zugeordnete Maßfolge

$$\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \delta_{x_k}$$

ist im Sinne von [10] $L^1$-gleichverteilt, wenn die Folge $\mu_N$ die Eigenschaft $W_{rr}$ besitzt.

(3) Wenn $\mu_a$ ein $W_{xy}$-Netz ist ($x, y, z$ als Indizes der Buchstaben $S$, $W$ oder $U$ bedeuten stets Variable mit Werten in $\{r, l\}$), so ist $\mu_a^*$ ein $W_{x',y'}$-Netz ($l' := r$, $r' := l$).

Durch Adjunktion läßt sich somit aus einem Satz ein „adjungierter" gewinnen (z.B. aus $W_{rl} \Rightarrow U_{rl}$ erhält man $W_{lr} \Rightarrow U_{lr}$); dieses Prinzip wird im folgenden stillschweigend angewendet. In [1] Satz 2 wurde bewiesen, daß es in jeder mittelbaren Gruppe ein $S_l$-Netz gibt (aus der Existenz eines $U_l$-Netzes folgt die Mittelbarkeit der Gruppe), es gilt sogar:

(4) In jeder mittelbaren Gruppe gibt es ein selbstadjungiertes Netz, das $S_l$ und $S_r$ erfüllt. (Das Netz heißt *selbstadjungiert*, wenn alle Maße selbstadjungiert sind.)

Dies folgt aus: $\mu_a$ ist $S_l \Rightarrow \mu_a * \mu_a^*$ ist $S_l$ und $S_r$ (und selbstadjungiert).

(5) Für $x, y \in \{r, l\}$ gelten die Implikationen: $S_x \Rightarrow W_{xy} \Rightarrow U_{xy} \Rightarrow U_x$.

Dies wird durch [1], Satz 1, und die folgende Proposition bewiesen:

Proposition 1. $W_{rr}$ (*bzw.* $W_{lr}$) $\Rightarrow \forall \nu \in P(G)\, \forall h \in \mathrm{UCr}$:

$$\lim_a \sup_{t \in G} |(\mu_a * \nu - \mu_a)({}_t h)| = 0 \quad (\textit{bzw.}\ \lim_a \sup_{t \in G} |(\nu * \mu_a - \mu_a)({}_t h)| = 0).$$

Analoges gilt für $W_{xl}$.

Beweis. Es handelt sich hier um eine kleine Verschärfung des wesentlichen Teiles von [1], Satz 1; sie wird im Beweis von Satz 1, (ii) (b), nützlich sein. Für Maße $\mu$, $\nu$ und eine beschränkte, meßbare Funktion $h$ gilt (Rechnung):

(6) $\quad \nu * \mu(h) = \mu(\nu^* * h)$ sowie $\mu * \nu(h) = \mu\big((\nu * h^{\vee})^{\vee}\big).$

Wir gehen zunächst wie in [1] vor. Für $h \in$ UCr bzw. UCl und vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es eine 1-Umgebung $U$, sodaß für die Funktion $u := (1/\lambda(U))c_U$ ($c$ kennzeichnet die charakteristische Funktion)

$$\|h * u - h\|_\infty < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad \|u * h - h\| < \varepsilon$$

gilt.

Es ist $({}_t h) * u = {}_t(h * u)$, also

$$\|({}_t h) * u - {}_t h\|_\infty = \|h * u - h\|_\infty .$$

Wenn $\mu_a$ die Eigenschaft $W_{rr}$ besitzt, so

$$\begin{aligned}
\exists a_0 \ \forall a \geqslant a_0 \colon & |(\mu_a * \nu - \mu_a)({}_t h)| \\
& \leqslant |(\mu_a * \nu - \mu_a)({}_t h) - (\mu_a * \nu - \mu_a) * \check{u}\,({}_t h)| + \|(\mu_a * \nu - \mu_a) * \check{u}\|_1 \|h\|_\infty \\
& \leqslant \|\mu_a * \nu - \mu_a\| \, \|{}_t h - ({}_t h) * u\|_\infty + \varepsilon \|h\|_\infty \\
& < (2 + \|h\|_\infty)\varepsilon .
\end{aligned}$$

Für die folgende Proposition 2 benötigen wir neben den Begriffen $S_x$, $W_{xy}$, $U_{xy}$ und $U_x$ auch die abgeschwächten Begriffe $S'_x$, $U'_{xy}, \ldots$, die man aus den ursprünglichen durch Ersetzen des Terms $\forall \nu \in P(G)$ durch $\forall \delta_x$, $x \in G$, erhält.

PROPOSITION 2. (i) *Für alle Begriffe gilt: $\mu_a$ ist genau dann gleichverteilt, wenn*

$$\lim_a (\delta_x * \mu_a - \mu_a) = 0 \qquad (\textit{bzw. } \lim_a (\mu_a * \delta_x - \mu_a) = 0)$$

*gleichmäßig in $x$ auf kompakten Mengen in der entsprechenden Topologie.*

(ii) *Allgemein gilt:* $U_{xx} \Leftrightarrow U'_{xx}$, $W_{xx} \Leftrightarrow W'_{xx}$, $U_x \Leftrightarrow U'_x$.

(iii) *Für Folgen gilt:* $S_x \Leftrightarrow S'_x$, $W_{xy} \Leftrightarrow W'_{xy}$, $U_{xy} \Leftrightarrow U'_{xy}$.

Beweis. (i) wurde in [1], Satz 3, bewiesen; der dort angegebene Beweis weist für $\Rightarrow$ eine Lücke auf, die wir umgehen werden.

$\mu_a$ besitze die Eigenschaft $S_l$ (der Beweis für die anderen Fälle verläuft analog). Weil die Gruppe mittelbar ist, gibt es für jede kompakte Menge $K \subset G$ und $\varepsilon > 0$ ein $g \in L^1 \cap P$, sodaß $\forall x \in K$: $\|\delta_x * g - g\|_1 < \varepsilon$ ist (das ist die Eigenschaft $P_1$, siehe [9], Chapter 8, § 3).

$\exists a_0 \ \forall a \geqslant a_0$: $\|g * \mu_a - \mu_a\| < \varepsilon$ aufgrund der Voraussetzung über $\mu_a$. Daher ist für $x \in K$ und $a \geqslant a_0$

$$\begin{aligned}
&\|\delta_x * \mu_a - \mu_a\| \\
&\qquad \leqslant \|\delta_x * g * \mu_a - g * \mu_a\| + \|\delta_x * g * \mu_a - \delta_x * \mu_a\| + \|g * \mu_a - \mu_a\| \\
&\qquad \leqslant \|\delta_x * g - g\| + 2\|g * \mu_a - \mu_a\| < 3\varepsilon .
\end{aligned}$$

Für $U_{lr}$ ergibt sich die Umkehrung aus

$$\begin{aligned} |(\nu*\mu_a-\mu_a)(h)| &= \left|\int \mu_a({}_xh-h)\,d\nu(x)\right| \\ &\leqslant \int_K |\mu_a({}_xh-h)|\,d\nu(x)+2\,\|h\|_\infty \nu(K^c) < \varepsilon+2\,\|h\|_\infty\varepsilon \end{aligned}$$

für passendes kompaktes $K \subset G$ und $a \geqslant a_0$.

(ii) Man kann den Beweis — der i.w. auf der Stetigkeit der Abbildung $x \to h_x$ bzw. $x \to {}_xh$ für $h \in \mathrm{UCr}$ bzw. $h \in \mathrm{UCl}$ beruht — von [1], Satz 4, auf $U_r$ sowie $U_{xx}$ übertragen. Es verbleibt der Fall $W_{rr}$ (bzw. der adjungierte Fall $W_{ll}$, der analog behandelt werden kann).

$W_{rr} \Rightarrow W'_{rr}$ ist selbstverständlich. Es erfülle $\mu_a$ die Eigenschaft $W'_{rr}$; es gilt demnach

$$\forall x \in G\ \forall f \in L^1\colon\ \lim_a \mu_a*(\delta_x*f-f) = 0.$$

Entsprechend der Charakterisierung (2) von $W_{rr}$-Netzen und der Tatsache, daß die Linearkombinationen der Funktionen $\delta_x*f-f$ (ebenso wie $f*\delta_x-f$), $f \in L^1$ und $x \in G$, in $L_0(G)$ dicht liegen, ergibt sich das Gewünschte.

(iii) wurde in [1], Satz 12, bewiesen.

Ein Beispiel soll zeigen, daß $S_x$ non$\Leftrightarrow S'_x$, die in Proposition 2 (i) verlangte Forderung der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen nicht weggelassen werden kann. Wir betrachten die additive Gruppe der reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$. Jedem $a := (\{x_1, \ldots, x_m\}, n)$, $x_j \in \boldsymbol{R}$ und $n \in \boldsymbol{N}$, ordnen wir ein Maß

$$\mu_a := n^{-m} \sum_{x\in E_a} m(x)\,\delta_x$$

zu, wobei

$$E_a := \left\{\sum_{j=1}^m k_j x_j\colon\ 1 \leqslant k_j \leqslant n\right\}$$

und

$$m(x) := \operatorname{card}\left\{(k_1, \ldots, k_m)\colon x = \sum_{j=1}^m k_j x_j\right\}.$$

Für $x \in \{x_1, \ldots, x_m\}$ ist $\|\delta_x*\mu_a-\mu_a\| = 2/n$, daher für alle $x \in \boldsymbol{R}$ gilt

$$\lim_a (\delta_x*\mu_a-\mu_a) = 0.$$

Für $\nu := c_{[0,1]}\lambda$ ist aber $\forall a\colon\ \|\nu*\mu_a-\mu_a\| = 2$, denn $\mu_a$ und $\nu*\mu_a$ (absolut stetig bezüglich $\lambda$) sind zueinander singulär. $\mu_a$ ist daher nicht $S_l$ ($= S_r$ für abelsche Gruppen).

Satz 1. (i) (a) $S_x \Rightarrow W_{xy}$; (b) $S_x \Leftrightarrow W_{xy}$ *genau dann, wenn die Gruppe diskret ist.*

(ii) (a) $W_{xy} \Rightarrow U_{xy}$; (b) $W_{xx} \Leftrightarrow U_{xx}$ *genau dann, wenn $G$ kompakt ist (für kompakte Gruppen ist* $W_{xy} \Leftrightarrow U_{xy}$); (c) *für Folgen gilt:* $W_{xy} \Leftrightarrow U_{xy}$.

Beweis. (i) (a) ist selbstverständlich.

(i) (b) Wenn die Gruppe diskret ist, so ist $L^1(G)$ mit dem Raum aller beschränkten Radonmaße identisch, somit gilt natürlich $S_x \Leftrightarrow W_{xy}$. In [8] wurde schon anhand eines Beispiels $S_x$ non$\Leftrightarrow W_{xy}$ gezeigt. Wir wollen diesen Sachverhalt etwas allgemeiner formulieren und beweisen. Dazu benötigen wir (wie in [8] schon bemerkt wurde):

(7) Ist $\mu_a$ ein $S_x$-Netz, so $\lim_a \|\mu_a - (\mu_a)_a\| = 0$; $(\mu_a)_a$ bezeichnet den absolut stetigen Anteil (bezüglich $\lambda$) von $\mu_a$.

Für ein $g \in L^1 \cap P$ gilt nämlich

$$\|\mu_a - (\mu_a)_a\| + \|(\mu_a)_a - g * \mu_a\| = \|\mu_a - g * \mu_a\| \to 0$$

(weil die beiden Summanden zueinander singulär sind). In nicht diskreten Gruppen kann es daher keine $S_x$-Netze mit singulären Maßen (insbesondere mit Maßen von endlichem Träger) geben.

(8) In jeder mittelbaren Gruppe gibt es $W_{xy}$-Netze von Maßen mit endlichem Träger.

Dies folgt unmittelbar aus:

Für jedes $\mu \in P(G)$, $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\mu' \in P(G)$ mit endlichem Träger, sodaß $\|\mu * f - \mu' * f\|_1 < \varepsilon$ ist.

Entsprechendes gilt für $f * \mu$.

Der Beweis ergibt sich aus Standardüberlegungen (cf. [9], Chapter 3, § 5.8). Ist $\mu_a$ ein $W_{xr}$-Netz und gilt

$$\forall f \in L^1\colon \lim_a \|\mu_a * f - \mu_a' * f\|_1 = 0,$$

so ist auch $\mu_a'$ ein $W_{xr}$-Netz (im Falle $W_{xl}$ ist $\|f * \mu_a - f * \mu_a'\| \to 0$ die entsprechende Voraussetzung), somit läßt sich aus jedem $W_{xy}$-Netz durch Störung in der rechten (für $y = r$) bzw. linken (für $y = l$) starken Operatortopologie ein $W_{xy}$-Netz von Maßen mit endlichem Träger gewinnen; derartige Netze erfüllen in nicht diskreten Gruppen (obige Überlegung) niemals die Bedingung $S_x$.

(ii) (a) wurde i.w. schon in [1], Satz 1, bewiesen (vgl. Proposition 1).

(ii) (b) Für kompakte Gruppen ist nach [8], Proposition 2, $W_{xy} \Leftrightarrow U_{xy}$. Ist die Gruppe nicht kompakt, so können wir ein $U_{xx}$-Netz „konstruieren", das die Eigenschaft $W_{xx}$ nicht erfüllt. Wir wollen dies für den Fall $U_{rr} \not\Rightarrow W_{rr}$ tun und die im Falle $U_{lr} \not\Rightarrow W_{lr}$ benötigte zusätzliche Überlegung skizzieren.

Wir benützen folgende Hilfsüberlegung:

(9) Hat ein Maß $\mu$, das endlichen Träger ($\mathrm{Tr}\,\mu =: \{x_1, \ldots, x_m\}$) besitze, die Eigenschaft $x_i^{-1} x_j \notin UU^{-1}$ für $i \neq j$ und eine vorgegebene

1-Umgebung $U$, so gilt für jedes $f \in L^1$, das außerhalb von $U$ verschwindet: $\|\mu * f\|_1 = \|f\|_1$.

Aufgrund der Voraussetzung über $\mathrm{Tr}\,\mu$ sind nämlich die Funktionen $x \to f(x_j^{-1}x)$ außerhalb der paarweise disjunkten Mengen $x_j U$ Null. Weil es für jede 1-Umgebung $U$ (für diskrete Gruppen muß man $\mathrm{card}\, U \geqslant 2$ verlangen) ein $f \in L_0(G)$ mit $\|f\|_1 = 1$ gibt, das außerhalb von $U$ verschwindet, ersieht man aus (9), daß Netze $\mu_a$, für die $\mathrm{Tr}\,\mu_a$ die in (9) verlangte Bedingung erfüllt ($\forall\, a$ und ein festes $U$) niemals der Eigenschaft $W_{xx}$ genügen können (siehe (2) oben).

In jeder nicht kompakten Gruppe gilt:

(10) Es gibt ein $U_{xx}$-Netz von Maßen mit endlichem Träger, sodaß $\forall\, K \subset G$, kompakt $\exists\, a(K)$ $\forall\, a \geqslant a(K)$: $x, y \in \mathrm{Tr}\,\mu_a$, $x \neq y$ $\Rightarrow x^{-1}y \notin K$.

Aus (9) und (10) ergibt sich sodann die Existenz eines $U_{rr}$-Netzes, das $W_{rr}$ nicht erfüllt.

B e w e i s von (10). Wir geben für $\varepsilon > 0$, $h_1, \ldots, h_r \in \mathrm{UCr}$, $\nu_1, \ldots, \nu_s \in P(G)$ und $K$ ($\subset G$ und kompakt) ein $\mu'$ mit endlichem Träger an, für welches $x, y \in \mathrm{Tr}\,\mu \Rightarrow x^{-1}y \notin K$ und $|(\mu' * \nu_i - \mu')(h_j)| < \varepsilon$. Wegen (8) gibt es in der Gruppe $W_{rr}$-Netze mit endlichem Träger, somit $\exists\, \mu (\mathrm{Tr}\,\mu =: \{x_1, \ldots, x_m\})$, das aufgrund von Proposition 1

$$\forall\, t \in G\ \forall\, i, j\colon\ |\mu * \nu_i({}_t h_j) - \mu({}_t h_j)| < \varepsilon$$

erfüllt. Wir setzen $\nu_0 := \delta_1$ und betrachten die $r(s+1)m$-Tupel reeller Zahlen $t(y) := \big(\nu_i\big({}_{yx_k}(h_j)\big)\big)_{i,j,k}$. Weil $\big|\nu_i\big({}_{yx_k}(h_j)\big)\big| \leqslant \|h_j\|_\infty$ ist, liegen die Vektoren $t(y)$, $y \in G$, in einer beschränkten Teilmenge des $R^{r(s+1)m}$; es gibt daher eine Partition von $G$ ($G = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_p$) durch endlich viele Mengen, sodaß für $y, y' \in Y_l \Rightarrow \|t(y) - t(y')\|_\infty < \varepsilon$ gilt. Es muß ein $Y$ ($= Y_l$) geben, welches nicht relativ kompakt ist; in $Y$ gibt es eine Folge paarweise verschiedener Punkte $y_1, y_2, \ldots$, sodaß

$$\forall\, i \neq j\colon\ y_i^{-1} y_j \notin (\mathrm{Tr}\,\mu) K (\mathrm{Tr}\,\mu)^{-1};$$

denn angenommen es gäbe nur endlich viele Punkte $y_1, \ldots, y_n$, die dieser Bedingung genügen, so müßte für jedes weitere $y \in Y$ die Beziehung $y_l^{-1} y \in (\mathrm{Tr}\,\mu) K (\mathrm{Tr}\,\mu)^{-1}$ für ein gewisses $l$ (bzw. $y^{-1} y_l \in (\mathrm{Tr}\,\mu) K (\mathrm{Tr}\,\mu)^{-1}$ was man ähnlich behandeln kann), also

$$Y \subset \bigcup_{l=1}^{n} y_l (\mathrm{Tr}\,\mu) K (\mathrm{Tr}\,\mu)^{-1}$$

folgen, entgegen der Vereinbarung über $Y$. Wir definieren nun

$$\mu' := \sum_{k=1}^{m} \mu(x_k)\, \delta_{y_k x_k}, \qquad \mathrm{Tr}\,\mu' = \{y_1 x_1, \ldots, y_m x_m\}$$

erfüllt

$$(y_j x_j)^{-1}(y_k x_k) \notin K \qquad \text{für } i \neq j.$$

Es ist nur noch

$$\forall\, i, j\colon\ |(\mu' * \nu_i - \mu')(h_j)| < 3\varepsilon$$

zu zeigen. Weil $y_1, \ldots, y_m \in Y$, so ist $\forall k\colon \|t(y_k) - t(y_1)\|_\infty < \varepsilon$, d.h.

$$\forall i, j, k\colon\ |\nu_i({}_{y_k x_k}h_j) - \nu_i({}_{y_1 x_k}h_j)| < \varepsilon,$$

also

$$|\mu * \nu_i({}_{y_1}h_j) - \mu' * \nu_i(h_j)| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu(x_k)|\nu_i({}_{y_1 x_k}h_j) - \nu_i({}_{y_k x_k}h_j)| < \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung über $\mu$ gilt

$$|\mu * \nu_i({}_{y_1}h_j) - \mu({}_{y_1}h_j)| < \varepsilon$$

also insgesamt

$$|(\mu' * \nu_i - \mu')(h_j)| \leqslant |(\mu' * \nu_i)(h_j) - (\mu * \nu_i)({}_{y_1}h_j)| + |(\mu * \nu_i - \mu)({}_{y_1}h_j)| + \\ + |(\mu * \nu_0)({}_{y_1}h_j) - (\mu' * \nu_0)(h_j)| < 3\varepsilon.$$

Der Beweis für $U_{ll} \Rightarrow W_{ll}$ verläuft analog.

Bemerkung. $U_{lr} \Rightarrow W_{lr}$ in nicht kompakten Gruppen können wir nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung beweisen, die aber für alle kompakten Erweiterungen zusammenhängender (mittelbarer) Gruppen oder für Gruppen mit relativ kompakter invarianter 1-Umgebung erfüllt ist:

*Es gibt eine* 1-*Umgebung* $U$ *mit* $A = \{xux^{-1}\colon u \in U, x \in G\}^- \neq G$.

Wir müssen von einem $S_l$-Netz ausgehen (Proposition 1 liefert nicht die gewünschte Gleichmäßigkeitsaussage) und erhalten nicht Summen von Punktmaßen, sondern Maße der Form $\sum_k d_k m_k * \delta_k$, $\operatorname{Tr} m_k \subset W$, wobei $W$ so gewählt ist, daß $W^{-1}x_0 W \cap A = \emptyset$ für ein $x_0 \in A^c$ gilt. Wenn $f \in K(G)$ und $\operatorname{Tr} f \subset V$ und $y_k$ so gewählt (ähnlich wie oben) ist, daß die Mengen $x_0 x_k y_k V \cup x_k y_k V$ paarweise disjunkt sind, so gilt für $\mu' := \sum_k d_k m_k * \delta_{x_k y_k}$

$$\|\delta_{x_0} * \mu' * f - \mu' * f\| = 2\,\|f\|_1,$$

das Netz $\mu'_a$ kann daher nicht $W_{lr}$ erfüllen, bei geeigneter Wahl von $y_k$ ist es aber $U_{lr}$.

(ii) (c) Wir verwenden die Tatsache, daß eine Folge $g_n$ von Funktionen aus $L^1(G)$ genau dann gegen Null konvergiert, wenn sie bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ gegen Null konvergiert und lokal stochastisch gegen Null konvergiert.

Unter der Voraussetzung $\mu_n$ ist eine $U_{lr}$-Folge (die anderen Fälle lassen sich analog beweisen) zeigen wir, daß für alle $f \in K(G)$ und $\nu \in P(G)$ die Folge $g_n := (\nu * \mu_n - \mu_n) * f$ gegen Null konvergiert; das genügt, denn $\|\nu * \mu_n - \mu_n\| \leqslant 2$ und $K(G)$ liegt in $L^1(G)$ dicht. Zuerst zeigen wir die schwache Konvergenz. Für $\varphi \in L^\infty$ gilt

$$\int g_n(y)\varphi(y)\,dy = \iiint \big(f(t^{-1}s^{-1}y) - f(t^{-1}y)\big)\varphi(y)\,dy\,d\nu(s)\,d\mu_n(t)$$
$$= (\nu * \mu_n - \mu_n)(h),$$

wobei $h(t) := \int f(t^{-1}y)\varphi(y)\,dy$, weil $f \in K(G)$ ist $h \in \mathrm{UCr}$, und nach Voraussetzung gilt

$$\lim_n (\nu * \mu_n - \mu_n)(h) = 0.$$

Die lokal stochastische Konvergenz ergibt sich wie folgt ($K \subset G$ kompakt, sei vorgegeben): $g_n(y) = (\nu * \mu_n - \mu_n)({}_{y^{-1}}f^{\vee}) \to 0$ für alle $y \in G$ nach Voraussetzung an $\mu_n$. Weil $x \to {}_x f$ bezüglich der sup-Norm ($f \in K(G)$!) eine stetige Abbildung ist, muß die Menge $\{{}_{y^{-1}}f : y \in K\}$ totalbeschränkt sein, daher konvergiert $g_n$ sogar gleichmäßig auf $K$ gegen Null, insbesondere stochastisch.

Satz 2. *Für eine* $[\mathrm{FC}]^-$*-Gruppe gilt:*

(i) $S_r \Leftrightarrow S_l$,

(ii) $W_{rx} \Leftrightarrow W_{lx}$,

(iii) $U_{lx} \Leftrightarrow U_{rx}$.

Zum Beweis benötigen wir folgendes

Lemma 1. *In einer* $[\mathrm{FC}]^-$*-Gruppe gibt es ein zentrales* $S_x$*-Netz.*

Beweis. In [6] folgende Proposition wurde bewiesen: $G \in [\mathrm{FC}]^-$ dann und nur dann, wenn

$$(*) \qquad \forall K(\text{kompakt}) \subset G;\ \forall \varepsilon > 0\ \exists g \in Z(L^1):\ \|\delta_x * g - g\|_1 < \varepsilon.$$

Wir benötigen hier nur die eine Richtung ($\Rightarrow$), die sich aus dem Struktursatz von $[\mathrm{FC}]^-$-Gruppen (cf. [11]) und der entsprechenden Tatsache für diskrete [FC]-Gruppen — was von Leptin in [7] bewiesen wurde — ergibt. $(*)$ bedeutet nach Proposition 2 die Existenz eines zentralen $S_l$-Netzes.

Beweis des Satzes 2. (i) $\mu_a$ erfülle $S_r$. Für $\varepsilon > 0$ und $\nu \in P(G)$ gibt es ein $g \in L^1 \cap P$, sodaß $\|\nu * g - g\|_1 < \varepsilon$ und $g \in Z(L^1)$ nach Lemma 1. Zu $g$ gibt es ein $a_0$, sodaß

$$\forall a \geqslant a_0:\ \|g * \mu_a - \mu_a\| = \|\mu_a * g - \mu_a\| < \varepsilon.$$

Somit für $a \geqslant a_0$ ist

$$\begin{aligned}
&\|\nu*\mu_a-\mu_a\| \\
&\qquad \leqslant \|\nu*g*\mu_a-g*\mu_a\|+\|\nu*\mu_a-\nu*g*\mu_a\|+\|g*\mu_a-\mu_a\| \\
&\qquad \leqslant \|\nu*g-g\|+\|\nu*\mu_a-\nu*\mu_a*g\|+\varepsilon \\
&\qquad \leqslant \varepsilon+\|\mu_a-\mu_a*g\|+\varepsilon<3\varepsilon .
\end{aligned}$$

(ii) $\varepsilon>0$, $\nu \in P(G)$, $f \in L^1$ seien vorgegeben, und $g \in Z(L^1) \cap P$ wie oben gewählt, also $\|\nu*g-g\|_1<\varepsilon$. Wenn $\mu_a$ den Begriff $W_{rr}$ erfüllt, so

$$\exists a_0 \ \forall a \geqslant a_0: \ \|\mu_a*g*f-\mu_a*f\|_1<\varepsilon,$$

somit für $a \geqslant a_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\|(\nu*\mu_a-\mu_a)*f\|_1 \\
&\leqslant \|\nu*g*\mu_a*f-g*\mu_a*f\|_1+\|(\nu*\mu_a-\nu*g*\mu_a)*f\|_1+\|(g*\mu_a-\mu_a)*f\|_1 \\
&\leqslant \|\nu*g-g\|_1\|f\|_1+\|\nu*(\mu_a-\mu_a*g)*f\|_1+\|(\mu_a*g-\mu_a)*f\|_1 \\
&\leqslant \varepsilon\|f\|_1+\|(\mu_a-\mu_a*g)*f\|_1+\varepsilon<\varepsilon\|f\|_1+2\varepsilon .
\end{aligned}$$

(iii) $\varepsilon>0$, $h \in \mathrm{UCr}$, $\nu \in P$ seien vorgegeben; $\|\nu*g-g\|_1<\varepsilon$ (wie oben); $\mu_a$ sei ein $U_{rr}$-Netz, somit

$$\exists a_0 \forall a \geqslant a_0: \ |(\mu_a*g-\mu_a)(\nu^**h)|<\varepsilon$$

(es wurde (6) und $h \in \mathrm{UCx} \Rightarrow \nu*h$ sowie $(\nu*h^{\vee})^{\vee} \in \mathrm{UCx}$ benützt). Es gilt für $a \geqslant a_0$:

$$\begin{aligned}
&|(\nu*\mu_a-\mu_a)(h)| \\
&\qquad \leqslant |(\nu*g*\mu_a-g*\mu_a)(h)|+|(\nu*\mu_a-\nu*g*\mu_a)(h)|+|(g*\mu_a-\mu_a)(h)| \\
&\qquad \leqslant \|\nu*g-g\|_1\|h\|_\infty+|(\mu_a-g*\mu_a)(\nu^**h)|+\varepsilon \\
&\qquad <\varepsilon\|h\|_\infty+2\varepsilon .
\end{aligned}$$

Die Gruppe $G_I := Z \times_\sigma Z_2$ (halbdirektes Produkt der Gruppe ganzer Zahlen $Z$ mit der multiplikativen Gruppe der Zahlen 1 und $-1$; $\sigma(1)n = n$, $\sigma(-1)n = -n$ für alle $n \in Z$) ist nicht aus [FC] und es gibt dort eine $S_l$-Folge, welche nicht $S_r$ erfüllt (cf. [8]). $G_I$ ist diskret, daher $S_x \Leftrightarrow W_{xy}$ ($\Leftrightarrow U_{xy}$ für Folgen), $U_{xy} \Leftrightarrow U_x$, somit sind in $G_I$ adjungierte Begriffe nicht äquivalent.

Satz 3. *Für $G \in$ [SIN] gilt $W_{xx} \Leftrightarrow W_{xy}$.*

Beweis. Weil $G$ aus [SIN] ist, gibt es eine Basis $U_a$ von invarianten 1-Umgebungen; die Funktionen $\big(1/\lambda(U_a)\big)c_{U_a}$, wobei $c$ die charakteristische Funktion bezeichnet, bilden eine zentrale approximierende Eins (die Umkehrung ist auch richtig — nach einem Resultat von R. Mosak —

wird hier aber nicht benötigt). Somit gibt es für $\varepsilon > 0$ und $f \in L^1$ ein $g \in Z(L^1) \cap P$, sodaß

$$\|f - f*g\|_1 = \|f - g*f\|_1 < \varepsilon.$$

Wenn $\mu_a$ ein $W_{rr}$-Netz ist, so gibt es ein $a_0$ mit

$$a \geqslant a_0 \Rightarrow \|(\mu_a * \nu - \mu_a) * g\|_1 < \varepsilon \qquad (\nu \in P \text{ sei vorgegeben}).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
&\|f*(\mu_a*\nu-\mu_a)\|_1 \\
&\qquad \leqslant \|(f-f*g)*(\mu_a*\nu-\mu_a)\|_1 + \|f*g*(\mu_a*\nu-\mu_a)\|_1 \\
&\qquad \leqslant 2\,\|f*g-f\|_1 + \|f\|_1\,\|g*(\mu_a*\nu-\mu_a)\|_1 \\
&\qquad < 2\varepsilon + \|f\|_1\,\|(\mu_a*\nu-\mu_a)*g\|_1 < (2+\|f\|_1)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist $\mu_a$ auch ein $W_{rl}$-Netz; die Umkehrung ergibt sich analog. In SIN-Gruppen stimmen die linke und rechte uniforme Struktur überein, daher $U_{xx} = U_{xy} = U_x$.

Das folgende Korollar wurde bereits für den Fall $W_{rr} \Leftrightarrow W_{lr}$ in [8], Proposition 5, mit anderen Methoden gezeigt.

KOROLLAR. *Wenn $G \in [\mathrm{FIA}]^-$, dann sind alle Eigenschaften $W_{xy}$ zueinander äquivalent. Dasseble gilt für die Eigenschaften $U_{xy}$ ($x, y = r$ oder $l$).*

Der Beweis ergibt sich aus Satz 2 und Satz 3 sowie aus der Tatsache, daß $[\mathrm{FIA}]^- = [\mathrm{FC}]^- \cap [\mathrm{SIN}]$ (cf. [4]).

Wir geben nun ein Beispiel einer Gruppe $G_H$, die nicht SIN ist (wohl aber eine kompakte invariante 1-Umgebung besitzt) und konstruieren eine $U_{rr}$-Folge $\mu_n$, die nicht $U_{rl}$ erfüllt. $G_H = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{Z} \times T$ ($T$ bezeichnet die additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1) mit der Multiplikation

$$(x, m, t)(x_1, m_1, t_1) := (x + x_1, m + m_1, t + t_1 + x m_1).$$

Die Funktion $h_0(x, m, t) := \cos 2\pi t$ ist (wie man leicht nachrechnet) in UCl, aber nicht in UCr. Die Maßfolge $\mu_n' := \big(1/\lambda(A_n)\big) c_{A_n}$, wobei $A_n := \{(x, m, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant n,\ n \leqslant m \leqslant 2n\}$, erfüllt $S_r$ und $S_l$ (einfache Rechnung).

Wir benützen

LEMMA 2. *Ist die Folge $V_n$ eine Basis von 1-Umgebungen der Gruppe $G$ und $\mu_n'$ eine Folge von Maßen mit kompaktem Träger, die $S_l$ erfüllt, so gilt für jede Partition $B_{n,k}$ von $\mathrm{Tr}\,\mu_n'$, die der Beziehung $B_{n,k} \subset x_{n,k} V_n$ (für gewisse $x_{n,k}$) genügt:*

$$\mu_n := \sum_k \mu_n'(B_{n,k})\,\delta_{x_{n,k}} \text{ ist eine } U_{lr}\text{-Folge}.$$

*Im Falle $B_{n,k} \subset V_n x_{n,k}$ erhält man eine $U_{ll}$-Folge.*

Der Beweis ergibt sich aus Routineüberlegungen.

Die Folge $V_n := [-1/n, 1/n] \times \{0\} \times [-1/n, 1/n]$ bildet in der Gruppe $G_H$ eine Basis von 1-Umgebungen. Für $(x, m, t) \in \mathrm{Tr}\,\mu_n'$ gilt $m \geqslant n$, daher

$$(x, m, t)\, V_n \cap \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{Z} \times \{0\} \neq \emptyset .$$

Wir können demnach eine Partition $B_{n,k}$ von $\mu_n'$ finden, sodaß $B_{n,k} \cap \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{Z} \times \{0\} \neq \emptyset$ ist und $B_{n,k}$ erfüllt die in Lemma 2 geforderten Bedingungen. Ist $\mu_n$ die in Lemma 2 konstruierte $U_{lr}$-Folge, so wissen wir, daß $\mathrm{Tr}\,\mu_n$ aus endlich vielen Punkten besteht, die — bei geeigneter Wahl — alle in der „Ebene" $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{Z} \times \{0\}$ liegen. Für die oben definierte Funktion $h_0$ gilt $h_0(x, m, 0) = 1$ und $h_0(x, m, \pi/4) = 0$, daher $\mu_n(h_0) = 1$, während $(\delta_{(0,0,\pi/4)} * \mu_n)(h_0) = 0$; $\mu_n$ ist daher keine $U_{lr}$-Folge.

Insgesamt erhalten wir für die Gruppe $G_H$:

(i) $W_{rx} \Leftrightarrow W_{lx}$ weil $G_H \in [\mathrm{FC}]^-$.

(ii) $W_{xr}$ non$\Leftrightarrow$ $W_{xl}$, wie das eben besprochene Beispiel zeigt.

(iii) $U_{xy}$ non$\Leftrightarrow$ $W_{xy}$ (siehe Satz 1).

(iv) $S_x$ non$\Leftrightarrow$ $W_{xy}$, weil $G_H$ nicht diskret ist.

(v) $U_{xy}$ non$\Leftrightarrow$ $U_x$, denn die Folge $\frac{1}{2}(\mu_n + \mu_n^*)$ ($\mu_n$ bezeichne die eben konstruierte $U_{lr}$-Folge, die $U_{ll}$ nicht erfüllt) ist $U_l$ ($\mu_n^*$ ist $U_{rl}$, somit auch $U_{ll}$ nach Satz 2; $U_{ll}$ (bzw. $U_{lr}$) $\Rightarrow U_l$), aber nicht $U_{lr}$, denn sonst wäre $\mu_n^*$ eine $U_{lr}$-Folge, somit (Adjunktion) $\mu_n$ eine $U_{rl}$-Folge, was in $G_H$ (Satz 2) mit $U_{ll}$ gleichbedeutend ist.

Betrachtet man die Gruppe $\mathfrak{G} := G_I \times G_H$ ($G_I$ ist die oben erwähnte nicht [FC]-Gruppe), so sind keine der 12 Begriffe $S_x, W_{xy}, U_{xy}, U_x$ zueinander äquivalent (genauer: es gilt keine Implikation, die nicht in (5) genannt wurde). $\mathfrak{G}$ hat eine kompakte 1-Umgebung. Die entsprechenden Maßfolgen lassen sich explizit angeben (außer $U_{xy} \nRightarrow W_{xy}$).

Wir benötigen:

Satz 4. (i) *Das Produkt $\mu_\alpha \otimes \nu_\beta$ von $S_x$ (bzw. $W_{xy}$) -Netzen ist wieder ein $S_x$ (bzw. $W_{xy}$) -Netz.*

(ii) *Das Produkt zweier $U_{xy}$-Folgen ist ein $U_{xy}$-Netz.*

(iii) *Ist $G_1$ kompakt, so ist das Produktnetz auf $G_1 \times G_2$ zweier $U_{xy}$-Netze wiederum ein $U_{xy}$-Netz.*

(iv) *Das Produkt zweier $U_{xy}$-Netze ist i.a. kein $U_{xy}$-Netz.*

Beweis. Die zu einem Produkt $\mu_\alpha \otimes \nu_\beta$ gehörige Indexmenge besteht aus den Paaren $(\alpha, \beta)$ und der Relation $(\alpha, \beta) \leqslant (\alpha_1, \beta_1) \Leftrightarrow \alpha \leqslant \alpha_1$ und $\beta \leqslant \beta_1$.

(i) Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Proposition 2 (i) und aus der Tatsache (für den Fall $W_{xy}$), daß jedes $f \in L^1(G_1 \times G_2)$ sich durch Summen von Funktionen $(t_1, t_2) \to f_1(t_1) f_2(t_2)$ mit $f_1 \in L^1(G_1)$ bzw. $f_2 \in L^1(G_2)$

approximieren läßt. Man beachte, daß ein Maß auf $G_1 \times G_2$ i.a. nicht durch Linearkombinationen von Produktmaßen approximiert werden kann.

(ii) Wegen Satz 1 läßt sich diese Aussage auf Punkt (i) zurückführen.

(iii) Wenn $G_1$ kompakt ist, so kann man jedes $h \in \mathrm{UCr}(G_1 \times G_2)$ durch Summen von Funktionen der Gestalt $(t_1, t_2) \to h_1(t_1) h_2(t_2)$ mit $h_i \in \mathrm{UCr}(G_i)$ in der sup-Norm approximieren.

(iv) Wir betrachten die Gruppe $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen (hier ist $U_{xy} = U_x = U_y$, weil $\boldsymbol{Z}$ abelsch ist). Es gibt (vgl. [8], Proposition 3 (iii), oder Satz 1 (ii) (b)) ein $U_l$-Netz $\mu_a$ von Maßen mit endlichem Träger, sodaß $\forall a$: $x, y \in \mathrm{Tr}\,\mu_a$, $x \neq y \Rightarrow |x-y| \geqslant 2$. Die Folge

$$\nu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k$$

hat die Eigenschaft $S_l$. $E$ bezeichne ad hoc die abzählbare Menge aller beschränkten Funktionen auf $\boldsymbol{Z}$, die nur an endlich vielen Stellen die Werte 1 bzw. $-1$ annehmen und sonst Null sind. Es gibt eine Folge $f_n \in l^\infty$, sodaß $\forall n$: $f_n \in E$ und $\forall f \in E\ \forall n_0 \exists n \geqslant n_0$: $f_n = f$. Wir definieren

$$h_1 := f_1, \qquad h_n := 2 f_{k+1} - f_k \qquad \text{für } 2^k \leqslant n < 2^{k+1} \text{ und } k = 1, 2, \ldots$$

Es gilt sodann

$$2^{-n} \sum_{k=1}^{n} h_k = f_n \qquad \text{und} \qquad \|h_n\|_\infty \leqslant 3.$$

$h(z_1, z_2) := h_{z_1}(z_2)$ für $z_1 \geqslant 1$ und $h(z_1, z_2) := 0$ für $z_1 \leqslant 0$ definiert eine Funktion $h \in l^\infty(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}) = \mathrm{UCb}(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z})$. Nun gibt es für alle $a$, aufgrund der Voraussetzung an $\mathrm{Tr}\,\mu_a$, ein $f \in E$, sodaß

$$(\delta_1 * \mu_a - \mu_a)(f) = 2.$$

$\forall (n_0, a) \exists n \geqslant n_0$: $f_n = f$; daher

$$\big((\delta_0 \otimes \delta_1) * (\nu_{2^n} \otimes \mu_a) - (\nu_{2^n} \otimes \mu_a)\big)(h) = \nu_{2^n} \otimes (\delta_1 * \mu_a - \mu_a)(h)$$

$$= 2^{-n} \sum_{k=1}^{n} (\delta_1 * \mu_a - \mu_a)(h_k) = (\delta_1 * \mu_a - \mu_a)(f_n) = 2.$$

Das Netz $\nu_n \otimes \mu_a$ kann demnach nicht $U_l$ erfüllen.

In der Gruppe $\mathfrak{G}$ stimmen adjungierte Bergiffe nicht überein, denn in $G_I$ gibt es eine $S_l$-Folge $\mu_n$, die nicht $S_r$ ist (siehe oben). $G_H$ besitzt eine $S_l$-Folge $\nu_n$. $\mu_n \otimes \nu_n$ kann nicht $S_r$ sein, sonst wäre $\mu_n$ nach (11) eine $S_r$-Folge, $\mu_n \otimes \nu_n$ ist aber (vgl. Satz 4) eine $S_l$-Folge. Dieselbe Folge ist nicht $W_{rx}$, denn $\mu_n$ ist nicht $W_{rx}$, wohl ist es eine $W_{lx}$-Folge (vgl. (5): $S_x \Rightarrow W_{xy}$). Nach Satz 1 (ii) (c) ist für Folgen $W_{xy}$ mit $U_{xy}$ äquivalent, daher ist obige Folge $U_{lx}$ (aber nicht $U_{rx}$). $\mathfrak{G}$ ist nicht kompakt, daher nach Satz 1 (ii) (b) ist $W_{rr}$ non$\Leftrightarrow$ $U_{rr}$, ebenso $W_{rl}$ non$\Leftrightarrow$ $U_{rl}$ nach der anschließenden Bemerkung. Satz 4 (ii) und (v) ergibt schließlich $U_x$ non $\Leftrightarrow U_{xy}$.

In obigen Überlegungen haben wir benützt

(11) Wenn $\mu_a$ ein $S_x$-Netz (bzw. $W_{xy}$ bzw. $U_{xy}$ bzw. $U_x$) ist, dann ist $\varphi(\mu_a)$ wieder ein solches, für jede Quotientenabbildung $\varphi$ von $G$ auf $G/N$.

Der Beweis ergibt sich aus Routineüberlegungen (im Falle $W_{xy}$ benützt man den in [9], Ch. 3, § 4, definierten Operator $T_N$ von $L^1(G)$ auf $L^1(G/N)$ und die Eigenschaft $T_N(\delta_x * f) = \delta_{\varphi(x)} * T_N(f)$).

Es ist selbstverständlich, daß

(12) $\mu_a$ ist ein $W_{xr}$-Netz und $\forall f \in L^1$: $\lim\limits_a \|(\mu_a - \mu'_a)*f\|_1 = 0 \Rightarrow \mu'_a$ ist ein $W_{xr}$-Netz. Analoges gilt für $W_{xl}$.

Zu dieser Aussage geben wir folgendes

Beispiel. $G_{II} := Z_2^Z \times_\sigma Z$ (das halbdirekte Produkt der kompakten Gruppe aller zweiseitigen Folgen der Zahlen $-1$, $+1$ und der Gruppe aller ganzen Zahlen; $\sigma(z)(k_j) := (k_{j+z})_j$), $K := \{(k, 0): k \in Z_2^Z\}$; $G/K \cong Z$; $\pi$ bezeichne die Quotientenabbildung von $G_{II}$ auf $Z$.

Unter der rechten (bzw. linken) Operatortopologie wollen wir die von den Halbnormen $\|\mu * f\|_1$ (bzw. $\|f * \mu\|_1$) auf $P(G)$ induzierte Topologie verstehen. In $G_{II}$ gilt (vgl. (12))

(13) Für jede $W_{lr}$-Folge $\mu_n$ gibt es Folgen $\mu'_n$ bzw. $\mu''_n$, sodaß $\mu''_n$ nicht mehr $W_{lr}$ erfüllt, aber $\mu_n - \mu'_n \to 0$ und $\mu'_n - \mu''_n \to 0$ in der rechten bzw. linken Operatortopologie.

Aus (12) und Satz 2 ($G_{II} \in [\mathrm{FC}]^-$) folgt insbesondere $W_{xr} \not\Rightarrow W_{xl}$. Man kann (siehe (11), (12) und den Beweis von (8)) jede $W_{lr}$-Folge in $G_{II}$ durch eine $W_{lr}$-Folge von Maßen $\mu_n$ mit endlichem Träger, die $\pi(\mu_n)([-2n, 2n]) = 0$ erfüllen, in der rechten Operatortopologie approximieren.

$V_n := \{(k, 0): k_j = 0$ für $-n \leqslant j \leqslant n\}$ bildet eine Basis von 1-Umgebungen. Für $(k, z) \in \mathrm{Tr}\,\mu_n$ ist $|z| \geqslant 2n+1$, daher gibt es $a$, $b$ mit $a, b \in V_n$ und $a(k, z)b = (1, z)$. Wenn

$$\mu_n = \sum_j d_j \delta_{x_j}$$

ist, so erfüllen

$$\mu'_n := \sum_j d_j \delta_{x_j b_j} \quad \text{und} \quad \mu''_n := \sum_j d_j \delta_{a_j x_j b_j}$$

as Gedwünschte ($\mu''_n$ kann wegen (11) nicht $W_{lr}$ sein).

**Bemerkung.** Wir geben zu Satz 4 (iv) die Verschärfung:

*Es gibt Netze von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus* $l^{\infty\prime}$ *(dem Dualraum aller beschränkten Folgen reeller Zahlen), die gegen invariante Mittel konvergieren, sodaß das Produktnetz (in* $l^{\infty}(N\times N)$*) auch Mittel als Berührpunkte besitzt, die nicht invariant sind.*

## LITERATURNACHWEIS


[1] P. Gerl, *Gleichverteilung in lokalkompakten Gruppen*, Mathematische Nachrichten 71 (1976), S. 249-260.

[2] F. P. Greenleaf, *Invariant means of topological groups*, Mathematical Studies 16 (1969).

[3] — *Ergodic theory and the construction of summing sequences in amenable locally compact groups*, Communications on Pure and Applied Mathematics 26 (1973), S. 29-46.

[4] S. Großer and M. Moskowitz, *Compactness conditions in topological groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 246 (1971), S. 1-40.

[5] J. Kerstan und K. Matthes, *Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen Gruppen I*, Mathematische Nachrichten 37 (1968), S. 267-312.

[6] E. Kotzmann and H. Rindler, *Central approximate units in a certain ideal of* $L^1(G)$, Proceedings of the American Mathematical Society 57 (1976), S. 155-158.

[7] H. Leptin, *Zur harmonischen Analyse klassenkompakter Gruppen*, Inventiones Mathematicae 5 (1968), S. 249-254.

[8] W. Maxones und H. Rindler, *Bemerkungen zu einer Arbeit von P. Gerl*, Mathematische Nachrichten 79 (1977), S. 193-199.

[9] H. Reiter, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford at the Clarendon Press 1968.

[10] H. Rindler, *Gleichverteilte Folgen von Operatoren*, Compositio Mathematica 29 (1974), S. 201-212.

[11] L. Robertson, *A note on the structure of Moore groups*, Bulletin of the American Mathematical Society 75 (1969), S. 594-599.


MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT WIEN

*Reçu par la Rédaction le 13. 4. 1977*