COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XVII 1967 FASC. 1

DIE FASTDIREKTEN ZERLEGUNGEN EINER ALLGEMEINEN ALGEBRA, II*

VON

MANFRED ARMBRUST (BONN)

§ 5. Treue fastdirekte Zerlegungen. Sei C ein — im folgenden festes — voll durchschnittsabgeschlossenes, die Identität in A enthaltendes System von Kongruenzrelationen der Algebra A. C ist dann selbst ein vollständiger Verband; $+$ resp. $\sum$ mögen jetzt das Supremum in C bezeichnen; $[.,.]$ ist ein Intervall in C. Unter den fastdirekten Zerlegungen von A sollen nun diejenigen betrachtet werden, welche das Hüllensystem C kanonisch direkt zerlegen (1):

Definition 5. Die fastdirekte Zerlegung $R \subset C$ von A heißt *C-treu*, wenn C ordnungsisomorph ist dem direkten Produkt $\bigtimes_{\varrho\in R}[\varrho, A\times A]$ vermöge eines Isomorphismus φ mit $\mathrm{pr}_\varrho\varphi\sigma = \sigma$ für alle $\varrho\in R$ und $\sigma\in[\varrho, A\times A]$.

Der kanonische Isomorphismus φ ist eindeutig bestimmt: Sei nämlich $\sigma\in C$ und $\varrho\in R$; dann ist $\mathrm{pr}_\varrho\varphi\sigma = \mathrm{pr}_\varrho\varphi\varrho+\mathrm{pr}_\varrho\varphi\sigma = \mathrm{pr}_\varrho(\varphi\varrho+\varphi\sigma) = \mathrm{pr}_\varrho\varphi(\varrho+$ $+\sigma) = \varrho+\sigma$. Wegen $\varrho+\varrho' = A\times A$ für $\varrho, \varrho'\in R$ mit $\varrho\neq\varrho'$ hat man damit für beliebiges $\sigma\in C$

$$\varphi\sigma = \bigcap_{\varrho\in R}\varphi(\varrho+\sigma) = \varphi\Big(\bigcap_{\varrho\in R}(\varrho+\sigma)\Big),$$

mithin $\sigma = \bigcap_{\varrho\in R}(\varrho+\sigma)$. Diese Bedingung ist charakteristisch für die C-Treue:

SATZ 16. *Eine fastdirekte Zerlegung $R\subset C$ von A ist C-treu genau dann, wenn, für jede Relation $\sigma\in C$, $\bigcap_{\varrho\in R}(\varrho+\sigma) = \sigma$ ist* (2).

Zum Beweis dieses Satzes zunächst

---

* Dissertation, Bonn 1964. Für Teil I siehe [1].

(1) Zur Theorie der Zerlegungen vollständiger Verbände siehe § 8, insbesondere Satz 34. Die Kanonizität der Zerlegung von C in die Enden $[\varrho, A\times A]$ (Definition 5) fliesst aus der Tatsache, dass das Intervall $[\varrho, A\times A]$ *in* $C(A)$ kanonisch isomorph ist dem Kongruenzrelationenverband der Algebra A/ϱ.

(2) Das bedeutet natürlich, dass jede Faktoralgebra A/σ mit $\sigma\in C$ kanonisch fastdirekt zerlegt wird.

HILFSSATZ 4. *Sei R fastdirekte Zerlegung von A und zu jedem $\varrho \in R$ σ_ϱ eine Kongruenzrelation von A mit $\sigma_\varrho \supset \varrho$. Dann ist, für beliebiges $\varrho_0 \in R$, $\varrho_0 \cdot \bigcap_{\varrho \in R} \sigma_\varrho = \sigma_{\varrho_0}$.*

Beweis. Trivial ist $\varrho_0 \cdot \bigcap_{\varrho \in R} \sigma_\varrho \subset \sigma_{\varrho_0}$; umgekehrt folgt aus $x \sigma_{\varrho_0} y$

$$\varrho_0 x \frown \bigcap_{\varrho \in R} \sigma_\varrho y = \varrho_0 x \frown \sigma_{\varrho_0} y \frown \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \sigma_\varrho y$$

$$= \varrho_0 x \frown \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \sigma_\varrho y \supset \varrho_0 x \frown \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho y \neq \emptyset.$$

Nun zum Beweis von Satz 16: Sei $R \subset C$ fastdirekte Zerlegung von A und, für jedes $\sigma \in C$, $\bigcap_{\varrho \in R} (\varrho + \sigma) = \sigma$; dann ist die Abbildung $\varphi: C \to \bigtimes_{\varrho \in R} [\varrho, A \times A]$ mit $\varphi\sigma = (\varrho + \sigma)_{\varrho \in R}$ ein Ordnungsisomorphismus mit $\mathrm{pr}_\varrho \varphi\sigma = \sigma$ für $\sigma \in [\varrho, A \times A]$: Trivial aus $\sigma \subset \sigma'$ folgt $\varphi\sigma \subset \varphi\sigma'$, und umgekehrt zieht $\varrho + \sigma \subset \varrho + \sigma'$, für alle $\varrho \in R$, $\sigma = \bigcap_{\varrho \in R} (\varrho + \sigma) \subset \bigcap_{\varrho \in R} (\varrho + \sigma') = \sigma'$ nach sich; schließlich hat man zu beliebiger Folge $(\sigma_\varrho)_{\varrho \in R}$, mit $\sigma_\varrho \in [\varrho, A \times A]$, $\sigma := \bigcap_{\varrho \in R} \sigma_\varrho \in C$ und, mit Hilfssatz 4, $\varphi\sigma = (\sigma_\varrho)_{\varrho \in R}$.

Man folgert ohne weiteres das

KOROLLAR. *Eine fastdirekte Zerlegung $R \subset C$ von A ist C-treu genau dann, wenn jedes $\sigma \in C$ darstellbar ist als $\bigcap_{\varrho \in R} \sigma_\varrho$ mit geeigneten $\sigma_\varrho \in [\varrho, A \times A]$.*

Selbstverständlich ist C-Treue keine innere Eigenschaft der fastdirekten Zerlegungen. Zu jeder fastdirekten Zerlegung R von A gibt es ein kleinstes C, derart daß R C-treu ist, nämlich $C := \{\bigcap_{\varrho \in R'} \varrho : R' \subset R\}$. C-treue fastdirekte Zerlegungen sind nicht als Mengen von Kongruenzrelationen mit rein verbandstheoretischen Bedingungen charakterisierbar: Man adjungiere in Beispiel 6 die Operation k:

x	0	1	2	3	4	5
kx	1	2	3	4	5	0

Dann wird $C(A) = \{\mathrm{id}, \varrho_2, \sigma, A \times A\}$, mithin ist die direkte Zerlegung $\{\varrho_2, \sigma\}$ $C(A)$-treu. Dieser Kongruenzrelationenverband ist isomorph dem aus Beispiel 5, aber dort ist $\{\varrho, \sigma\}$ keine direkte Zerlegung von A.

Ist das Hüllensystem C als Verband distributiv, so ist natürlich jede endliche direkte Zerlegung $R \subset C$ von A C-treu; wenn C außerdem noch induktiv ist, sind die C-treuen direkten Zerlegungen sogar genau die endlichen direkten Zerlegungen $R \subset C$:

HILFSSATZ 5. *Sei R eine C-treue fastdirekte Zerlegung von A und C induktiv. Dann ist, für beliebige $a, b \in A$, $a \varrho b$ für fast alle $\varrho \in R$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U}$ das System aller Teilmengen $R' \subset R$, die fast alle $\varrho \in R$ enthalten. Dann ist wegen der Induktivität von C

$$\sigma := \sum_{R' \in \mathfrak{U}} \Big(\bigcap_{\varrho \in R'} \varrho\Big) = \bigcup_{R' \in \mathfrak{U}} \Big(\bigcap_{\varrho \in R'} \varrho\Big),$$

andererseits für jedes $\varrho_0 \in R$, wegen $R - \{\varrho_0\} \in \mathfrak{U}$, $\varrho_0 + \sigma = A \times A$ und deshalb, mit der C-Treue von R, $\sigma = A \times A$; also gibt es zu beliebigen $a, b \in A$ ein $R' \in \mathfrak{U}$ mit $a\Big(\bigcap_{\varrho \in R'} \varrho\Big) b$.

Beachtet man, daß es zu jeder direkten Zerlegung R von A Elemente $a, b \in A$ gibt, derart daß $a \varrho b$ für kein $\varrho \in R$ gilt — es gibt ja, zu jedem $\varrho \in R$, a_ϱ, b_ϱ mit $\varrho a_\varrho \neq \varrho b_\varrho$, und man setze $\{a\} := \bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho$, $\{b\} := \bigcap_{\varrho \in R} \varrho b_\varrho$ —, so hat man

SATZ 17. *Ist das Hüllensystem C induktiv, so ist jede C-treue direkte Zerlegung von A endlich.*

KOROLLAR. *Jede $C(A)$-treue direkte Zerlegung einer Algebra A mit endlichstelligen Operationen ist endlich.*

§ 6. C-Zerlegungskongruenzen. Kongruenzrelationen von A, welche in C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A vorkommen, mögen *C-Zerlegungskongruenzen* heißen. Man rechnet sofort nach, daß jede Vergröberung einer C-treuen fastdirekten Zerlegung C-treu ist; insbesondere kommt daher jede von id verschiedene C-Zerlegungskongruenz in einer zweielementigen C-treuen direkten Zerlegung vor. Somit ergibt sich

SATZ 18. *Eine von $A \times A$ verschiedene Kongruenzrelation $\varrho \in C$ von A ist C-Zerlegungskongruenz genau dann, wenn es eine Relation $\varrho' \in C$ gibt, derart daß $\varrho \frown \varrho' = \mathrm{id}$, $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$, $(\varrho + \sigma) \frown (\varrho' + \sigma) = \sigma$ für alle $\sigma \in C$.*

ϱ' ist ein mit ϱ vertauschbares Komplement in $C(A)$; es würde nicht genügen, von ϱ' Vertauschbarkeit mit ϱ und Komplementarität zu ϱ in C zu fordern.

KOROLLAR. *Eine von $A \times A$ verschiedene Kongruenzrelation ϱ von A ist $C(A)$-Zerlegungskongruenz genau dann, wenn sie ein mit ihr vertauschbares Komplement ϱ' in $C(A)$ besitzt, derart daß $(\varrho + \sigma) \frown (\varrho' + \sigma) = \sigma$ für alle $\sigma \in C(A)$.*

Man entnimmt der Definition der C-Treue unmittelbar, daß jede C-Zerlegungskongruenz zum Zentrum des Verbandes C gehört; die Umkehrung ist falsch, wie man an Beispiel 5 abliest. Als Zentrumselement von C besitzt die C-Zerlegungskongruenz ϱ nur ein Komplement ϱ' in C, für welches eben $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$ sein muß. Da andererseits für jedes Zentrumselement ϱ von C, mit seinem Komplement $\varrho' \in C$, $(\varrho + \sigma) \frown (\varrho' + \sigma) = \sigma$ für alle $\sigma \in C$ ist, folgt

SATZ 19. *Die C-Zerlegungskongruenzen von A sind diejenigen von $A \times A$ verschiedenen Zentrumselemente von C, die mit ihrem Komplement in C das Produkt $A \times A$ ergeben.*

KOROLLAR. *Die $C(A)$-Zerlegungskongruenzen sind diejenigen von $A \times A$ verschiedenen Zentrumselemente von $C(A)$, die mit ihrem Komplement vertauschbar sind.*

Eine C-Zerlegungskongruenz ϱ_0 ist sogar mit jedem $\sigma \epsilon C$ vertauschbar: mit Hilfssatz 4 ist ja $\varrho_0 \cdot \sigma = \varrho_0 \cdot \big((\varrho_0 + \sigma) \frown (\varrho_0' + \sigma)\big) = \varrho_0 + \sigma$; man beachte übrigens, daß in diesem Falle die Bildung des Supremums in C das Kompositum in $C(A)$ liefert.

Aus dem Korollar zu Satz 19 ergibt sich, daß die $C(A)$-Zerlegungskongruenzen gerade diejenigen Zerlegungskongruenzen von A sind, welche zum Zentrum von $C(A)$ gehören. Diese Kennzeichnung gilt nicht für beliebiges $C \subset C(A)$, weil der Begriff der Zerlegungskongruenz auf ganz $C(A)$ bezogen ist. In Beispiel 6 setze man $C := \{\varrho_1, \varrho_2, \mathrm{id}, A \times A\}$; dann gehört etwa ϱ_1 zum Zentrum von C und ist Zerlegungskongruenz von A, aber nicht C-Zerlegungskongruenz, denn es gibt keine C-treue direkte Zerlegung von A.

Das Zentrum des Verbandes C ist ein Boolescher Teilverband von C ([2], p. 27). Seien ϱ, σ C-Zerlegungskongruenzen und ϱ', σ' ihre Komplemente in C; dann gehört $\varrho + \sigma$ zum Zentrum von C und hat das Komplement $\varrho' \frown \sigma'$, und es ist $(\varrho+\sigma)\cdot(\varrho' \frown \sigma') = (\varrho \cdot \sigma)\cdot(\varrho' \frown \sigma') = \varrho \cdot \big(\sigma \cdot (\varrho' \frown \sigma')\big) = \varrho + \big(\sigma + (\varrho' \frown \sigma')\big) = A \times A$, also ist $\varrho + \sigma$ mit Satz 19 entweder C-Zerlegungskongruenz oder $A \times A$. Damit hat man bereits den

SATZ 20. *Die C-Zerlegungskongruenzen von A bilden zusammen mit $A \times A$ einen Booleschen Teilverband des Zentrums von C.*

In Algebren mit vertauschbaren Kongruenzrelationen ist der Verband der $C(A)$-Zerlegungskongruenzen zusammen mit $A \times A$ nach dem Korollar zu Satz 19 das ganze Zentrum von $C(A)$; nicht so für beliebiges $C \subset C(A)$: ein Zentrumselement von C ist dann zwar mit seinem Komplement vertauschbar, das Produkt braucht aber nicht $A \times A$ zu sein. Bei distributivem $C(A)$ ist jede Zerlegungskongruenz $C(A)$-Zerlegungskongruenz; eine zu distributivem C gehörende Zerlegungskongruenz von A braucht aber noch keine C-Zerlegungskongruenz zu sein, wie man wieder an Beispiel 6 erkennt.

Der Durchschnitt über ein beliebiges nichtleeres Teilsystem einer C-treuen fastdirekten Zerlegung ist natürlich eine C-Zerlegungskongruenz; der Durchschnitt über ein beliebiges System von C-Zerlegungskongruenzen braucht aber keine C-Zerlegungskongruenz zu sein.

Endliche C-treue direkte Zerlegungen lassen sich als Systeme von C-Zerlegungskongruenzen mit rein verbandstheoretischen Eigenschaften charakterisieren. Nennt man ein System $R \subset C$ *dual-unabhängig*, wenn, für jedes $\varrho_0 \epsilon R$, $\varrho_0 + \bigcap_{\substack{\varrho \epsilon R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho = A \times A$, so hat man

Satz 21. *Die endlichen C-treuen direkten Zerlegungen von A sind genau die endlichen dual-unabhängigen Systeme R von C-Zerlegungskongruenzen mit* $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \mathrm{id}$.

Beweis. Zu $\varrho_0 \in R$ ist $\bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \in C$ komplementär, also ist $\varrho_0 \cdot \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho = A \times A$ und damit R jedenfalls direkte Zerlegung von A. Weiter ist für jedes Teilsystem T von R und beliebiges $\sigma \in C$

$$\sigma = \bigcap_{\varrho \in T} (\varrho + \sigma) \frown \Big(\big(\bigcap_{\varrho \in R - T} \varrho\big) + \sigma\Big),$$

was man durch Induktion über $|T|$ beweist, unter Beachtung der Tatsache, daß ein endlicher Durchschnitt von C-Zerlegungskongruenzen wieder eine C-Zerlegungskongruenz ist; $T = R$ liefert damit die C-Treue.

Korollar. *Eine aus lauter C-Zerlegungskongruenzen bestehende endliche direkte Zerlegung von A ist C-treu.*

Eine aus C-Zerlegungskongruenzen bestehende unendliche direkte Zerlegung von A braucht nicht C-treu zu sein:

Beispiel 11. Sei $A := \{0, 1\}^N$ mit den zweistelligen Operationen $f_m (m \in N)$:

$$\mathrm{pr}_n f_m(x, y) := \begin{cases} \mathrm{pr}_n x & \text{für} \quad n = m, \\ \mathrm{pr}_n y & \text{für} \quad n \neq m \end{cases} \qquad (n, m \in N;\, x, y \in A).$$

Die $\varrho_n := \varrho_{\mathrm{pr}_n}$ sind Kongruenzrelationen, $R := \{\varrho_n : n \in N\}$ ist direkte Zerlegung von A und daher nach dem Korollar zu Satz 17 auf keinen Fall $C(A)$-treu. Trotzdem ist jedes ϱ_n $C(A)$-Zerlegungskongruenz: einmal ist nämlich $\bigcap_{\substack{m \in N \\ m \neq n}} \varrho_m$ mit jeder Kongruenzrelation ϱ vertauschbar, denn aus $x \varrho z$ und $\mathrm{pr}_m z = \mathrm{pr}_m y$ für alle $m \neq n$ folgt $y = f_n(y, z) \varrho f_n(y, x)$ und $\mathrm{pr}_m f_n(y, x) = \mathrm{pr}_m x$ für alle $m \neq n$; weiter hat man, mit $x(\varrho_n + \varrho) y$, $u, v \in A$ mit $\mathrm{pr}_n u = \mathrm{pr}_n x$, $\mathrm{pr}_n v = \mathrm{pr}_n y$ und $u \varrho v$. Somit erhält man aus

$$x\Big((\varrho_n + \varrho) \frown \big(\big(\bigcap_{\substack{m \in N \\ m \neq n}} \varrho_m\big) + \varrho\big)\Big) y$$

sofort $x = f_n(u, x) \varrho f_n(v, z) = y$, wobei $z \in A$ mit $x \varrho z$ und $\mathrm{pr}_m z = \mathrm{pr}_m y$ für alle $m \neq n$.

Man kann auch nicht beliebige $C(A)$-treue direkte Zerlegungen als Mengen von $C(A)$-Zerlegungskongruenzen mit rein verbandstheoretischen und relationenalgebraischen Bedingungen kennzeichnen:

Beispiel 12. Sei $A := \{0, 1\}^N$ mit der N-stelligen Operation f:

$$\mathrm{pr}_n f(x_\nu)_{\nu \in N} := \mathrm{pr}_n x_n \qquad (x_n \in A,\, n \in N).$$

Alle $\varrho_n := \varrho_{\mathrm{pr}_n}$ sind Kongruenzrelationen; daher ist $R := \{\varrho_n : n \in N\}$ direkte Zerlegung von A und $C(A)$-treu: für eine beliebige Kongruenzrelation ϱ folgt nämlich aus $x(\varrho_n + \varrho)y$ für alle $n \in N$ die Existenz von $u_n, v_n \in A$ mit $\mathrm{pr}_n u_n = \mathrm{pr}_n x$, $\mathrm{pr}_n v_n = \mathrm{pr}_n y$ und $u_n \varrho v_n$, also $x = f(u_n)_{n\in N}$ $\varrho f(v_n)_{n\in N} = y$. Mithin ist jede Kongruenzrelation Durchschnitt gewisser ϱ_n. Sei A' die Menge aller $a \in A$ mit $\mathrm{pr}_n a = 0$ für fast alle $n \in N$, mit den m-stelligen Operationen f_m $(m \in N, m \geqslant 1)$:

$$\mathrm{pr}_n f_m(x_1, \ldots, x_m) := \begin{cases} \mathrm{pr}_n x_n & \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant m, \\ \mathrm{pr}_n x_m & \text{für} \quad n \geqslant m \end{cases} \qquad (x_n \in A';\ n \in N).$$

ϱ_n' sei die Einschränkung der Relation ϱ_n auf A' $(n \in N)$; selbstverständlich sind alle ϱ_n' Kongruenzrelationen in A', und für beliebiges $\varrho \in C(A')$ hat man wieder $\bigcap_{n\in N} (\varrho_n' + \varrho) = \varrho$: zu $x(\varrho_n' + \varrho)y$ für alle $n \in N$ gibt es $u_n, v_n \in A'$ mit $\mathrm{pr}_n u_n = \mathrm{pr}_n x$, $\mathrm{pr}_n v_n = \mathrm{pr}_n y$ und $u_n \varrho v_n$; da hier $\mathrm{pr}_n x = \mathrm{pr}_n y$ für fast alle $n \in N$, kann man für fast alle $n \in N$, etwa für alle $n \geqslant m \geqslant 1$, $u_n = v_n = x$ wählen und erhält damit $x = f_m(u_1, \ldots, u_m)$ $\varrho f_m(v_1, \ldots, v_m) = y$. Somit ist wieder jede Kongruenzrelation Durchschnitt gewisser ϱ_n' und $R' := \{\varrho_n' : n \in N\}$ offenbar $C(A')$-treue fastdirekte Zerlegung von A'. Die Zuordnung $\varrho_n \to \varrho_n'$ liefert mit Hilfssatz 1 einen Verbandsisomorphismus von $C(A)$ auf $C(A')$, der nach Hilfssatz 2 sogar multiplikationstreu ist; dabei geht die $C(A)$-treue direkte Zerlegung R von A in die nach dem Korollar zu Satz 17 nicht direkte, natürlich aus lauter $C(A')$-Zerlegungskongruenzen bestehende $C(A')$-treue fastdirekte Zerlegung R' von A' über.

Es bleibt schließlich noch die Frage nach einer Charakterisierung aller C-treuen fastdirekten Zerlegungen als Systeme von C-Zerlegungskongruenzen mit rein verbandstheoretischen Bedingungen. Darauf gibt es in zwei praktisch wichtigen Fällen eine positive Antwort:

Satz 22. *Sei C induktiv oder $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$ für jedes Zentrumselement ϱ von C mit seinem Komplement $\varrho' \in C$. Dann ist jedes aus C-Zerlegungskongruenzen bestehende, dual-unabhängige System $R \subset C$ mit $\bigcap_{\varrho \in R} (\varrho + \sigma) = \sigma$ für alle $\sigma \in C$ fastdirekte Zerlegung von A* [3].

Beweis. Aus den Voraussetzungen über R folgt in jedem Falle

$$\bigcap_{\varrho\in R} \varrho = \bigcap_{\varrho\in R} (\varrho + \mathrm{id}) = \mathrm{id};$$

weiter für $T \subset R$ und $\sigma \in C$

$$\sigma + \bigcap_{\tau\in T} \tau = \bigcap_{\varrho\in R} \Big(\varrho + \sigma + \bigcap_{\tau\in T} \tau\Big) = \bigcap_{\tau\in T} (\tau + \sigma),$$

(3) Ist $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$ für das Zentrumselement ϱ von C mit seinem Komplement ϱ', so ist ϱ mit Satz 19 C-Zerlegungskongruenz (falls $\varrho \neq A \times A$); im Falle der zweiten Bedingung des Satzes 22 kommt man also mit der Forderung aus, dass R aus Zentrumselementen von C bestehe.

insbesondere also für $\sigma = \bigcap_{\varrho \in R-T} \varrho$

$$\Big(\bigcap_{\tau\in T}\tau\Big)+\Big(\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\Big) = A\times A\,;$$

für endliches $T \subset R$ ist $\bigcap_{\tau\in T}\tau$ C-Zerlegungskongruenz, mithin $\big(\bigcap_{\tau\in T}\tau\big)\cdot$ $\cdot\big(\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\big) = A\times A$. Bei induktivem C findet man wie im Beweis zu Hilfssatz 5 zu $a, b\in A$ ein endliches $T\subset R$, so daß $a\varrho b$ für alle $\varrho\in R-T$; für $R'\subset R$ ist dann

$$\Big(\bigcap_{\varrho\in R'}\varrho\Big)a \cap \Big(\bigcap_{\varrho\in R-R'}\varrho\Big)b = \Big(\bigcap_{\varrho\in T\cap R'}\varrho\Big)a \cap \Big(\bigcap_{\varrho\in R-(T\cap R')}\varrho\Big)b \neq \emptyset.$$

Sei nun $\varrho\cdot\varrho' = A\times A$ für jedes Zentrumselement ϱ von C mit seinem Komplement $\varrho'\in C$; dann ist nur noch zu zeigen, daß $\bigcap_{\tau\in T}\tau$ zum Zentrum von C gehört für beliebiges $T\subset R$, wozu es offenbar genügt, für beliebiges $\sigma\in C$, $\sigma\subset\big(\bigcap_{\tau\in T}\tau\big)+\big(\sigma\cap\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\big)$ zu verifizieren: man hat für $\tau\in T$

$$\sigma\subset\tau+\Big((\tau+\sigma)\cap\bigcap_{\substack{\varrho\in R\\ \varrho\neq\tau}}\varrho\Big)\subset\tau+\Big((\tau+\sigma)\cap\Big(\Big(\bigcap_{\substack{\varrho\in R\\ \varrho\neq\tau}}\varrho\Big)+\sigma\Big)\cap\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\Big)$$
$$=\tau+\Big(\sigma\cap\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\Big),$$

also auch

$$\sigma\subset\bigcap_{\tau\in T}\Big(\tau+\Big(\sigma\cap\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\Big)\Big)=\Big(\bigcap_{\tau\in T}\tau\Big)+\Big(\sigma\cap\bigcap_{\varrho\in R-T}\varrho\Big).$$

Allgemein ist eine solche Kennzeichnung der C-treuen fastdirekten Zerlegungen nicht möglich:

Beispiel 13. A sei die erste Algebra aus Beispiel 12, A' die Menge aller $a\in A$ mit $\mathrm{pr}_n a = 0$ für fast alle $n\in N$ oder $\mathrm{pr}_n a = 1$ für fast alle $n\in N$, ohne Operationen. ϱ_n' sei die Einschränkung von ϱ_n auf A' und C' das System aller $\bigcap_{n\in M}\varrho_n'$ mit $M\subset N$. Wegen

$$\varrho_n'\cdot\bigcap_{\substack{m\in N\\ m\neq n}}\varrho_m' = A\times A$$

ist jedes ϱ_n' C'-Zerlegungskongruenz; weiter bestimmt $\bigcap_{n\in M}\varrho_n'$ die Menge M eindeutig. Somit ist $\varrho_n\to\varrho_n'$ ein Verbandsisomorphismus von $C(A)$ auf C', der die $C(A)$-treue direkte Zerlegung R von A in das System $R' := \{\varrho_n' : n\in N\}$ überführt, welches aber keine fastdirekte Zerlegung von A' ist (vgl. Beispiel 10).

Es ist ungeklärt, ob nicht wenigstens die $C(A)$-treuen fastdirekten Zerlegungen als Mengen von $C(A)$-Zerlegungskongruenzen verbandstheoretisch charakterisierbar sind; das Hüllensystem C' in Beispiel 13 ist nämlich nachweislich kein voller Kongruenzrelationenverband. Ist N_1 die Menge aller ungeraden, N_2 die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, so sind die Relationen $\bigcap_{n \in N_1} \varrho_n'$, $\bigcap_{n \in N_2} \varrho_n' \in C'$ vertauschbar; also müßte ihr Produkt zu C' gehören, wenn C' ein voller Kongruenzrelationenverband wäre; das Produkt ist aber die Relation $\mathrm{pr}_n x = \mathrm{pr}_n y$ für fast alle $n \in N$ $(x, y \in A')$, welche offenbar nicht in C' liegt.

§ 7. Das geordnete System der treuen fastdirekten Zerlegungen. Das System $\mathfrak{T}_C(A)$ aller C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A ist als Teilbereich des Systems $\mathfrak{F}(A)$ aller fastdirekten Zerlegungen von A durch die Feiner-Relation geordnet. Jede Vergröberung einer C-treuen fastdirekten Zerlegung in $\mathfrak{F}(A)$ gehört wieder zu $\mathfrak{T}_C(A)$; daher bilden die Vergröberungen einer C-treuen fastdirekten Zerlegung in $\mathfrak{T}_C(A)$ einen vollständigen Verband; falls eine feinste C-treue fastdirekte Zerlegung existiert, ist $\mathfrak{T}_C(A)$ selbst ein vollständiger Verband.

Selbstverständlich braucht eine feinste $C(A)$-treue fastdirekte Zerlegung nicht auch in $\mathfrak{F}(A)$ unverfeinerbar zu sein, ja es kann sogar eine von ihr verschiedene feinste fastdirekte Zerlegung geben. Die Existenz einer feinsten fastdirekten Zerlegung ist nicht allgemein hinreichend für die Existenz einer unverfeinerbaren $C(A)$-treuen fastdirekten Zerlegung:

Beispiel 14. A sei die Algebra aus Beispiel 11. Man beweist genau wie in Beispiel 10, daß jede Zerlegungskongruenz Durchschnitt gewisser ϱ_n ist; also ist $R := \{\varrho_n : n \in N\}$ die feinste fastdirekte Zerlegung von A. Weil R sogar direkt ist, ist jede $C(A)$-treue fastdirekte Zerlegung als Vergröberung von R direkt und damit nach dem Korollar zu Satz 17 endlich. Hat man aber eine endliche $C(A)$-treue direkte Zerlegung S, so ist ein $\sigma_0 \in S$ Durchschnitt unendlich vieler ϱ_n, darunter ϱ_{n_0}; weil ϱ_{n_0} (siehe Beispiel 11) und $\bigcap_{\substack{\varrho \in S \\ \sigma \neq \sigma_0}} \sigma$ $C(A)$-Zerlegungskongruenzen sind, so auch $\varrho_{n_0} \frown \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \sigma \neq \sigma_0}} \sigma$ und als Komplement dazu schließlich $\bigcap_{\substack{\varrho_n \supset \sigma_0 \\ n \neq n_0}} \varrho_n$, so daß also

$$(S - \{\sigma_0\}) \smile \Big\{\varrho_{n_0}, \bigcap_{\substack{\varrho_n \supset \sigma_0 \\ n \neq n_0}} \varrho_n\Big\}$$

gemäß dem Korollar zu Satz 21 $C(A)$-treu und damit echte Verfeinerung zu S in $\mathfrak{T}_{C(A)}(A)$ ist.

An der Algebra A' in Beispiel 12 liest man ab, daß aus der Existenz einer feinsten $C(A)$-treuen fastdirekten Zerlegung (nämlich R') nicht die Existenz einer feinsten $C(A)$-treuen direkten Zerlegung folgt: jede $C(A')$-treue direkte Zerlegung ist nämlich endlich und daher verfeinerbar wie in Beispiel 14. Gibt es aber eine feinste C-treue direkte Zerlegung R, so ist R bereits die feinste C-treue fastdirekte Zerlegung und damit jede C-treue fastdirekte Zerlegung direkt: jede C-Zerlegungskongruenz kommt ja in einer C-treuen direkten Zerlegung vor und ist deshalb Durchschnitt gewisser $\varrho \in R$.

Sei R eine nicht verfeinerbare C-treue fastdirekte Zerlegung von A. Dann ist jedes $\varrho \in R$ eine maximale C-Zerlegungskongruenz: Wäre etwa $\varrho_0 \in R$ nicht maximal, also $\varrho_0 \subset \tilde{\varrho}$, $\varrho_0 \neq \tilde{\varrho}$ für eine C-Zerlegungskongruenz $\tilde{\varrho}$, so hätte man, mit dem Komplement $\tilde{\varrho}'$ von $\tilde{\varrho}$ in C, $\tilde{\varrho} \cap (\tilde{\varrho}' + \varrho_0) = \varrho_0$, mithin wären, zu beliebigem $T \subset R - \{\varrho_0\}$, $\bigcap_{\tau \in T} \tau \cap \tilde{\varrho}$ und $\bigcap_{\substack{\varrho \in R-T \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \cap (\tilde{\varrho}' + \varrho_0)$ zueinander komplementäre C-Zerlegungskongruenzen und damit

$$\Big(\bigcap_{\tau \in T} \tau \cap \tilde{\varrho}\Big) \cdot \Big(\bigcap_{\substack{\varrho \in R-T \\ \varrho \neq \varrho_0}} \varrho \cap (\tilde{\varrho}' + \varrho_0)\Big) = A \times A,$$

also wäre $\tilde{R} := (R - \{\varrho_0\}) \cup \{\tilde{\varrho}, \tilde{\varrho}' + \varrho_0\}$ fastdirekte Zerlegung von A und wegen $(\tilde{\varrho} + \sigma) \cap (\tilde{\varrho}' + \varrho_0 + \sigma) = \big(\tilde{\varrho} + (\varrho_0 + \sigma)\big) \cap \big(\tilde{\varrho}' + (\varrho_0 + \sigma)\big) = \varrho_0 + \sigma$ für jedes $\sigma \in C$ auch C-treu und somit echte Verfeinerung zu R in $\mathfrak{T}_C(A)$. Folglich ist jede C-Zerlegungskongruenz σ Durchschnitt gewisser $\varrho \in R$, denn man hat $\sigma = \bigcap_{\varrho \in R} (\varrho + \sigma)$, und $\varrho + \sigma$ ist als C-Zerlegungskongruenz oder $A \times A$ wegen der Maximalität von ϱ entweder gleich ϱ oder $A \times A$. Damit gilt der

Satz 23. *Es gibt höchstens eine nicht verfeinerbare C-treue fastdirekte Zerlegung von A; diese ist dann sogar die feinste C-treue fastdirekte Zerlegung von A.*

Hat das System $\mathfrak{R}$ von C-treuen fastdirekten Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung $S \in \mathfrak{T}_C(A)$, so ist

$$\tilde{S} := \Big\{\sum_{R \in \mathfrak{R}} \varrho_R : \varrho_R \in R \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\Big\} - \{A \times A\}$$

eine C-treue fastdirekte Zerlegung und damit gröbste gemeinsame Verfeinerung zu $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{T}_C(A)$: für $\tilde{\sigma} := \sum_{R \in \mathfrak{R}} \varrho_R \in \tilde{S}$ hat man ja

$$\tilde{\sigma} = \bigcap_{\sigma \in S} (\sigma + \tilde{\sigma}) = \bigcap_{\substack{\sigma \in S \\ \sigma \supseteq \tilde{\sigma}}} \sigma,$$

denn falls $\sigma \not\supseteq \tilde{\sigma}$, gibt es ein $\varrho_{R_0} \not\subseteq \sigma$ und damit $A \times A = \varrho_{R_0} + \sigma \subset \tilde{\sigma} + + \sigma$, weil ϱ_{R_0} Durchschnitt gewisser $\sigma' \in S$ ist; daraus folgert man wie im Beweis zu Satz 10 die Behauptung.

Satz 24. *Zu jedem System $\mathfrak{R}$ von C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A mit gemeinsamer Verfeinerung in $\mathfrak{T}_C(A)$ gibt es eine gröbste gemeinsame Verfeinerung in $\mathfrak{T}_C(A)$.*

Zusatz: *Zu $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T}_C(A)$ existiert die gröbste gemeinsame Verfeinerung genau dann, wenn*

$$\tilde{S} := \Big\{\sum_{R \in \mathfrak{R}} \varrho_R : \varrho_R \in R \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\Big\} - \{A \times A\}$$

C-treue fastdirekte Zerlegung ist; $\tilde{S}$ ist dann die gröbste gemeinsame Verfeinerung zu $\mathfrak{R}$.

Diesem Zusatz entnimmt man sofort, daß die gröbste gemeinsame Verfeinerung zu $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{T}_{C(A)}(A)$ auch gröbste gemeinsame Verfeinerung zu $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}(A)$ ist. Besitzt ein System $\mathfrak{R}$ von fastdirekten Zerlegungen von A eine $C(A)$-treue gemeinsame Verfeinerung S, so ist jedes $R \in \mathfrak{R}$ als Vergröberung von S selbst $C(A)$-treu, und es gibt eine — ebenfalls $C(A)$-treue — gröbste gemeinsame Verfeinerung zu $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}(A)$. Andererseits kann es sehr wohl zu einem System von $C(A)$-treuen fastdirekten Zerlegungen eine gröbste gemeinsame Verfeinerung in $\mathfrak{F}(A)$ geben, ohne daß eine $C(A)$-treue gemeinsame Verfeinerung existiert. Zu dem System aller (endlichen) $C(A)$-treuen direkten Zerlegungen der Algebra A aus Beispiel 11 ist $R = \{\varrho_n : n \in N\}$ einzige und damit gröbste gemeinsame Verfeinerung in $\mathfrak{F}(A)$; R ist aber nicht $C(A)$-treu.

Aus Satz 24 folgt weiterhin, daß es zu jedem System $\mathfrak{R}$ von fastdirekten Zerlegungen, welches mindestens eine $C(A)$-treue Zerlegung enthält, eine feinste gemeinsame Vergröberung in $\mathfrak{F}(A)$ gibt. Schließlich besitzt jedes nichtleere System von C-treuen fastdirekten Zerlegungen eine feinste gemeinsame Vergröberung in $\mathfrak{F}(A)$.

Zwei C-treue direkte Zerlegungen R_1, R_2 besitzen stets eine (direkte) gröbste gemeinsame Verfeinerung in $\mathfrak{F}(A)$. Da das Supremum zweier C-Zerlegungskongruenzen entsprechend der Bemerkung im Anschluß an das Korollar zu Satz 19 mit dem Kompositum in $C(A)$ übereinstimmt und

$$\bigcap_{\substack{\varrho_1 \in R_1 \\ \varrho_2 \in R_2}} (\varrho_1 + \varrho_2) = \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} \Big(\bigcap_{\varrho_2 \in R_2} (\varrho_1 + \varrho_2) \Big) = \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} \varrho_1 = \mathrm{id},$$

ist via Korollar resp. Beweis zu Satz 10

$$S := \{\varrho_1 + \varrho_2 : \varrho_1 \in R_1,\ \varrho_2 \in R_2\} - \{A \times A\}$$

direkte Zerlegung; natürlich ist S auch C-treu, denn man hat

$$\bigcap_{\substack{\varrho_1 \in R_1 \\ \varrho_2 \in R_2}} (\varrho_1 + \varrho_2 + \sigma) = \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} \Big(\bigcap_{\varrho_2 \in R_2} (\varrho_1 + \varrho_2 + \sigma) \Big) = \bigcap_{\varrho_1 \in R_1} (\varrho_1 + \sigma) = \sigma$$

für jedes $\sigma \in C$. Erfüllt C eine der beiden Bedingungen des Satzes 22, so ist zu den C-treuen fastdirekten Zerlegungen R_1, R_2 wieder

$$S := \{\varrho_1 + \varrho_2 : \varrho_1 \in R_1,\ \varrho_2 \in R_2\} - \{A \times A\}$$

C-treue fastdirekte Zerlegung und damit gröbste gemeinsame Verfeinerung zu R_1, R_2 in $\mathfrak{T}_C(A)$; dazu braucht man sich nach Satz 22 nur noch die Dual-Unabhängigkeit von S klarzumachen. Diese Überlegungen liefern den

SATZ 25. *Das System aller C-treuen direkten Zerlegungen von A ist bei der Feiner-Relation ein beschränkt vollständiger Verband mit dem Einselement* $\{\mathrm{id}\}$. *Ist C induktiv oder* $\varrho\cdot\varrho' = A\times A$ *für jedes Zentrumselement* ϱ *von C mit seinem Komplement* $\varrho'\in C$, *so bildet ganz* $\mathfrak{T}_C(A)$ *unter der Relation* $<$ *einen beschränkt vollständigen Verband.*

Die Existenz einer gröbsten gemeinsamen Verfeinerung zu zwei C-treuen fastdirekten Zerlegungen R_1, R_2 in $\mathfrak{T}_C(A)$ ist gleichbedeutend mit der Existenz einer gröbsten gemeinsamen Verfeinerung zu R_1, R_2 in $\mathfrak{F}(A)$, denn in beiden Fällen handelt es sich um das System aller $\varrho_1+\varrho_2$ mit $\varrho_1\in R_1$, $\varrho_2\in R_2$. Überraschenderweise gibt es nicht in jedem C zu zwei C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A immer eine gemeinsame Verfeinerung in $\mathfrak{F}(A)$:

Beispiel 15. Sei A die Menge aller $a\in\{0,1\}^{N\times N}$ mit nur endlich vielen verschiedenen „Zeilen" $(\mathrm{pr}_{(m,n)}a)_{n\in N}$ $(m\in N)$, ohne Operationen; sei ferner $\varrho_{m,n}:=\varrho_{\mathrm{pr}_{(m,n)}}$, $R:=\{\varrho_{m,n}: m,n\in N\}$ und C das System aller $\bigcap_{\varrho\in R'}\varrho$ mit $R'\subset R$. Dann sind $R_1:=\{\bigcap_{n\in N}\varrho_{m,n}: m\in N\}$ und $R_2: =\{\bigcap_{m\in N}\varrho_{m,n}: n\in N\}$ offenbar C-treue fastdirekte Zerlegungen von A, wenn man noch beachtet, daß $a\in\{0,1\}^{N\times N}$ genau dann nur endlich viele verschiedene Zeilen hat, wenn es nur endlich viele verschiedene „Spalten" $(\mathrm{pr}_{(m,n)}a)_{m\in N}$ $(n\in N)$ gibt. Hätten R_1 und R_2 eine gröbste gemeinsame Verfeinerung S, so müßte für beliebige $\tilde m, \tilde n\in N$

$$\Big(\bigcap_{n\in N}\varrho_{\tilde m,n}\Big)+\Big(\bigcap_{m\in N}\varrho_{m,\tilde n}\Big) = \varrho_{\tilde m,\tilde n}$$

zu S gehören und deshalb $S = R$ sein; R ist aber keine fastdirekte Zerlegung von A, denn mit $a:=(0)_{p\in N\times N}\in A$ und $b:=(1)_{p\in N\times N}\in A$ ist

$$\Big(\bigcap_{m\in N}\varrho_{m,m}\Big)a \cap \Big(\bigcap_{\substack{m,n\in N\\ m\neq n}}\varrho_{m,n}\Big)b = \emptyset.$$

Es ist nicht geklärt, ob nicht wenigstens $\mathfrak{T}_{C(A)}(A)$ immer ein Verband ist; man vergleiche dazu die Bemerkung im Anschluß an Beispiel 13.

Sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiges System von C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A und die C-Zerlegungskongruenz σ darstellbar als Durchschnitt gewisser $\varrho\in R$ für jedes $R\in\mathfrak{R}$; dann ist auch ihr Komplement $\sigma'\in C$ Durchschnitt geeigneter $\varrho\in R$ für jedes $R\in\mathfrak{R}$, nämlich $\sigma' = \bigcap_{\substack{\varrho\in R\\ \varrho\not\supset\sigma}}\varrho$, und entweder $\{\sigma\}$ (falls $\sigma = \mathrm{id}$) oder $\{\sigma,\sigma'\}$ gemeinsame Vergröberung zu $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{T}_C(A)$; mithin ist σ Durchschnitt gewisser $\tau\in T$, wenn T die feinste gemeinsame Vergröberung zu $\mathfrak{R}$ ist. Damit hat man den

SATZ 26. *Die feinste gemeinsame Vergröberung zu einem System* $\mathfrak{R}$ *von C-treuen fastdirekten Zerlegungen in* $\mathfrak{T}_C(A)$ *besteht aus den maximalen* *als Durchschnitt gewisser $\varrho \in R$ für alle $R \in \mathfrak{R}$ darstellbaren C-Zerlegungskongruenzen.*

Für nichtleeres $\mathfrak{R}$ ist in Satz 26 $\mathfrak{T}_C(A)$ durch $\mathfrak{F}(A)$ ersetzbar; für $\mathfrak{R} = \emptyset$ erhält man das

KOROLLAR. *Es gibt eine feinste C-treue fastdirekte Zerlegung von A genau dann, wenn das System R aller maximalen C-Zerlegungskongruenzen von A eine C-treue fastdirekte Zerlegung ist; R ist dann die feinste C-treue fastdirekte Zerlegung.*

Trivialerweise gibt es bei endlichem $\mathfrak{T}_C(A)$ eine feinste C-treue fastdirekte Zerlegung von A; dabei ist jede C-treue fastdirekte Zerlegung endlich und daher direkt. Ist der Boolesche Verband aller C-Zerlegungskongruenzen mit $A \times A$ endlich, so gibt es natürlich nur endlich viele C-treue fastdirekte Zerlegungen; beachtet man noch, daß ein aufsteigend oder absteigend längenendlicher oder breitenendlicher Boolescher Verband notwendig endlich ist, so hat man den

SATZ 27. *Ist das Hüllensystem C aufsteigend oder absteigend längenendlich oder breitenendlich, so besitzt A eine feinste C-treue fastdirekte Zerlegung; diese ist endlich und deshalb direkt.*

§ 8. Anwendungen. Von besonderem Interesse sind diejenigen Algebren, welche eine einelementige Unteralgebra besitzen. Bei solchen Algebren ist jede fastdirekte Zerlegung „innere" Zerlegung in dem Sinne, daß die Algebra in unabhängige Unteralgebren zerlegt wird. Sei R fastdirekte Zerlegung von A und $\{e\}$ Unteralgebra von A. Dann ist, für jedes $\varrho \in R$, $A_\varrho := \bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma e$ Unteralgebra von A und A kanonisch isomorph einem fastdirekten Produkt der $(A_\varrho)_{\varrho \in R}$ vermöge der Zuordnung $x \to (x_\varrho)_{\varrho \in R}$, wobei x_ϱ, die *ϱ-te Komponente von x bezüglich R und e*, das Element von $\varrho x \cap A_\varrho$ ist $(x \in A)$; denn $y \to \varrho y$ ist ein Isomorphismus von A_ϱ auf A/ϱ, und $x \to (\varrho x)_{\varrho \in R}$ ein Isomorphismus von A auf ein fastdirektes Produkt der A/ϱ. Dabei ist für $a, b \in A$ offenbar $a_\varrho = b_\varrho$ genau dann, wenn $a \varrho b$; das Element a ist aus seinen Komponenten „berechenbar": a ist das Element von $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho a_\varrho$. Die Unabhängigkeit der Unteralgebren A_ϱ besteht in der Beziehung $A_\varrho \cap \sum_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} A_\sigma = \{e\}$, welche sofort aus $A_\sigma \subset \varrho e$ für $\varrho, \sigma \in R$ mit $\varrho \neq \sigma$ folgt. Kein A_ϱ ist $\{e\}$, denn $A_\varrho = \{e\}$ würde $\varrho = A \times A$ bedeuten; damit hat man $A_\varrho \neq A_\sigma$ für $\varrho \neq \sigma$. Das System $\mathfrak{A}_R := \{A_\varrho : \varrho \in R\}$ der der fastdirekten Zerlegung R durch die Unteralgebra $\{e\}$ assoziierten Unteralgebren bestimmt R nicht eindeutig zurück; ferner sind die Systeme $\mathfrak{A}_R$ nicht allgemein innerhalb des Unteralgebrenverbandes von A charakterisierbar.

Beispiel 16. Sei $A := \{0, 1\}^2$ mit der nullstelligen Operation $(0, 0)$

und der zweistelligen Operation $(x, y) \to (\mathrm{pr}_0 x, \mathrm{pr}_1 y)$; dann ist $\{(0, 0)\}$ Unteralgebra und $\{\varrho_{\mathrm{pr}_0}, \varrho_{\mathrm{pr}_1}\}$ direkte Zerlegung von A. Adjungiert man die einstellige Operation g mit $g(1, 1) := (1, 1)$, $gx := (0, 0)$ sonst $(x \in A)$, so ändert sich der Unteralgebrenverband nicht, aber die Algebra hat keine nichttriviale Kongruenzrelation mehr.

In wichtigen speziellen Algebrenklassen – etwa in Gruppen mit Operatoren – gibt es zu jeder Unteralgebra A' von A höchstens eine Zerlegungskongruenz ϱ von A mit $\varrho e = A'$; in solchen Algebren ist wenigstens endliches R durch $\mathfrak{A}_R$ eindeutig bestimmt:

SATZ 28. *Bei beliebiger Algebra A ist die Zuordnung*

$$R \to \bar{R} := \Big\{\bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma : \varrho \in R\Big\}$$

auf dem Bereich der endlichen direkten Zerlegungen von A eineindeutig; die Systeme $\bar{R}$ sind charakterisiert als endliche Mengen von untereinander vertauschbaren Kongruenzrelationen in A mit den Eigenschaften

1. $\sum_{\tau \in \bar{R}} \tau = A \times A$,
2. *für jedes* $\tau \in \bar{R}$ *ist* $\tau \frown \sum_{\substack{\pi \in \bar{R} \\ \pi \neq \tau}} \pi = \mathrm{id}$,
3. $\mathrm{id} \notin \bar{R}$.

Beweis. Die Eineindeutigkeit der Zuordnung folgt sofort mit Hilfssatz 2: $R = \Big\{\sum_{\substack{\pi \in \bar{R} \\ \pi \neq \tau}} \pi : \tau \in \bar{R}\Big\}$. Ist T eine endliche Menge von untereinander vertauschbaren Kongruenzrelationen in A mit den Eigenschaften 1 bis 3, so hat man, für beliebiges $T' \subset T$, $\sum_{\tau \in T'} \tau = \prod_{\tau \in T'} \tau$ (Π ist das relationentheoretische Produkt); damit folgert man leicht

$$\Big(\sum_{\tau \in T_1} \tau\Big) \frown \Big(\sum_{\tau \in T_2} \tau\Big) = \sum_{\tau \in T_1 \frown T_2} \tau \quad \text{für} \quad T_1, T_2 \subset T.$$

Dann ist aber $R := \Big\{\sum_{\substack{\pi \in T \\ \pi \neq \tau}} \pi : \tau \in T\Big\}$ direkte Zerlegung von A und $T = \bar{R}$.

Daß dieser Satz nicht für unendliche direkte Zerlegungen gilt, entnimmt man dem Beispiel 8, wo offenbar $\bar{R} = \bar{S}$, aber $R \neq S$ ist.

Die C-treuen fastdirekten Zerlegungen lassen sich generell dualisieren:

SATZ 29. *Die Zuordnung*

$$R \to \bar{R} := \Big\{\bigcap_{\substack{\sigma \in R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma : \varrho \in R\Big\}$$

ist auf dem Bereich der C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A eineindeutig; die Systeme $\bar{R}$ sind charakterisiert als Mengen von zu C gehörenden Kongruenzrelationen in A mit den Eigenschaften

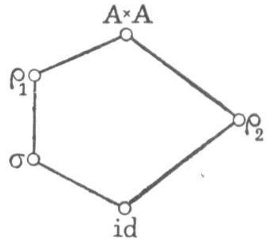
1. $\big(\sum_{\tau\in\bar{R}'}\tau\big)\cdot\big(\sum_{\tau\in\bar{R}-\bar{R}'}\tau\big) = A\times A$ *für jedes* $\bar{R}'\subset\bar{R}$,
2. *für jedes* $\tau_0\in\bar{R}$ *und jede Familie* $(\pi_\tau)_{\tau\in\bar{R}}$ *von Relationen* $\pi_\tau\in C$ *mit* $\pi_\tau\subset\tau$ *ist* $\tau_0\cap\sum_{\tau\in\bar{R}}\pi_\tau=\pi_{\tau_0}$,
3. *für jedes* $\sigma\in C$ *ist* $\sum_{\tau\in\bar{R}}(\tau\cap\sigma)=\sigma$,
4. $\mathrm{id}\notin\bar{R}$.

Beweis. Das System $\bar{R}$ besteht aus den Komplementen der $\varrho\in R$ in C; damit hat man bereits die Eineindeutigkeit der Zuordnung, und der Nachweis der Eigenschaften 1 bis 4 ist elementare verbandstheoretische Rechnung. Umgekehrt erfülle $T\subset C$ die Bedingungen 1 bis 4; dann ist $R:=\big\{\sum_{\substack{\pi\in T\\ \pi\neq\tau}}\pi:\ \tau\in T\big\}$ C-treue fastdirekte Zerlegung von A und $T=\bar{R}$. Man liest nämlich an den Eigenschaften 2 und 3 sofort ab, daß jedes $\tau\in T$ zum Zentrum von C gehört und R gerade aus den Komplementen der $\tau\in T$ in C besteht; Eigenschaft 1 liefert die Fastdirektheit von R, und die C-Treue macht man sich durch eine leichte Rechnung klar.

Man beachte die Unentbehrlichkeit der über die Unabhängigkeitsforderung des Satzes 28 hinausgehenden Bedingung 2.

Beispiel 17. Sei $A:=\{0,1,2,3\}$ mit den Operationen f, g, h:

x	0	1	2	3
fx	2	3	2	3
gx	2	2	0	0
hx	3	3	1	1



Dabei ist $C(A)=\{\mathrm{id},\ \varrho_1,\ \varrho_2,\ \sigma,\ A\times A\}$ mit $A/\varrho_1=\big\{\{0,1\},\ \{2,3\}\big\}$, $A/\varrho_2=\big\{\{0,2\},\{1,3\}\big\}$, $A/\sigma=\big\{\{0\},\{1\},\{2,3\}\big\}$. $\bar{R}:=\{\varrho_1,\ \varrho_2\}$ erfüllt sämtliche Bedingungen des Satzes 28 und die Forderungen 1 und 3 von Satz 29 für $C:=C(A)$, die direkte Zerlegung $R=\bar{R}$ ist aber nicht $C(A)$-treu.

Bei modularem C ist die Forderung 2 offensichtlich durch die Unabhängigkeitsbedingung ersetzbar; insbesondere sind bei modularem $C(A)$ die endlichen $C(A)$-treuen direkten Zerlegungen von A repräsentiert durch die endlichen Systeme $\bar{R}$ von untereinander vertauschbaren Kongruenzrelationen in A mit den Eigenschaften 2 und 3 des Satzes 28 und der Bedingung 3 von Satz 29; sind alle Kongruenzrelationen von A vertauschbar, so ist $C(A)$ modular, und die endlichen $C(A)$-treuen direkten Zerlegungen werden dargestellt durch die endlichen $\bar{R}\subset C(A)$ mit den Bedingungen 2 und 3 von Satz 28 und 3 von Satz 29.

Durch Dualisierung des Satzes 21 erhält man den

SATZ 30. *Die endlichen C-treuen direkten Zerlegungen von A werden repräsentiert durch die endlichen Systeme* $\bar{R} \subset C$ *mit den Eigenschaften, daß jedes* $\tau \in \bar{R}$ *eine von* id *verschiedene C-Zerlegungskongruenz oder* $A \times A$ *ist,* $\tau \frown \sum_{\substack{\pi \in \bar{R} \\ \pi \neq \tau}} \pi = \mathrm{id}$ *für alle* $\tau \in \bar{R}$ *und* $\sum_{\tau \in \bar{R}} \tau = A \times A$.

Ebenso dualisiert sich Satz 22:

SATZ 31. *Sei C induktiv oder* $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$ *für jedes Zentrumselement* ϱ *von C mit seinem Komplement* $\varrho' \in C$. *Dann werden die C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A repräsentiert durch die Systeme* $\bar{R} \subset C$ *mit den Eigenschaften, daß jedes* $\tau \in \bar{R}$ *eine von* id *verschiedene C-Zerlegungskongruenz oder* $A \times A$ *ist,* $\tau \frown \sum_{\substack{\pi \in \bar{R} \\ \pi \neq \tau}} \pi = \mathrm{id}$ *für alle* $\tau \in \bar{R}$ *und* $\sum_{\tau \in \bar{R}} (\tau \frown \sigma) = \sigma$ *für jedes* $\sigma \in C$.

Mit dem für endliche direkte oder beliebige C-treue fastdirekte Zerlegungen R gültigen Distributivgesetz $\sum_{U \in \mathfrak{A}} (\bigcap_{\varrho \in U} \varrho) = \bigcap_{\varrho \in D} \varrho$ mit $D := \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U$ für beliebige Systeme $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von R beweist man leicht den

SATZ 32. *Für die endlichen direkten oder beliebigen C-treuen fastdirekten Zerlegungen* R, S *ist* $R > S$ *genau dann, wenn jedes* $\tau \in \bar{R}$ *Supremum gewisser* $\pi \in \bar{S}$ *ist; das ist genau dann der Fall, wenn es zu jedem* $\pi \in \bar{S}$ *ein* $\tau \in \bar{R}$ *gibt mit* $\tau \supset \pi$.

Die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie der C-treuen fastdirekten Zerlegungen sind naturgemäß besonders weit in der Klasse der *vollständigen Verbände*.

Ein vollständiger Verband L ist interpretierbar als Algebra mit den beiden zweistelligen Operationen $\wedge$ und $\vee$ oder mit den beiden L-stelligen Operationen $\bigwedge$ und $\bigvee$, das heißt mit endlicher oder unbeschränkter Infimum- und Supremumbildung. Es wird sich zeigen, daß die Zerlegungstheorie der vollständigen Verbände im wesentlichen nicht von der Interpretation abhängt. Dazu

SATZ 33. *Jede Zerlegungskongruenz des vollständigen Verbandes* $(L;\ \wedge,\ \vee)$ *ist Kongruenzrelation in* $(L;\ \bigwedge,\ \bigvee)$.

Beweis. Sei ϱ Zerlegungskongruenz von $(L;\ \wedge,\ \vee)$ und $\varrho' \in C(L;\ \wedge, \vee)$ ein mit ϱ vertauschbares Komplement; seien weiter $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ und $(y_\lambda)_{\lambda \in L}$ Folgen von Elementen $x_\lambda, y_\lambda \in L$ mit $x_\lambda \varrho y_\lambda$ für alle $\lambda \in L$. Ist dann t das Element von $\varrho(\bigwedge_{\lambda \in L} y_\lambda) \frown \varrho' o$ (o = Nullelement von L), so hat man für alle $\lambda \in L$ einmal $\varrho(x_\lambda \wedge t) = \varrho(y_\lambda \wedge \bigwedge_{\mu \in L} y_\mu) = \varrho(\bigwedge_{\mu \in L} y_\mu) = \varrho t$, ferner $\varrho'(x_\lambda \wedge t) = \varrho'(x_\lambda \wedge o) = \varrho' o = \varrho' t$, also $x_\lambda \wedge t = t$, mithin $\bigwedge_{\lambda \in L} x_\lambda \wedge t = t$ und daher

$$\varrho(\bigwedge_{\lambda \in L} x_\lambda \wedge \bigwedge_{\lambda \in L} y_\lambda) = \varrho(\bigwedge_{\lambda \in L} x_\lambda \wedge t) = \varrho t = \varrho(\bigwedge_{\lambda \in L} y_\lambda),$$

woraus man aus Symmetriegründen $\varrho(\bigwedge_{\lambda\epsilon L} x_\lambda) = \varrho(\bigwedge_{\lambda\epsilon L} y_\lambda)$ schließt. Die Verträglichkeit von ϱ mit $\bigvee$ beweist man dual.

KOROLLAR. *Jede fastdirekte Zerlegung von* $(L; \wedge, \vee)$ *ist auch fastdirekte Zerlegung von* $(L; \bigwedge, \bigvee)$; *daher ist* $\mathfrak{F}(L; \wedge, \vee) = \mathfrak{F}(L; \bigwedge, \bigvee)$.

Man kann also einfach von den „fastdirekten Zerlegungen des vollständigen Verbandes L" sprechen, ohne sich um eine der beiden speziellen Interpretationen von L als Algebra zu kümmern.

Jede endliche direkte Zerlegung von L ist $C(L; \wedge, \vee)$-treu, denn $C(L; \wedge, \vee)$ ist distributiv ([2], theorem 5, p. 24). Eine unendliche direkte Zerlegung von L kann nicht $C(L; \wedge, \vee)$-treu sein; bei Adjunktion der Operationen $\bigwedge$ und $\bigvee$ fallen aber sozusagen die der Treue im Wege stehenden Kongruenzrelationen weg. Jede direkte Zerlegung von L ist $C(L; \bigwedge, \bigvee)$-treu. Zum Beweis dieser Tatsache zunächst einige Hilfsmittel.

Jede Zerlegungskongruenz von L ist $C(L; \wedge, \vee)$-Zerlegungskongruenz, also besitzt die Zerlegungskongruenz ϱ von L genau ein Komplement ϱ' in $C(L; \wedge, \vee)$; ϱ' ist mit ϱ vertauschbar, mithin ist die Zuordnung $\varrho \to e_\varrho$, wobei e_ϱ das Element von $\varrho e \frown \varrho' \mathrm{o}$ ist (e = Einselement von L), eine eindeutige Abbildung des Systems $Z(L)$ aller Zerlegungskongruenzen von L einschließlich $L \times L$ in L. Diese Abbildung ist sogar eineindeutig; denn man hat, für $x, y \epsilon L$, $x \varrho y$ genau dann, wenn $x \wedge e_\varrho = y \wedge e_\varrho$. In der Tat, aus $\varrho x = \varrho y$ folgt $\varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho(y \wedge e_\varrho)$, und mit $\varrho'(x \wedge e_\varrho) = \varrho'(x \wedge \mathrm{o}) = \varrho'\mathrm{o} = \varrho'(y \wedge \mathrm{o}) = \varrho'(y \wedge e_\varrho)$ ist $x \wedge e_\varrho = y \wedge e_\varrho$; ist umgekehrt $x \wedge e_\varrho = y \wedge e_\varrho$, so hat man $\varrho x = \varrho(x \wedge e) = \varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho(y \wedge e_\varrho) = \varrho(y \wedge e) = \varrho y$. Übrigens ist $\varrho e = [e_\varrho, e]$, also $e_\varrho = \bigwedge_{x \epsilon \varrho e} x$: $x \varrho e$ impliziert $\varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho e_\varrho$, $\varrho'(x \wedge e_\varrho) = \varrho'\mathrm{o} = \varrho' e_\varrho$, mithin $x \wedge e_\varrho = e_\varrho$; umgekehrt aus $x \geqslant e_\varrho$ folgt $\varrho x = \varrho(x \wedge e) = \varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho e_\varrho = \varrho e$. Ganz ähnlich zeigt man $\varrho'\mathrm{o} = [\mathrm{o}, e_\varrho]$. Man nennt die Elemente $e_\varrho \epsilon L$ $(\varrho \epsilon Z(L))$ *Komponenten von* L; das System $K(L)$ aller Komponenten ist gerade das Zentrum von L ([2], p. 27). Als einelementige Unteralgebra von L sei für das Folgende $\{\mathrm{o}\}$ ausgezeichnet. Ist dann R eine fastdirekte Zerlegung von L, so ist die ϱ-te Komponente x_ϱ des Elementes $x \epsilon L$ erklärt als das Element von $\varrho x \frown \bigcap_{\substack{\sigma\epsilon R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma \mathrm{o}$ $(\varrho \epsilon R)$; nun ist aber $\bigcap_{\substack{\sigma\epsilon R \\ \sigma \neq \varrho}} \sigma$ das Komplement ϱ' von ϱ, so daß also die Komponente x_ϱ nicht von der Zerlegung R abhängt und für $x = e$ mit der obigen Definition von e_ϱ im Einklang steht, und man hat $x_\varrho = x \wedge e_\varrho$: $\varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho x = \varrho x_\varrho$, $\varrho'(x \wedge e_\varrho) = \varrho'\mathrm{o} = \varrho' x_\varrho$; aus den Komponenten x_ϱ $(\varrho \epsilon R)$ gewinnt man das Element x als Supremum zurück, denn man hat für jedes $\sigma \epsilon R$

$$\sigma\Big(\bigvee_{\varrho\epsilon R}(x \wedge e_\varrho)\Big) = \sigma\Big(\bigvee_{\substack{\varrho\epsilon R \\ \varrho\neq}}(x \wedge e_\varrho) \vee (x \wedge e_\sigma)\Big) = \sigma\Big(\bigvee_{\substack{\varrho\epsilon R \\ \varrho\neq\sigma}}(x \wedge \mathrm{o}) \vee (x \wedge e)\Big) = \sigma x.$$

Jedenfalls wird L durch den Isomorphismus $x \to (x \wedge e_\varrho)_{\varrho \epsilon R}$ fastdirekt in das direkte Produkt $\underset{\varrho \epsilon R}{\times} A_\varrho$ der $A_\varrho = \varrho' o = [o, e_\varrho]$ eingebettet; dieser Isomorphismus ist sogar surjektiv auf $\underset{\varrho \epsilon R}{\times} A_\varrho$ und R somit direkt. Sei nämlich $(x^\varrho)_{\varrho \epsilon R}$ eine Folge von Elementen $x^\varrho \epsilon L$ mit $x^\varrho \leqslant e_\varrho$ und $x := \bigvee_{\varrho \epsilon R} x^\varrho$; dann ist, für $\varrho \neq \sigma$, $\sigma x^\varrho = \sigma(x^\varrho \wedge e_\varrho) = \sigma o$, also $\sigma(x \wedge e_\varrho) = \sigma o = \sigma x^\varrho$, ferner $\varrho(x \wedge e_\varrho) = \varrho x = \varrho x^\varrho$, mithin, für alle $\varrho \epsilon R$, $x \wedge e_\varrho = x^\varrho$. Zusammenfassend erhält man den

SATZ 34. *Jede fastdirekte Zerlegung des vollständigen Verbandes L ist direkt. Die direkte Zerlegung R zerlegt L durch den Isomorphismus $x \to (x \wedge e_\varrho)_{\varrho \epsilon R}$ in die Hauptanfänge $[o, e_\varrho]$ mit $e_\varrho \epsilon \varrho e \frown \varrho' o$ $(\varrho \epsilon R)$. Dabei ist $\varrho \epsilon R$ die durch den Endomorphismus $x \to x \wedge e_\varrho$ induzierte Kongruenzrelation in L, und man hat $x = \bigvee_{\varrho \epsilon R} (x \wedge e_\varrho)$ für alle $x \epsilon L$.*

Jetzt folgt leicht

SATZ 35. *Jede direkte Zerlegung des vollständigen Verbandes L ist $C(L; \bigwedge, \bigvee)$-treu.*

Beweis. Sei R direkte Zerlegung von L und $\sigma \epsilon C(L; \bigwedge, \bigvee)$. Als $C(L; \wedge, \vee)$-Zerlegungskongruenz ist jedes $\varrho \epsilon R$ mit allen Kongruenzrelationen von $(L; \wedge, \vee)$, also erst recht mit σ vertauschbar; daher aus $x(\bigcap_{\varrho \epsilon R} (\varrho + \sigma))y$ folgt $x \varrho z^\varrho$ und $z^\varrho \sigma y$ für alle $\varrho \epsilon R$ mit geeigneten $z^\varrho \epsilon L$, somit $x \wedge e_\varrho = z^\varrho \wedge e_\varrho$ und $(z^\varrho \wedge e_\varrho)\sigma(y \wedge e_\varrho)$, also schließlich

$$x = \Big(\bigvee_{\varrho \epsilon R} (x \wedge e_\varrho)\Big) \sigma \Big(\bigvee_{\varrho \epsilon R} (y \wedge e_\varrho)\Big) = y.$$

Die Erkenntnis, daß $\mathfrak{F}(L)$ gerade das System aller $C(L; \bigwedge, \bigvee)$-treuen direkten Zerlegungen von L ist, erlaubt die Anwendung der Sätze von § 7 auf $\mathfrak{F}(L)$. Da die direkten Zerlegungen von L repräsentiert werden durch gewisse Teilmengen von L — der direkten Zerlegung R entspricht ja eineindeutig das System K_R der Komponenten e_ϱ $(\varrho \epsilon R)$, kurzerhand *Zerlegung von L* genannt —, können die Ergebnisse von § 7 gleich für das System $\mathfrak{Z}(L)$ aller dieser K_R $(R \epsilon \mathfrak{F}(L))$ ausgesprochen werden. Dazu beweist man leicht den

HILFSSATZ 6. *Sei L ein vollständiger Verband, $G \subset Z(L)$, $\varrho := \bigcap_{\sigma \epsilon G} \sigma$ $\epsilon Z(L)$. Dann ist $e_\varrho = \bigvee_{\sigma \epsilon G} e_\sigma$, $e_{\varrho'} = \bigwedge_{\sigma \epsilon G} e_{\sigma'}$, ferner $\varrho' = \sum_{\sigma \epsilon G} \sigma'$, wobei durch $'$ die Komplementbildung im Zentrum von $C(L; \bigwedge, \bigvee)$ und durch $\sum$ das Kompositum in $C(L; \bigwedge, \bigvee)$ bezeichnet wird.*

Als unmittelbare Folgerung erhält man

SATZ 36. *Die Abbildung $\varrho \to e_\varrho$ ist ein Dualisomorphismus von $Z(L)$ auf $K(L)$, das heißt $e_{\varrho \frown \sigma} = e_\varrho \vee e_\sigma$, $e_{\varrho + \sigma} = e_\varrho \wedge e_\sigma$ für $\varrho, \sigma \epsilon Z(L)$.*

Zur Charakterisierung der Zerlegungen K_R hier der

Satz 37. *Eine Teilmenge $Z \subset L$ ist Zerlegung von L genau dann, wenn*

1. *für jede Familie $(x_z)_{z \in Z}$ von Elementen $x_z \in L$ mit $x_z \leqslant z$ und jedes $z_0 \in Z$ ist $z_0 \wedge \bigvee_{z \in Z} x_z = x_{z_0}$,*
2. *für jedes $x \in L$ ist $x = \bigvee_{z \in Z} (x \wedge z)$,*
3. $o \notin Z$.

Beweis. Sei $Z = K_R$ Zerlegung von L. Dann ist, für $x \in L$, $\bigvee_{z \in Z} (x \wedge z) = \bigvee_{\varrho \in R} (x \wedge e_\varrho) = x$, weiter, für $x^\varrho \leqslant e_\varrho (\varrho \in R)$, $e_{\varrho_0} \wedge \bigvee_{\varrho \in R} x^\varrho = x^{\varrho_0}$. Ist umgekehrt $Z \subset L$ mit den Eigenschaften 1 bis 3, so ist $x \rightarrow (x \wedge z)_{z \in Z} = : \varphi x$ ein Isomorphismus von L auf $\bigtimes_{z \in Z} [o, z]$ mit der zugehörigen direkten Zerlegung $R: = \{\varrho_{\mathrm{pr}_z \varphi} : z \in Z\}$ und $Z = K_R$.

Die Feiner-Relation in $\mathfrak{F}(L)$ überträgt sich via $R \rightarrow K_R$ auf $\mathfrak{Z}(L)$. Als einfache Folgerung aus Hilfssatz 6 hat man

Satz 38. *Die Zerlegung Z_1 von L ist feiner als die Zerlegung Z_2 von L genau dann, wenn jedes $z_2 \in Z_2$ Supremum gewisser $z_1 \in Z_1$ ist; das ist dann und nur dann der Fall, wenn es zu jedem $z_1 \in Z_1$ ein $z_2 \in Z_2$ gibt mit $z_2 \geqslant z_1$.*

Selbstverständlich entsprechen die Vergröberungen einer Zerlegung Z von L eineindeutig den Klasseneinteilungen von Z, präzis: Für jede Klasseneinteilung $\mathfrak{E}$ von Z ist $\left\{\bigvee_{z \in E} z : E \in \mathfrak{E}\right\}$ Zerlegung von L, diese Zuordnung ist eineindeutig und liefert alle Vergröberungen von Z.

Nun zur Übertragung einiger Sätze aus § 7. Es gibt höchstens eine nicht verfeinerbare Zerlegung von L; diese ist dann die feinste (Satz 23). Zu jedem System von Zerlegungen von L mit gemeinsamer Verfeinerung gibt es eine gröbste gemeinsame Verfeinerung (Satz 24). $\mathfrak{Z}(L)$ ist bei der Feiner-Relation ein beschränkt vollständiger Verband mit dem Einselement $\{e\}$; die gröbste gemeinsame Verfeinerung zu den Zerlegungen Z_1 und Z_2 ist $\{z_1 \wedge z_2 : z_1 \in Z_1, z_2 \in Z_2\} - \{o\}$ (Satz 25). Ist L aufsteigend oder absteigend längenendlich oder breitenendlich, so ist $K(L)$ endlich, und L besitzt eine feinste Zerlegung (vgl. Satz 27). L hat eine feinste Zerlegung genau dann, wenn das System M aller Atome von $K(L)$ eine Zerlegung von L ist; M ist dann die feinste Zerlegung (Korollar zu Satz 26). Selbstverständlich zieht die Existenz einer feinsten Zerlegung von L die Atomizität des Zentrums $K(L)$ nach sich. Ein vollständiger Verband mit atomarem Zentrum braucht aber noch keine feinste Zerlegung zu besitzen; die Atomizität von $K(L)$ muß darüber hinaus sozusagen L selbst erfassen:

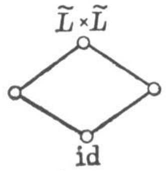
Satz 39. *Der vollständige Verband L hat eine feinste Zerlegung genau dann, wenn die Menge M der Atome des Zentrums mit jedem $x \in L$ die Bedingung $x = \bigvee_{a \in M} (x \wedge a)$ erfüllt.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung folgt aus dem Korollar zu Satz 26 und Satz 37. Umgekehrt ist mit Satz 37 nur noch zu zeigen, daß für eine Folge $(x_a)_{a \in M}$ mit $x_a \leqslant a$ stets $a_0 \wedge \bigvee_{a \in M} x_a = x_{a_0}$ ist für $a_0 \in M$. Trivial ist $x_{a_0} \leqslant a_0 \wedge \bigvee_{a \in M} x_a$; andererseits hat man

$$a_0 \wedge \bigvee_{a \in M} x_a \leqslant a_0 \wedge \Big(\bigvee_{\substack{a \in M \\ a \neq a_0}} a \vee x_{a_0}\Big) \leqslant (a_0 \vee x_{a_0}) \wedge (a_0' \vee x_{a_0}) = x_{a_0},$$

wobei a_0' das Komplement zu a_0 ist, denn jedes von a_0 verschiedene Atom von $K(L)$ ist in a_0' enthalten.

Man beachte, daß $Z(L)$ nicht das Zentrum von $C(L; \wedge, \vee)$ sein muß. Ein dreielementiger Verband $\tilde{L}$ hat den Kongruenzrelationenverband



welcher mit seinem Zentrum identisch ist; das Zentrum von $\tilde{L}$ besteht aber nur aus o und e, somit ist $Z(\tilde{L}) = \{\tilde{L} \times \tilde{L}, \mathrm{id}\}$. Immerhin ist ja $Z(L)$ dem Zentrum von L isomorph, denn $K(L)$ ist als Boolescher Verband selbstdual. Es ist sogar zu vermuten, daß für jede Algebra A und beliebiges Hüllensystem $C \subset C(A)$ der Boolesche Verband der C-Zerlegungskongruenzen isomorph ist dem Zentrum eines geeigneten vollständigen Verbandes; ein positives Teilergebnis konstatiert der

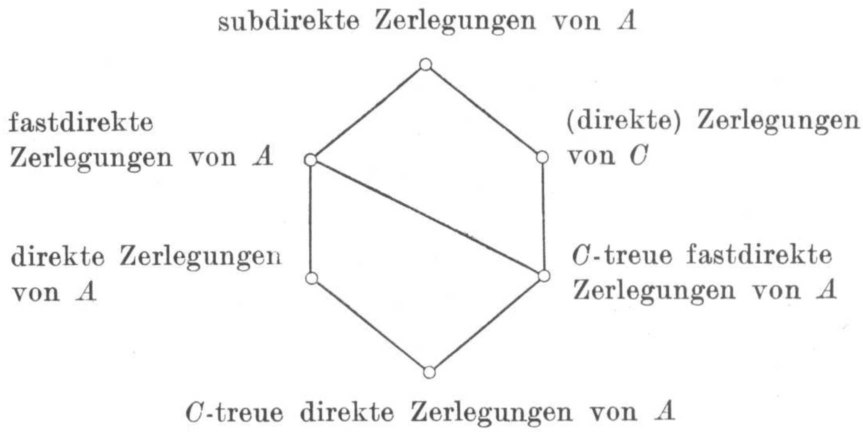
Satz 40. *Sei R fastdirekte Zerlegung von A; dann ist der Boolesche Verband aller $\bigcap_{\varrho \in R'} \varrho \; (R' \subset R)$ als Zentrum von sich selbst das Zentrum eines vollständigen Verbandes, und das System der Zerlegungen dieses Verbandes ist isomorph dem vollständigen Verband aller Vergröberungen von R in $\mathfrak{F}(A)$.*

Aus diesem Satz folgt insbesondere für den Fall, daß A eine feinste C-treue fastdirekte Zerlegung besitzt: $\mathfrak{T}_C(A)$ ist isomorph dem vollständigen Verband der Zerlegungen eines vollständigen Verbandes, und der Boolesche Verband der C-Zerlegungskongruenzen ist das Zentrum eines vollständigen Verbandes.

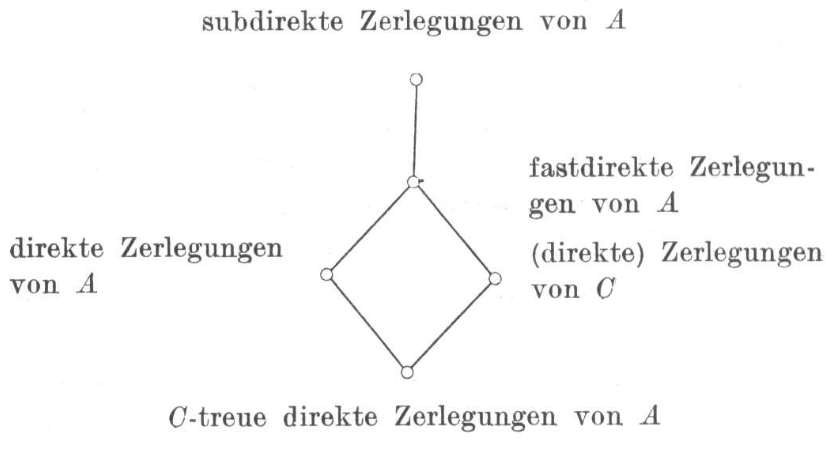
In jedem Falle ist der Boolesche Verband der C-Zerlegungskongruenzen der Algebra A (mit $A \times A$) identisch eingebettet in $K(C)$; ferner ist $\mathfrak{T}_C(A)$ kanonisch eingebettet in $\mathfrak{Z}(C)$. Die C-treue fastdirekte Zerlegung R von A zerlegt C definitionsgemäß in die Enden $[\varrho, A \times A]$ $(\varrho \in R)$; als zugehörige Zerlegung $Z \in \mathfrak{Z}(C)$ erkennt man unschwer das System aller Komplemente ϱ' der $\varrho \in R$, und mit den Sätzen 32 und 38 ist diese Zuordnung ordnungsisomorph. Man beachte, daß eine etwa vorhandene feinste C-treue fastdirekte Zerlegung von A in die feinste unter den den C-treuen fastdirekten Zerlegungen von A entsprechenden Zerlegungen von C

übergeht und nicht etwa die Existenz einer feinsten Zerlegung von C nach sich zieht. Es gibt einen vollständigen Verband L, der nur die triviale Zerlegung besitzt, dessen Kongruenzrelationenverband $C(L; \wedge, \vee)$ jedoch keine feinste Zerlegung hat. Da dieses Beispiel nur relativ mühsam wiederzugeben ist, sei hier nur auf den dreielementigen Verband $\tilde{\tilde{L}}$ verwiesen: $\mathfrak{F}(\tilde{L})$ ist echt eingebettet in $\mathfrak{Z}(C(\tilde{L}))$.

Man macht sich sofort klar, daß die Darstellungen der Algebra A als subdirektes Produkt irgendwelcher Algebren repräsentiert werden durch die Systeme R von Kongruenzrelationen in A mit $\bigcap_{\varrho \in R} \varrho = \mathrm{id}$ ([2], p. 92, theorem 9); so ist $\mathfrak{Z}(C)$ eingebettet in das System aller subdirekten Zerlegungen von A, indem der Zerlegung $\bar{R}$ von C das System aller Komplemente τ' der $\tau \in \bar{R}$ zugeordnet wird. Damit hat man für die in dieser Arbeit behandelten, mit einer Algebra A assoziierten Zerlegungen das folgende Diagramm:



Ist $\varrho \cdot \varrho' = A \times A$ für jedes Zentrumselement ϱ von C mit seinem Komplement $\varrho' \in C$ — also etwa bei $C = C(A)$ in Algebren mit vertauschbaren Kongruenzrelationen —, so wird mit Satz 29 jede Zerlegung von C durch eine C-treue fastdirekte Zerlegung von A induziert, und man hat das einfachere Diagramm:



Das letzte Diagramm ist insbesondere realisiert mit $C = C(A)$ in Gruppen mit Operatoren. Dort werden die Kongruenzrelationen repräsentiert durch die zulässigen Normalteiler, und die $C(A)$-treuen fastdirekten Zerlegungen von A sind praktisch gerade die Zerlegungen des vollständigen Verbandes der zulässigen Normalteiler. Als in diesem Zusammenhang interessante Spezialfälle seien erwähnt:

Abelsche Gruppen ohne Elemente unendlicher Ordnung (*Torsionsgruppen*); bekanntlich ist die abelsche Torsionsgruppe A (innere) diskrete direkte Summe der Untergruppen G_p, wobei, für jede Primzahl p, G_p die Menge aller Elemente von A mit der Ordnung einer Potenz von p ist ([3], p. 161, exercise 1). Das System $\mathfrak{A}$ aller nichttrivialen G_p ist die feinste Zerlegung des Untergruppenverbandes. Offenbar für jede Familie (G'_p) von Untergruppen $G'_p \subset G_p$ und beliebiges p_0 ist $G_{p_0} \cap \sum\limits_p G'_p = G'_{p_0}$ und, für jede Untergruppe A' von A, $\sum\limits_p (A' \cap G_p) = A'$; gäbe es zu $\mathfrak{A}$ eine Verfeinerung, so hätte man darin zwei nichttriviale Untergruppen A_1, A_2 und ein $G_{p_0} \in \mathfrak{A}$, derart daß $A_1 \cap A_2 = \{o\}$ und $A_1 + A_2 \subset G_{p_0}$, mithin Elemente $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, beide der Ordnung p_0, so daß für die von $a_1 + a_2$ erzeugte Untergruppe A^* einerseits $A^* \subset A_1 + A_2$, andererseits aber $(A^* \cap A_1) + (A^* \cap A_2) = \{o\} \neq A^*$ wäre.

Als weiteres Beispiel sei A ein *kommutativer Ring mit Eins und absteigender Kettenbedingung* für Ideale. Dann ist A (innere) direkte Summe noetherscher primärer Ringe $A_1, \ldots, A_n \subset A$ ([5], p. 205, theorem 3); das System der Ideale $A_1, \ldots, A_n$ ist offenbar Zerlegung des Idealverbandes von A und unverfeinerbar: die primären Ringe A_ν besitzen nämlich genau ein maximales Ideal und sind daher nicht Summe kleinerer Ideale.

Schließlich sei A ein *Hilbertraum mit einem vollstetigen symmetrischen Operator* H und C der vollständige Verband der topologisch abgeschlossenen invarianten Unterräume von A. Dann ist A (innere) direkte Summe der Eigenräume von H ([4], p. 336, theorem 6.4.-B) und das System $\mathfrak{E}$ aller Eigenräume von H Zerlegung von C; gäbe es zu $\mathfrak{E}$ eine Verfeinerung, so hätte man darin zwei nichttriviale abgeschlossene invariante Unterräume A_1, A_2 und ein $E \in \mathfrak{E}$, derart daß $A_1 \cap A_2 = \{o\}$ und $A_1 + A_2 \subset E$, weiter von o verschiedene $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, so daß also für die von $a_1 + a_2$ aufgespannte, invariante Gerade G einerseits $G \subset A_1 + A_2$, andererseits $(G \cap A_1) + (G \cap A_2) = \{o\}$ wäre. Das Kompositum eines Zentrumselementes U von C mit seinem Komplement $U' \in C$ ist die lineare Hülle, denn U' ist das Orthokomplement von U.

LITERATURNACHWEIS

[1] M. Armbrust, *Die fastdirekten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra, I*, Colloquium Mathematicum 14 (1966), p. 39-62.

[2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1948.

[3] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra, I,* New York 1951.
[4] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis,* New York 1958.
[5] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra, I,* New York 1958.

Reçu par la Rédaction le 21. 8. 1965