COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLVI 1982 FASC. 2

LE THÉORÈME DE LEFSCHETZ POUR LES ANR APPROXIMATIFS

PAR

GILLES GAUTHIER (CHICOUTIMI) ET ANDRZEJ GRANAS (MONTRÉAL)

Dans [4] Clapp introduit la notion de ANR approximatifs (AANR) et démontre que tout ANR approximatif de type fini est un espace de Lefschetz (i.e. si X est un ANR approximatif de type fini, alors toute fonction continue $f: X \to X$ telle que $\lambda(f) \neq 0$ admet un point fixe). Nous présentons dans cet article une caractérisation des AANR, une nouvelle preuve du théorème de point fixe de Clapp ainsi qu'une généralisation de ce théorème à des AANR non nécessairement de type fini. Les espaces topologiques considérés sont tous métrisables et on utilise l'homologie de Čech à support compact et coefficients dans Q. Un espace X est dit de *type fini* si $H(X) = \{H_n(X)\}$ est de type fini.

1. Caractérisation des ANR approximatifs.

1.1. Définition (Clapp [4]). Un espace métrisable compact X est un *ANR approximatif* si pour tout plongement $h: X \to Y$, où Y est un espace métrique, on a: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert U_ε de $h(X)$ dans Y et une fonction $r: U_\varepsilon \to h(X)$ tels que $\varrho\big(rj(y), y\big) < \varepsilon$ pour tout y dans $h(X)$, où $j: h(X) \to U_\varepsilon$ est l'inclusion canonique.

La définition suivante est souvent utilisée par la suite:

1.2. Définition. Soient Y un espace métrique et $\varepsilon > 0$. Deux fonctions f et g d'un espace X dans Y sont dites *ε-près* si $\varrho\big(f(x), g(x)\big) < \varepsilon$ pour tout x dans X.

1.3. THÉORÈME. *Soit X un espace métrisable compact et ϱ_X une métrique compatible. X est un ANR approximatif si et seulement si la condition suivante est satisfaite:*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $A_\varepsilon \in ANR$ ($=$ ANR (métrisable) compact [1]) *et des fonctions continues $\alpha: X \to A_\varepsilon$ et $\beta: A_\varepsilon \to X$ tels que $\beta\alpha$ et 1_X sont ε-près.*

Démonstration. Soit X un ANR approximatif. X étant un espace métrisable compact il existe un plongement h de X dans le cube de Hilbert I^{∞}. Soit $\tilde{h}$ la contraction de h à la paire $(X, h(X))$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x, y \in h(X)$ et $\varrho(x, y) < \delta(\varepsilon)$, alors $\varrho_X(\tilde{h}^{-1}(x), \tilde{h}^{-1}(y)) < \varepsilon$. Soit U_ε un voisinage ouvert de $h(X)$ dans I^{∞} et soit $r: U_\varepsilon \to h(X)$ tels que rj et $1_{h(X)}$ sont $\delta(\varepsilon)$-près, où $j: h(X) \to U_\varepsilon$ est l'inclusion canonique. Soit A_ε un ANR tel que $h(X) \subset A_\varepsilon \subset U_\varepsilon$. Un tel A_ε existe par [1], p. 105, lemma 4.3.

Soit $i: h(X) \to A_\varepsilon$ l'inclusion canonique et $r': A_\varepsilon \to h(X)$ la restriction de r à A_ε. On a que $r'i$ et $1_{h(X)}$ sont $\delta(\varepsilon)$-près.

Posant $\alpha = i\tilde{h}: X \to A_\varepsilon$ et $\beta = \tilde{h}^{-1}r': A_\varepsilon \to X$, on a que $\beta\alpha$ et 1_X sont ε-près. Ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème.

X étant un espace métrisable compact, on peut sans perte de généralité supposer que X est un sous-espace du cube de Hilbert. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ANR A_ε et des fonctions continues $\alpha: X \to A_\varepsilon$ et $\beta: A_\varepsilon \to X$ tels que $\beta\alpha$ et 1_X sont ε-près. Puisque A_ε est un ANR la fonction $\alpha: X \to A_\varepsilon$ admet une extension continue $\tilde{\alpha}$ à un voisinage ouvert U_ε de X dans I^{∞} ([1], p. 103, (2.19)). Posant $r = \beta\tilde{\alpha}$, on a que ri et 1_X sont ε-près, où $i: X \to U_\varepsilon$ est l'inclusion canonique. On a donc ([4], p. 118, theorem 2.1) que X est un ANR approximatif.

2. Le théorème de M. H. Clapp. Nous utilisons dans cette section le théorème suivant, dont on peut trouver une démonstration dans [5].

2.1. THÉORÈME. *Soit Z un espace métrique compact de type fini. Il existe $\varepsilon = \varepsilon(Z) > 0$ tel que pour tout espace compact X et pour toutes fonctions continues $f, g: X \to Z$, si f et g sont ε-près, alors*

$$f_* = g_*: H(X) \to H(Z).$$

Si X est un espace de type fini et $f: X \to X$ est une fonction continue, le nombre de Lefschetz de f est défini par

$$\lambda(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tr}(f_{*n}),$$

où $f_{*n}: H_n(X) \to H_n(X)$ est l'homomorphisme induit par f et tr *est la trace ordinaire.*

2.2. THÉORÈME. *Soit X un ANR approximatif de type fini et soit $f: X \to X$ une fonction continue telle que $\lambda(f) \neq 0$. Alors f admet un point fixe.*

Démonstration. Soit ϱ une métrique compatible pour X et soit $\varepsilon' > 0$ tel que $f_* = g_*$ dès que f et g sont ε'-près (théorème 2.1), où f et g sont d'un domaine compact commun et à valeurs dans X. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Soit $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x, y \in X$ et $\varrho(x, y) < \delta(\varepsilon)$. Alors

$\varrho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Par le théorème 1.3 il existe un ANR A_ε et des fonctions continues α: $X \to A_\varepsilon$ et β': $A_\varepsilon \to X$ tels que $\beta'\alpha$ et 1_X sont $\delta(\varepsilon)$-près.

Soit $\beta = f\beta'$. Puisque $\varepsilon < \varepsilon'$ on a que $(\beta\alpha)_* = f_*$ et $\lambda(f) = \lambda(\beta\alpha)$. Considérons $\alpha\beta$: $A_\varepsilon \to A_\varepsilon$. On a $\lambda(\alpha\beta) = \lambda(\beta\alpha) \neq 0$. Comme A_ε est un ANR, on a que $\alpha\beta$ admet un point fixe et il s'ensuit que $\beta\alpha$ admet aussi un point fixe. Pour tout $\varepsilon < \varepsilon'$, f admet un ε-point fixe (i.e. un x dans X tel que $\varrho(x, f(x)) < \varepsilon$). L'espace X étant compact il en résulte que f admet un point fixe.

2.3. Définition. Soient X et Y des espaces métrisables compacts et soit ϱ une métrique compatible pour Y. Une fonction f: $X \to Y$ est dite *presque-factorisable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ANR A_ε et des fonctions continues α: $X \to A_\varepsilon$ et β: $A_\varepsilon \to X$ tels que $\beta\alpha$ et f sont ε-près par rapport à ϱ.

La propriété d'une fonction f d'être presque-factorisable ne dépend pas de la métrique compatible utilisée. On a la reformulation suivante du théorème 1.3:

2.4. *Soit X un espace métrisable compact. X est un ANR approximatif si et seulement si 1_X: $X \to X$ est presque-factorisable.*

2.5. *Soient X et Y des espaces métrisables compacts. Si 1_X: $X \to X$ est presque-factorisable, alors toutes les fonctions continues f: $Y \to X$ et g: $X \to Y$ sont presque-factorisables.*

Une démonstration en tout point semblable à celle du théorème 2.2 nous donne:

2.6. THÉORÈME. *Soit X un espace métrisable compact de type fini et soit f: $X \to X$ une fonction presque-factorisable. Si $\lambda(f) \neq 0$, alors f admet un point fixe.*

Dans [2] Borsuk introduit la notion de „NE-map". On peut montrer que les fonctions presque-factorisables sont des „NE-maps". Le théorème précédent est donc un cas particulier du théorème de point fixe de Borsuk concernant les „NE-maps" [3].

Soit Y^X l'espace métrique des fonctions continues de X dans Y avec la métrique ϱ définie par

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in X} \varrho(f(x), g(x)),$$

où X et Y sont des espaces métrisables compacts.

2.7. Définition (Borsuk [2]). Soient X et Y des espaces métrisables compacts. Une fonction continue f: $X \to Y$ est *factorisable* si il existe un ANR A et des fonctions continues α: $X \to A$ et β: $A \to Y$ tels que $\beta\alpha = f$.

La situation des applications presque-factorisables parmis les „NE-maps" est la suivante:

2.8. La fermeture dans Y^X de l'ensemble des fonctions factorisables est l'ensemble des fonctions presque-factorisables. Il existe toutefois des „NE-maps" qui ne sont pas presque-factorisables [8].

3. ANR approximatifs non nécessairement de type fini. Nous présentons maintenant une généralisation du théorème 2.2 au cas où le ANR approximatif n'est pas nécessairement de type fini. Nous utilisons les notions de trace de Leray et de nombre de Lefschetz généralisé [7].

Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme d'espace vectoriel. Considérons

$$N(f) = \bigcup_{n>0} \operatorname{Ker} f^n \quad \text{et} \quad \tilde{E} = E|N(f).$$

Puisque $f(N(f)) \subset N(f)$, on a que f induit un endomorphisme $\tilde{f}\colon \tilde{E} \to \tilde{E}$. La fonction f est dit *admissible* si $\tilde{E}$ est de dimension finie. Si f est admissible, la trace généralisée $\operatorname{Tr}(f)$ de f est définie par $\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{tr}(\tilde{f})$.

Soit $f = \{f_n\}_{n\in N}\colon E \to E$ un endomorphisme de degré zéro d'un espace vectoriel gradué $E = \{E_n\}_{n\in N}$. On dit que f est un *endomorphisme de Leray* si tous les f_n sont admissibles et tous les $\tilde{E}_n$ sauf un nombre fini sont triviaux. Si $f\colon E \to E$ est un endomorphisme de Leray, on définit le nombre de Lefschetz généralisé de f par

$$\Lambda(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{Tr}(f_n).$$

Une fonction continue f d'un espace X dans lui-même est dite une *fonction de Lefschetz* si $f_*\colon H(X) \to H(X)$ est un endomorphisme de Leray. Le nombre de Lefschetz généralisé de f est alors défini par $\Lambda(f) = \Lambda(f_*)$.

Nous utilisons les résultats suivants:

3.1. THÉORÈME (voir [6]). *Soient X et Y des espaces topologiques, $u\colon X \to Y$ et $v\colon Y \to X$ des fonctions continues. Alors*:

(a) *si uv ou vu est une fonction de Lefschetz, alors les deux le sont et $\Lambda(uv) = \Lambda(vu)$;*

(b) *uv admet un point fixe si et seulement si vu admet un point fixe.*

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 2.2 au cas où le ANR approximatif n'est pas nécessairement de type fini.

3.2. THÉORÈME. *Soit X un ANR approximatif et soit $f\colon X \to X$ une fonction continue. S'il existe une partie compacte de type fini Y de X telle que $f(X) \subset Y$, alors f est une fonction de Lefschetz et $\Lambda(f) \neq 0$ entraîne qu'il existe un point fixe pour f.*

Démonstration. Soit ϱ une métrique compatible pour X. Puisque Y est un espace métrique compact de type fini, soit $\varepsilon' = \varepsilon'(Y) > 0$ tel que pour tout espace compact W et pour toutes fonctions continues $g, h: W \to Y$, si g et h sont ε'-près, alors $g_* = h_*$ (théorème 2.1). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ et soit $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $x, y \in X$ et $\varrho(x, y) < \delta(\varepsilon)$, alors $\varrho\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$.

X étant un ANR approximatif, il existe un $A_\varepsilon \in$ ANR et des fonctions continues $\alpha: X \to A_\varepsilon$ et $\beta: A_\varepsilon \to X$ tels que $\beta\alpha$ et 1_X sont $\delta(\varepsilon)$-près. Soient f' la contraction de f à la paire (X, Y), f_Y la contraction de f à la paire (Y, Y) et i l'inclusion canonique de Y dans X. Considérons

$$f_\varepsilon = f'\beta\alpha i: \; Y \to Y,$$

$$\varphi = \alpha i: \; Y \to A_\varepsilon \quad \text{et} \quad \psi = f'\beta: \; A_\varepsilon \to Y.$$

Puisque A_ε est un ANR, par le théorème de Lefschetz classique on a que $\varphi\psi$ admet un point fixe si $\Lambda(\varphi\psi) \neq 0$.

Montrons que $\Lambda(\varphi\psi) \neq 0$. Utilisant le théorème 3.1 on a que $\Lambda(\varphi\psi) = \Lambda(\psi\varphi) = \Lambda(f_\varepsilon)$. Les fonctions f_ε et f_Y étant ε-près on en déduit que $(f_\varepsilon)_* = (f_Y)_*$. L'espace Y étant de type fini, f_Y est une fonction de Lefschetz. Utilisant de nouveau le théorème 3.1 on a que f est une fonction de Lefschetz et que $\Lambda(f) = \Lambda(if') = \Lambda(f'i) = \Lambda(f_Y)$. On obtient $\Lambda(\varphi\psi) = \Lambda(f_\varepsilon) = \Lambda(f_Y) = \Lambda(f) \neq 0$.

Il s'ensuit que $f_\varepsilon = \psi\varphi$ admet aussi un point fixe. La fonction f_Y admet donc un ε-point fixe.

Puisque f_Y admet un ε-point fixe pour tout $\varepsilon < \varepsilon'$ elle admet un point fixe, lequel est aussi un point fixe pour f.

TRAVAUX CITÉS

[1] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne 44, Warszawa 1967.

[2] — *On nearly extendable maps*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 23 (1975), p. 753-760.

[3] — *On the Lefschetz-Hopf fixed point theorem for nearly extendable maps*, ibidem 23 (1975), p. 1273-1279.

[4] M. H. Clapp, *On a generalization of absolute neighborhood retracts*, Fundamenta Mathematicae 70 (1971), p. 117-130.

[5] J. Dugundji, *On Borsuk's extension of the Lefschetz-Hopf theorem*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 25 (1977), p. 805-811.

[6] A. Granas, *Points fixes pour les applications compactes en topologie et analyse fonctionnelle*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal 1973.

[7] J. Leray, *Théorie des points fixes, indice total et nombre de Lefschetz*, Bulletin de la Société Mathématique de France 87 (1959), p. 221-233.

[8] A. Suszycki, *A remark on nearly extendable maps*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 25 (1977), p. 1257-1259.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
CHICOUTIMI, P.Q.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
MONTRÉAL, P.Q.

Reçu par la Rédaction le 10. 8. 1979