

## SUR LES FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

PAR

Z. GRANDE (GDAŃSK)

Le théorème suivant a été démontré par Lipiński dans sa communication [3]:

*Pour que la fonction réelle d'une variable réelle (pas nécessairement finie) soit approximativement continue, il faut et il suffit que toutes les fonctions  $f_a^b(x) = \max\{a, \min[b, f(x)]\}$  soient des dérivées.*

Ce théorème sera généralisé, dans la communication présente, aux dérivées des fonctions d'ensemble.

Soit  $(X, M, \mu)$  un espace où  $\mu$  est une mesure  $\sigma$ -finie et complète. On appelle *base de différentiation* dans l'espace  $(X, M, \mu)$  tout couple  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  où  $\mathcal{F}$  est une famille préordonnée d'ensembles de mesure  $\mu$  positive finie et  $\Rightarrow$  désigne une relation de convergence des suites (de Moore-Smith) d'ensembles de la famille  $\mathcal{F}$  vers les points  $x \in X$ , définie de manière que deux conditions suivantes soient satisfaites:

- (1) Il existe pour tout point  $x \in X$  une suite (de Moore-Smith) d'ensembles  $\{I_i\} \subset \mathcal{F}$  telle que  $I_i \Rightarrow x$ .
- (2) Toute sous-suite infinie d'une suite  $\{I_i\}$  convergente vers un point  $x \in X$  converge également vers ce point.

Une fonction réelle  $f$  (finie ou infinie) qui est intégrable relativement à la mesure  $\mu$  sur tout ensemble de la famille  $\mathcal{F}$  est dite *fonction dérivée relative* à la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  [2] lorsqu'on a l'égalité

$$(3) \quad \lim_i \frac{1}{\mu(I_i)} \int_{I_i} f(y) d\mu = f(x)$$

pour tout point  $x \in X$  et toutes les suites  $\{I_i\} \Rightarrow x$ .

Étant donné un ensemble  $\mu$ -mesurable  $A \subset X$  et le point  $x$  étant fixé, les bornes supérieure et inférieure respectivement de l'ensemble des nombres

$$\left\{ \limsup_t \frac{\mu(A \cap I_t)}{\mu(I_t)} \right\}$$

et de celui des nombres

$$\left\{ \liminf_t \frac{\mu(A \cap I_t)}{\mu(I_t)} \right\}$$

pour toutes les suites de la forme  $\{I_t\}$  où  $I_t \ni x$ , s'appellent *épaisseurs*, *supérieure* ou *inférieure* respectivement, *de l'ensemble  $A$  au point  $x$*  relativement à la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Si ces deux épaisseurs, supérieure et inférieure, sont égales, leur valeur commune s'appelle *l'épaisseur* (tout court) de cet ensemble en ce point, relativement à la même base de différentiation. Dans le cas où l'épaisseur en question est égale à 1, le point  $x$  est dit *point d'épaisseur* de l'ensemble  $A$  relativement à la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  et, dans le cas opposé où l'épaisseur en ce point est nulle, il est dit *point d'éclaircie* de l'ensemble  $A$  relativement à la même base de différentiation.

Exemples (voir [4], p. 106-130). Soit  $X$  l'espace euclidien à  $m$  dimensions  $R^m$ . Étant donné un ensemble  $E \subset R^m$ , soit  $r(E)$  la borne supérieure des quotients  $\mu(E)/\mu(I)$  où  $I$  est un cube quelconque contenant  $E$ . Appelons une suite d'ensembles  $\{E_n\}_{n=1,2,\dots}$  de  $R^m$  *suite régulière* lorsqu'il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que  $r(E_n) > \alpha$  pour  $n = 1, 2, \dots$

Si  $\mathcal{F}$  est la famille de tous les ensembles fermés de mesure  $\mu$  positive finie, préordonnée par leurs diamètres, définissons la convergence  $\Rightarrow$  par la condition

$$(1a) \quad E_n \Rightarrow x \text{ lorsque la suite } \{E_n\}_{n=1,2,\dots} \text{ est régulière, } x \in E_n \in \mathcal{F} \\ \text{pour } n = 1, 2, \dots \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(E_n) = 0 \text{ (} \delta \text{ désignant le diamètre).}$$

La base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  s'appelle alors *générale*.

Si, en particulier, la famille  $\mathcal{F}$  ne se compose que de tous les intervalles fermés et la convergence  $\Rightarrow$  est définie par la condition (1a), la base de différentiation s'appelle *ordinaire*.

Deux espaces  $(X_1, S_1, \mu_1)$  et  $(X_2, S_2, \mu_2)$  avec des mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$   $\sigma$ -finies et complètes étant donnés, soit

$$(X_3, S_3, \mu_3) = (X_1 \times X_2, S_1 \times S_2, \mu_1 \times \mu_2)$$

leur produit cartésien (dit leur *espace-produit*). L'ensemble  $A = A_1 \times A_2$  où  $0 < \mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) < \infty$  s'appellera un *carré* dans  $X_3$ ; il s'y appellera un *intervalle* lorsque  $0 < \mu_1(A_1) < \infty$  et  $0 < \mu_2(A_2) < \infty$ .

La fonction  $r(E)$  pour  $E \subset X_3$  et les suites régulières d'ensembles étant définies comme dans l'exemple précédent, soient  $\mathcal{F}$  la famille de tous

les ensembles de mesure  $\mu_3$  positive finie, préordonnée par leurs mesures, et  $\Rightarrow$  la convergence définie par la condition

$$(1b) \quad E_n \Rightarrow x \text{ lorsque la suite } \{E_n\}_{n=1,2,\dots} \text{ est régulière, } x \in E_n \in \mathcal{F} \text{ pour } n = 1, 2, \dots \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_3(E_n) = 0.$$

Alors  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  s'appelle la base de différentiation *générale* dans l'espace  $(X_3, \mathcal{S}_3, \mu_3)$ . Dans le cas où la famille  $\mathcal{F}$  ne se compose que de tous les intervalles de  $X_3$  (la définition de la convergence restant la même), la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  est dite *ordinaire*.

Pour généraliser à son tour le théorème de Lipiński, cité au début, appelons une fonction  $f$  définie dans l'espace  $(X, M, \mu)$ , réelle et  $\mu$ -mesurable (pas nécessairement finie) *approximativement continue* au point  $x_0$  relativement à la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  lorsque, quel que soit le nombre  $\alpha$ , le point  $x_0$  est, relativement à cette base, un point d'épaisseur de celui des ensembles  $\{x: f(x) > \alpha\}$  et  $\{x: f(x) < \alpha\}$  qui contient ce point.

**THÉOREME 1.** *Pour qu'une fonction  $f$  définie dans l'espace  $(X, M, \mu)$  et réelle (finie ou non) soit approximativement continue dans cet espace, il faut et il suffit que toutes les fonctions  $f_a^b(x) = \max\{a, \min[b, f(x)]\}$  soient des dérivées relatives à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ .*

**Démonstration.** La condition est nécessaire. En effet, le minimum et le maximum de deux fonctions approximativement continues relativement à une base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  le sont également, et toute fonction approximativement continue relativement à une base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  et bornée est une dérivée relative à cette base (voir [1], p. 37 et 26).

La condition est suffisante. Supposons, en effet, que la fonction  $f$  ne soit pas approximativement continue relativement à la base de différentiation  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Deux cas sont à considérer.

Cas I. Il existe un point  $x_0$  de discontinuité approximative de la fonction  $f$  relativement à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  tel que  $|f(x_0)| < \infty$ .

Il existe donc un point  $x_0$  et un nombre  $\varepsilon > 0$  tels que l'ensemble

$$(4) \quad \{x: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} = \{x: f(x) > f(x_0) - \varepsilon\} \cap \{x: f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$$

est au point  $x_0$  d'épaisseur inférieure plus petite que 1 relativement à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Par conséquent, l'un au moins des deux sommandes du membre droit de (4) est au point  $x_0$  d'épaisseur inférieure plus petite que 1 relativement à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Par raison de symétrie, on peut se borner à l'admettre pour le sommande  $\{x: f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$ .

Ainsi, il existe une suite (de Moore-Smith)  $\{I_t\}$  tels que  $I_t \in \mathcal{F}$ ,  $I \Rightarrow x_0$  et

$$(5) \quad \liminf_t \frac{\mu(\{x: f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} \cap I_t)}{\mu(I_t)} < 1.$$

Posons  $a = f(x_0) - 1$  et  $b_1 = f(x_0) + \varepsilon$ .

Si la fonction  $f_a^{b_1}(x)$  n'est pas une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ , la démonstration est finie.

Si, par contre, la fonction  $f_a^{b_1}(x)$  est une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ , on a

$$\lim_t \frac{1}{\mu(I_t)} \int_{I_t} f_a^{b_1}(x) d\mu = f_a^{b_1}(x_0).$$

Alors, en posant  $b = \frac{1}{2}[f(x_0) + b_1]$ , d'où  $b = f(x_0) + \varepsilon/2$ , nous allons voir que la fonction  $f_a^b(x)$  n'est pas une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ .

En effet, si elle l'était, on aurait

$$\lim_t \frac{1}{\mu(I_t)} \int_{I_t} f_a^b(x) d\mu = f_a^b(x_0) = f_a^{b_1}(x_0)$$

et la fonction  $f(x) = f_a^{b_1}(x) - f_a^b(x)$ , en tant que la différence de deux dérivées relatives à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ , serait aussi une dérivée relativement à cette base. On aurait donc d'une part

$$(6) \quad \lim_t \frac{1}{\mu(I_t)} \int_{I_t} f(x) d\mu = f(x_0) = 0.$$

D'autre part, la fonction  $f$  admet des valeurs non-négatives et prend la valeur positive  $b_1 - b = \varepsilon/2$  dans l'ensemble

$$E = \{x: f(x) \geq f(x_0) + \varepsilon\},$$

qui est le complémentaire de l'ensemble  $\{x: f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$  dont l'épaisseur inférieure au point  $x_0$  relativement à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  est plus petite que 1 en vertu de (5). En désignant donc par  $\eta$  la limite inférieure dans (5), on aurait

$$\limsup_t \frac{\mu(E \cap I_t)}{\mu(I_t)} = 1 - \eta > 0,$$

ce qui entraîne d'après (6) la contradiction:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_t \frac{\int_{I_t} f(x) d\mu}{\mu(I_t)} \geq \limsup_t \frac{\int_{E \cap I_t} f(x) d\mu}{\mu(I_t)} = \limsup_t \frac{\varepsilon \cdot \mu(E \cap I_t)}{2\mu(I_t)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}(1 - \eta) > 0. \end{aligned}$$

Cas II. On a  $|f(x_0)| = \infty$  en tout point  $x_0$  de discontinuité approximative relativement à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ .

La discontinuité approximative de la fonction  $f(x)$  relativement à la base  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  entraîne par définition l'existence d'un nombre  $a$  tel que l'un au moins de deux ensembles

$$\{x: f(x) < a\} \quad \text{et} \quad \{x: f(x) > a\}$$

contient un point dans lequel cet ensemble n'est pas d'épaisseur 1 relativement à cette base.

Considérons la fonction  $f_{a-1}^{\alpha+1}(x)$ . Si elle n'est pas une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ , la démonstration est achevée. Reste donc à examiner le cas où la fonction  $f_{a-1}^{\alpha+1}(x)$  est une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Or elle n'est pas approximativement continue relativement à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$  car l'un au moins des ensembles

$$\{x: f_{a-1}^{\alpha+1}(x) > a\} = \{x: f(x) > a\} \quad \text{et} \quad \{x: f_{a-1}^{\alpha+1}(x) < a\} = \{x: f(x) < a\}$$

ne satisfait pas à la condition de la définition de la continuité approximative relativement à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ .

Mais étant partout finie, la fonction  $f_{a-1}^{\alpha+1}(x)$  a les mêmes propriétés que la fonction  $f$  envisagée dans le cas I. Il existe donc deux nombres  $u$  et  $v > u$  tels que la fonction

$${}_v[f_{a-1}^{\alpha+1}(x)] = \max\{u, \min[v, f_{a-1}^{\alpha+1}(x)]\}$$

n'est pas une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . Il en résulte, en posant

$$a = \max(a-1, u) \quad \text{et} \quad b = \min(a+1, v),$$

que la fonction  ${}_b[f_{a-1}^{\alpha+1}(x)]$ , égale à  ${}_u[f_{a-1}^{\alpha+1}(x)]$ , ne l'est non plus. On a en même temps  $a-1 \leq a < b \leq a+1$ , donc  ${}_b[f_{a-1}^{\alpha+1}(x)] = f_a^b(x)$ , d'où l'on conclut que la fonction  $f_a^b(x)$  n'est pas une dérivée relative à  $(\mathcal{F}, \Rightarrow)$ . La condition du théorème est donc suffisante également dans le cas II, ce qui termine la démonstration du théorème 1.

#### TRAVAUX CITÉS

- [1] A. M. Bruckner, *Differentiation of integrals*, American Mathematical Monthly 78 (9) (1971), p. 1-51.
- [2] — and M. Rosenfeld, *On topologizing measure spaces via differentiation bases*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 23 (1969), p. 243-258.
- [3] J. S. Lipiński, *Sur les fonctions approximativement continues*, Colloquium Mathematicum 5 (1958), p. 172-175.
- [4] S. Saks, *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne 3, New York 1937.

Reçu par la Rédaction le 25. 7. 1972