COLLOQUIUM MATHEMATICUM

LI DÉDIÉ À M. STANISŁAW HARTMAN 1987

DENSITÉ HARMONIQUE ET ESPACES DE BANACH INVARIANTS PAR TRANSLATION NE CONTENANT PAS c_0

PAR

MYRIAM DÉCHAMPS (ORSAY)

Soient $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ un ensemble d'éléments de Z^n,

$$E_k = \{\pm\gamma_{j_1} \pm\gamma_{j_2} \pm \ldots \pm\gamma_{j_k}, j_1 > j_2 > \ldots > j_k \geqslant 1\},$$
$$E_k^+ = \{\gamma_{j_1} + \gamma_{j_2} + \ldots + \gamma_{j_k}, j_1 > j_2 > \ldots > j_k \geqslant 1\}$$

et $C_{E_k^+}(T^n)$ l'espace des fonctions continues sur T^n à spectre dans E_k^+, $k \geqslant 1$ entier. Nous montrons que si $C_{E_k^+}(T^n)$ ne contient pas c_0 pour $k \geqslant 1$ alors l'ensemble E a une densité harmonique nulle (théorème 1). Lorsque E est dissocié, nous montrons que E_2 a une densité harmonique nulle (théorème 2). Ces résultats avaient été annoncés dans [4].

1. Introduction. Soit G un groupe abélien compact, Γ son dual et $E \subset \Gamma$. On dit que E a *densité harmonique nulle* si pour toute partie compacte K de G d'intérieur non vide il existe C_K tel que pour tout polynôme trigonométrique $P = \sum_{\gamma\in E} a_\gamma \gamma$ on ait

$$\sup_{x\in G} |P(x)| \leqslant C_K \sup_{x\in K} |P(x)|.$$

Si le groupe G est connexe et E est un ensemble de Sidon alors la densité harmonique de E est nulle [3]. On rappelle que E est un *ensemble de Sidon* s'il existe C tel que pour tout polynôme trigonométrique $P = \sum_{\gamma\in E} a_\gamma \gamma$,

$$\sum |a_\gamma| \leqslant C \sup_{x\in G} |P(x)|.$$

Notons $C_E(G)$ l'espace des fonctions continues sur G et à spectre dans E, c'est-à-dire, l'adhérence pour la norme uniforme du sous-espace de $C(G)$ engendré par $\{\gamma, \gamma \in E\}$. Alors E est un ensemble de Sidon si et seulement si

$C_E(G)$ est isomorphe à l^1 [10]. Dans [3], les démonstrations ne sont pas uniquement liées à cet aspect de la définition, elles utilisent la structure arithmétique des ensembles de Sidon, et ne semblent pas pouvoir s'adapter à d'autres classes d'ensembles lacunaires.

Dans [7], F. Piquard présente une autre approche pour obtenir des ensembles de densité harmonique nulle lorsque $G = T$ est le cercle unité: si pour tout $k \geqslant 1$ l'espace $C_{kE}(T)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0 alors E a densité harmonique nulle ([7], Théorème 4, $kE = E + \ldots + E$ k fois).

Ce résultat reste peu maniable: d'une part la plupart des exemples d'ensembles $E \subset \boldsymbol{Z}$ tels que $C_E(T)$ ne contienne pas c_0 sont des ensembles de densité harmonique nulle ([7] et [2]); d'autre part, même si $E \subset \boldsymbol{Z}$ est un ensemble de Sidon très lacunaire, kE peut devenir "assez vite" égal à $\boldsymbol{Z}$. Par exemple, posons pour $k \geqslant 0$:

$$\lambda_{4k} = 4^{4k} - k, \quad \lambda_{4k+1} = -4^{4k+1}, \quad \lambda_{4k+2} = 4^{4k+2} + k, \quad \lambda_{4k+3} = -4^{4k+3}.$$

Alors $|\lambda_{j+1}|/|\lambda_j| > 3$ pour $j \geqslant 0$ donc $E = (\lambda_j)_{j \geqslant 0}$ est un ensemble de Sidon dissocié et $5E = \boldsymbol{Z}$.

Pour tout $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\} \subset \Gamma$ et tout entier $k \geqslant 1$ notons

$$E_k = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \pm \ldots \pm \gamma_{j_k}, j_1 > j_2 > \ldots > j_k \geqslant 1\}, \tag{1}$$

$$E_k^+ = \{\gamma_{j_1} + \gamma_{j_2} + \ldots + \gamma_{j_k}, j_1 > j_2 > \ldots > j_k \geqslant 1\}. \tag{2}$$

Le lemme 3.1 permet de remplacer kE par E_k^+ dans l'énoncé du théorème 4 de [7] rappelé ci-dessus (Proposition 5.1). La généralisation de la Proposition 5.1 à d'autres groupes que le tore va rencontrer un obstacle de dimension: pour étudier le cas des groupes $G = T^n$, $n > 1$, nous avons dû établir des lemmes topologiques (§ 4) qui ne sont pas valables en dimension infinie. Ceci explique pourquoi notre premier théorème n'a pas pu être énoncé dans le cadre d'un groupe abélien compact et connexe quelconque.

THÉORÈME 1. *Soit $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ un ensemble d'éléments de $\boldsymbol{Z}^n$. Pour tout entier $k \geqslant 1$ notons*

$$E_k^+ = \{\gamma_{j_1} + \gamma_{j_2} + \ldots + \gamma_{j_k}, j_1 > j_2 > \ldots > j_k \geqslant 1\}.$$

Si pour tout entier $k \geqslant 1$, $C_{E_k^+}(T^n)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0 alors la densité harmonique de E est nulle.

Il reste alors à déterminer à quels ensembles E le théorème 1 peut s'appliquer. Revenons au cas d'un groupe G abélien compact et connexe, de dual Γ. Si la partie E de Γ est dissociée (définition 2.3), $C_{E_k}(G)$, et a fortiori $C_{E_k^+}(G)$, est isomorphe à un sous-espace fermé du produit tensoriel injectif $l^1 \hat{\hat{\otimes}} \ldots \hat{\hat{\otimes}} l^1$ (k fois) et ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0, pour $k \geqslant 1$ ([8] et § 7). Le théorème 1 permet donc de retrouver que si $E \subset \boldsymbol{Z}^n$ est dissocié, sa densité harmonique est nulle. Bien que le résultat soit bien connu, cette approche utilise de façon indirecte la structure arithmétique de E et pourrait s'adapter à d'autres classes d'ensembles.

La première classe qu'il est naturel de considérer est la classe $\mathscr{E}_k$ des ensembles définis par (1), lorsque $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ est dissocié ($k \geqslant 1$ fixé). En effet, ces classes constituent pratiquement les seuls exemples maniables des différents types d'ensembles lacunaires définis par des conditions fonctionnelles: ensembles $\Lambda(p)$ ([6], Ch. 5), ensembles p-Sidon ([6], 10.6) et ensembles stationnaires ([11], déf. 6.2).

L'application du théorème 1 aux ensembles E_k de $\mathscr{E}_k$ va se heurter à un obstacle, même dans le cas du tore, lié à la nature même des ensembles E_k: si p est un entier positif, l'ensemble $(E_k)_p$ n'est pas, en général, contenu dans l'ensemble E_{kp}. Par exemple, si $k = p = 2$, $(\gamma_2+\gamma_1)+(\gamma_3+\gamma_1) = \gamma_3+\gamma_2 + 2\gamma_1 \in (E_2)_2$ mais $\gamma_3+\gamma_2+2\gamma_1$ n'appartient pas nécessairement à E_4. Or, nous ignorons si pour tout $p \geqslant 1$, $C_{(E_k)_p}(T^n)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0, lorsque E est dissocié.

Signalons que lorsque $\Gamma = \boldsymbol{Z}$ et que E a des propriétés arithmétiques supplémentaires, par exemple si $E = \{\theta^j, j \geqslant 1\}$ où θ est un entier $\geqslant 3$, une approche différente montre que l'ensemble $E' = \bigcup_{k \geqslant 1} E_k^+$ a une densité harmonique nulle [9].

Dans le cas d'une partie dissociée quelconque E de $\boldsymbol{Z}^n$ nous avons pu contourner le dernier obstacle, lorsque $k = 2$.

THÉORÈME 2. *Soit* $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ *un ensemble dissocié de* $\boldsymbol{Z}^n$. *Alors* $E_2 = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 > j_2 \geqslant 1\}$ *a une densité harmonique nulle.*

La démonstration du théorème 2 se ramène à celle du théorème 1 grâce au lemme 6.3. La partie fondamentale du § 6 est le lemme 6.2, qui fournit une "bonne" mesure d'interpolation à support compact. En général les suites dissociées permettent la construction de mesures explicites, mais nous avons eu besoin de la méthode d'interpolation de S. Drury [5] pour établir le lemme 6.2.

Ayant analysé le § 6, revenons aux paragraphes précédents. Les notations et définitions utilisées sont groupées au § 2. Au § 3 se trouvent les lemmes sur les compacts associés qui permettent de manier cette notion, le résultat nouveau étant le lemme 3.4. Au § 4 nous établissons des lemmes topologiques qui permettent d'arriver au résultat 4.4, essentiel dans la démonstration du théorème 1, qui se trouve au § 5.

2. Notations et définitions. Nous désignons par c_0 l'espace de Banach des suites $(c_n)_{n \geqslant 1}$ de nombres complexes telles que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Nous disons que *l'espace de Banach B contient c_0* si B a un sous-espace fermé isomorphe à c_0.

Si I est un ensemble compact, $C(I)$ désigne l'espace de Banach des fonctions continues à valeurs complexes définies sur I muni de la norme uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$. Si K est une partie compacte de I on note, pour $f \in C(K)$,

$$\|f\|_{\infty,K} = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

(ainsi $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,I}$).

Nous nous intéresserons surtout au cas où I est un groupe abélien. Dans toute la suite, G désigne un groupe abélien compact, Γ son dual et E une partie de Γ. Nos notations dans ce cadre sont celles de [12] et [3], nous préciserons celles qui concernent directement non énoncés.

Notons $M(G)$ l'espace des mesures sur G à valeurs complexes régulières et bornées. Désignons par m la mesure de Haar de G, normalisée par $m(G) = 1$. Pour $\mu \in M(G)$ notons $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ, définie sur Γ par

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, d\mu(x).$$

On pose $B(\Gamma) = \mathscr{F}M(G) = \{\hat{\mu},\ \mu \in M(G)\}$.

Pour $\mu \in M(G)$, on appelle spectre de μ l'ensemble

$$\operatorname{sp}(\mu) = \{\gamma \in \Gamma,\ \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\}.$$

Si $\operatorname{sp}(\mu)$ est fini, on appelle μ un polynôme trigonométrique (nous identifions une fonction continue f sur G et la mesure sur G, $df(x) = f(x)\,dm(x)$, qu'elle définit).

Notons $\mathscr{P}$ l'espace des polynômes définis sur G. Pour $B \subset M(G)$ et $E \subset \Gamma$ notons

$$B_E = \{f \in B,\ \operatorname{sp}(f) \subset E\}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}_E$ est l'ensemble des sommes finies $\sum_{\gamma\in E} a_\gamma \gamma$, où $a_\gamma \in \mathbf{C}$ pour $\gamma \in E$ et $a_\gamma = 0$ sauf pour un nombre fini de γ dans E.

Pour tout compact K de G et toute partie E de Γ notons $C_E(K)$ l'adhérence, pour la norme uniforme sur K, de l'espace $\mathscr{P}_E$.

Définition 2.1. Le compact K de G est *associé* à l'ensemble E de Γ s'il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique $P \in \mathscr{P}_E$

$$\|P\|_\infty \leqslant C\,\|P\|_{\infty,K}. \tag{1}$$

On dira alors que K est *associé à E avec constante C*.

Autrement dit, le compact K de G est associé à E si l'application canonique de restriction de $C_E(G)$ dans $C_E(K)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Remarque 2.1. Notons que la notion de compact associé est invariante par translation dans G et dans Γ: si K est associé à E, pour tout x_0 dans G et tout γ_0 dans Γ, $x_0+K = \{x_0+x,\ x\in K\}$ est associé à γ_0+E.

Remarque 2.2. S'il existe $C > 0$ tel que la condition (1) soit satisfaite par les polynômes $P\in\mathscr{P}_E$ à coefficients réels, on vérifie facilement que le compact $K\cup(-K)$ est associé à E, avec constante $2C$. Si en plus K est symétrique ($K = -K = \{-x,\ x\in K\}$) alors K est associé à E.

Remarque 2.3. On vérifie facilement que K est associé à E si et seulement si K est associé à toute partie dénombrable E' de E. Or, le sous-groupe Γ' de Γ engendré par une partie E' dénombrable est dénombrable, et son dual G', qui est un groupe quotient de G, est métrisable ([12], p. 38). Il est donc possible de se ramener au cas des groupes G métrisables pour l'étude des compacts associés.

La dernière remarque justifie qu'on se limite au cas dénombrable dans les définitions qui suivent.

Définition 2.2. Soit $E = \{\gamma_j, j\geqslant 1\}$ une partie de Γ. Pour tout $k\geqslant 1$, notons

$$\begin{aligned} E_k &= \{\pm\gamma_{j_1}\pm\gamma_{j_2}\pm\ldots\pm\gamma_{j_k},\ j_1>j_2>\ldots>j_k\geqslant 1\}\\ &= \Big\{\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon_j\gamma_j,\ (\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}\in\{-1,0,1\}^N,\ \sum_{j\geqslant 1}|\varepsilon_j| = k\Big\},\\ E_k^+ &= \{\gamma_{j_1}+\gamma_{j_2}+\ldots+\gamma_{j_k},\ j_1>j_2>\ldots>j_k\geqslant 1\}. \end{aligned}$$

L'ensemble kE est défini par récurrence par:

$$1\cdot E = E,\qquad kE = (k-1)E+E.$$

Remarque 2.4. En général, $E_k \subsetneqq kE$ et $E_{kp}\subsetneqq(E_k)_p$, $p\geqslant 1$ entier.

Définition 2.3. Soit $E = \{\gamma_j, j\geqslant 1\}$ une partie de Γ. Pour tout entier $s\geqslant 1$ et tout γ dans Γ on note $R_s^2(E,\gamma)$ le nombre d'écritures distinctes de γ de la forme

$$\gamma = \varepsilon_1\gamma_{j_1}+\varepsilon_2\gamma_{j_2}+\ldots+\varepsilon_s\gamma_{j_s},\quad j_1>j_2>\ldots>j_s, \tag{2}$$
$$\varepsilon_i\in\{-2,-1,1,2\},\quad 1\leqslant i\leqslant s,\quad \varepsilon_i = \pm 1 \text{ si } \gamma_{j_i} \text{ est d'ordre } 2,\ 1\leqslant i\leqslant s.$$

On dit que E est *dissociée* si $R_s^2(E,0) = 0$ pour $s\geqslant 1$.

Remarque 2.5. Une partie E dissociée est aussi appelée 2-*indépendante*. L'avantage de considérer des parties $E = \{\gamma_j, j\geqslant 1\}$ dissociées vient de ce que dans ce cas le produit de Riesz R construit sur E interpole exactement une suite donnée $b = (b_j)_{j \geqslant 1}$, $\|b\|_\infty = \sup_{j \geqslant 1} |b_j| \leqslant 1$, sur E, c'est-à-dire $\hat{R}(\gamma_j) = b_j$ pour $j \geqslant 1$ ([6], Ch. 2).

Remarque 2.6. On peut montrer que si $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ est dissociée, alors il existe $B > 0$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$R_s^2(E, \gamma) \leqslant B^s, \quad s \geqslant 1. \tag{3}$$

La démonstration est semblable à celle de D. Rider ([6], 2.16).

Remarque 2.7. Soit $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ une partie dissociée de Γ. Si on fixe $s_0 \geqslant 1$ et $\gamma_0 \in \Gamma$, d'après (3) γ_0 ne peut s'écrire sous la forme (2), avec $s \leqslant s_0$, qu'un nombre fini de fois; il existe donc $j_0 = j_0(s_0, \gamma_0)$ tel que si $j \geqslant j_0$, γ_j n'apparaît dans aucune expression de la forme (2) si $s \leqslant s_0$.

3. Lemmes sur les compacts associés. Nous regroupons ici pour la commodité du lecteur quelques énoncés dont les démonstrations sont rédigées ailleurs, sauf celle du lemme 3.4, que nous explicitons. Les résultats sont de plusieurs sortes, le premier concerne des sous-espaces invariants par translation $C_E(G)$.

LEMME 3.1, [3]. *Soit G un groupe abélien compact, métrisable et connexe. Si le compact K de G est associé au sous-ensemble E du dual Γ de G, pour tout voisinage de l'origine W dans G et pour tout γ_0 dans Γ, $K + W$ est associé à $E \cup \{\gamma_0\}$.*

Autrement dit, si K est associé à Λ, quitte à "élargir" un peu K on peut ajouter à Λ un nombre fini de points.

Le lemme suivant est un des outils fondamentaux pour montrer qu'un espace de fonctions continues contient c_0.

LEMME 3.2, [1]. *Soit I un ensemble compact métrisable et $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions continues sur I à valeurs réelles ou complexes telle que $\inf_{n \geqslant 1} \|f_n\|_{\infty, I} > 0$ et*

$$\sum_{n \geqslant 1} |f_n(x)| \leqslant C < \infty \quad (x \in I).$$

Alors $C(I)$ contient c_0.

Rappelons maintenant l'existence de compacts associés dans un cadre non invariant.

LEMME 3.3, [7]. *Soient I un ensemble compact métrisable et X un sous-espace fermé de $C(I)$ ne contenant pas c_0. Alors pour tout point d'accumulation x_0 de I il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que les normes $\|f\|_{\infty, I}$ et $\|f\|_{\infty, I \setminus V}$, soient équivalentes sur X.*

La démonstration découle facilement du lemme 3.2.

Revenons au cas invariant. Soit K un compact du groupe G, associé à un ensemble E du dual de G. Pour la démonstration du théorème 1 nous aurons besoin de déterminer sous quelles conditions il est possible d'enlever à K un voisinage d'un sous-groupe H de G.

LEMME 3.4. *Soient G un groupe abélien compact et métrisable, Γ son dual et $E \subset \Gamma$. Soient H un sous-groupe fermé de G, $H \neq G$, et K un voisinage compact et symétrique de H, saturé par H. On suppose que K est associé à E et que $C_E(K)$ ne contient pas c_0. Alors pour tout voisinage compact de l'origine V_0, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de H tel que $(K+V_0) \cap \complement\mathcal{O}$ soit associé à E ($\complement\mathcal{O}$ = complément de $\mathcal{O}$).*

Démonstration. On peut supposer V_0 symétrique et $V_0 = V_0 + H \subset K$. Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite de voisinages ouverts et symétriques de H, saturés par H, tels que $\bar{V}_{n+1} \subsetneq V_n$ pour $n \geq 0$ et $\bigcap_{n \geq 0} V_n = H$. Posons $W_n = V_n \setminus \bar{V}_{n+1}$ pour $n \geq 1$; alors les W_n sont des ouverts non vides deux à deux disjoints et $W_n \subset K$ pour $n \geq 1$; si $x_n \in W_n$, $W_n - x_n = \mathcal{O}_n$ est un voisinage ouvert de H et $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{O}_n = H$.

Supposons qu'il n'existe pas de voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de H tel que $(K+V_0) \cap \complement\mathcal{O}$ soit associé à E. Alors en particulier $(K+V_0) \cap \complement\mathcal{O}_n$ n'est pas associé à E, pour $n \geq 1$. Il existe alors une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de polynômes trigonométriques à spectre dans E telle que pour $n \geq 1$:

$$\|P_n\|_{\infty, K+V_0} = 1 \quad \text{et} \quad \|P_n\|_{\infty, (K+V_0) \setminus \mathcal{O}_n} < \frac{1}{2^n}.$$

On pose $Q_n(x) = P_n(x+x_n)$; puisque $K + V_0 + x_n \subset K$ on a, pour $n \geq 1$,

$$\|Q_n\|_{\infty, K} = 1 \quad \text{et} \quad \|Q_n\|_{\infty, K \setminus W_n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in K$, $\sum_{n \geq 1} |Q_n(x)| \leq 2$.

D'après le lemme 3.2, $C_E(K)$ contient alors c_0, contre l'hypothèse, ce qui conclut la preuve.

4. Lemmes topologiques.

LEMME 4.1. *Soit G un groupe abélien compact et connexe. Soit U une partie ouverte symétrique et connexe de G, $\emptyset \neq U \neq G$. On note ∂U la frontière de U et*

$$U - \partial U = \{x - y,\ x \in U,\ y \in \partial U\}.$$

Soit $H = \{g \in G,\ U + g = U\}$ le sous-groupe fermé de G qui laisse U invariant. Alors

$$U - \partial U = (U + U) \setminus H.$$

Démonstration. Montrons que $U - \partial U \subset U + U \setminus H$. Soient $x \in U$ et $\mathcal{O}$ un voisinage de x tel que $x + \mathcal{O} \subset U$. Alors si $y \in \partial U$ et $y' \in (y + \mathcal{O}) \cap U$,

$x' = x+(y'-y) \in x+\mathcal{O}$, donc $x-y = x'-y' \in U+U$. Il est clair que $x-y \notin H$, car $x-(x-y) = y \notin U$.

Montrons que $(U+U)\backslash H \subset U-\partial U$. Soit $z = x-y$, $x \in U$, $y \in U$ et $z \notin H$. D'une part $U \cap (U+z) \neq \emptyset$ car $x \in U \cap (U+z)$. D'autre part, on a $U \cap \mathbf{C}(U+z) \neq \emptyset$ car $z \notin H$. Puisque U est connexe, $U \cap \partial(U+z) \neq \emptyset$; soit $x' \in U \cap \partial(U+z)$, alors $x' = y'+z$, où $y' \in \partial U$, donc $z = x'-y' \in U-\partial U$, ce qui conclut la preuve.

La famille $(U-y)_{y \in \partial U}$ constitue donc un recouvrement ouvert de $(U+U)\backslash H$. Par la suite, étant donné un compact $K \subset U+U$ nous voudrions obtenir un sous-recouvrement fini de $K\backslash(K \cap H)$ (lemme 4.4). Ce dernier ensemble n'étant pas compact, nous n'avons pu le faire que dans le cas fini-dimensionnel, en utilisant des arguments élémentaires de géométrie euclidienne qui sont détaillés dans les deux lemmes qui suivent.

LEMME 4.2. *Soient $z_1, \ldots, z_n$ n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^n$. Soit $B_0 = \{0\}$ et B_i (resp. B_{-i}) la boule euclidienne de centre z_i (resp. $-z_i$) et de rayon $\|z_i\|$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\bigcup_{-n \leqslant i \leqslant n} B_i$ est un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbf{R}^n$, choisissons i_0 tel que
$$|\langle z, z_{i_0}\rangle| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\langle z, z_i\rangle|$$
($\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel). Soit ε_0 le signe de $\langle z, z_{i_0}\rangle$. Alors, si $z = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i z_i$,
$$\begin{aligned}\|z-\varepsilon_0 z_{i_0}\|^2 &= \sum \alpha_i \langle z, z_i\rangle + \|z_{i_0}\|^2 - 2|\langle z, z_{i_0}\rangle| \\ &\leqslant \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i| - 2\Big)|\langle z, z_{i_0}\rangle| + \|z_{i_0}\|^2 < \|z_{i_0}\|^2\end{aligned}$$
si $\sum |\alpha_i| < 2$, ce qui montre que le voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}^n$ défini par $\{z = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i z_i, \sum |\alpha_i| < 2\}$ est contenu dans $\bigcup_{-n \leqslant i \leqslant n} B_i$.

LEMME 4.3. *On considère la distance euclidienne d usuelle sur $\mathbf{R}^n$, $d(x, y) = \|x-y\|$. Soit U un ouvert symétrique de $\mathbf{R}^n$, $\emptyset \neq U \neq \mathbf{R}^n$, tel que $\{g \in \mathbf{R}^n, U+g = U\} = (2\pi\mathbf{Z})^n$. On pose*
$$A = \{x-y,\ x \in U,\ y \in \partial U,\ d(x, y) = d(x, \partial U)\}.$$
Alors A n'est contenu dans aucun demi-espace fermé de $\mathbf{R}^n$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbf{R}^n$, $\|z_0\| = 1$ tel que $A \subset \{z \in \mathbf{R}^n;\ \langle z, z_0\rangle \geqslant 0\}$. Puisque A est symétrique on a $A \subset \{z \in \mathbf{R}^n;\ \langle z, z_0\rangle = 0\}$. Puisque $z_0 \notin (2\pi\mathbf{Z})^n$, il existe $x_0 \in U$ tel que $x_0+z_0 \notin U$; comme U est ouvert, $x_0+\lambda z_0 \in U$ pour λ assez petit, soit $\lambda_0 = \sup\{\lambda;\ x_0+\lambda z_0 \in U\}$, alors $\lambda_0 \leqslant 1$. Considérons la fonction f définie sur $[0, \lambda_0]$ par
$$f(\lambda) = d^2(x_0+\lambda z_0, \partial U).$$

Pour $\lambda \in [0, \lambda_0]$ soit $y_\lambda \in \partial U$ tel que $d^2(x_0+\lambda z_0, y_\lambda) = d^2(x_0+\lambda z_0, \partial U)$. Alors si $\lambda \in [0, \lambda_0]$ et $\lambda+h \in [0, \lambda_0]$,

$$\begin{aligned} f(\lambda+h) &= d^2(x_0+(\lambda+h)z_0, y_{\lambda+h}) \leqslant d^2(x_0+(\lambda+h)z_0, y_\lambda) \\ &= \|x_0+(\lambda+h)z_0-(x_0+\lambda z_0)+(x_0+\lambda z_0)-y_\lambda\|^2 = h^2\|z_0\|^2+f(\lambda) \end{aligned}$$

car $(x_0+\lambda z_0)-y_\lambda \in A$, donc est orthogonal à z_0. Analoguement, $f(\lambda) \leqslant h^2\|z_0\|^2+f(\lambda+h)$, d'où $|f(\lambda+h)-f(\lambda)| \leqslant h^2\|z_0\|^2$. Alors la fonction f est dérivable et $f'(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in [0, \lambda_0]$, donc $f(\lambda) = f(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda \in [0, \lambda_0]$, ce qui est absurde.

LEMME 4.4. *Soit U un ouvert symétrique connexe de T^n, $\emptyset \neq U \neq T^n$. Soit H le sous-groupe fermé de T^n qui laisse U invariant. Soit $K \subset U+U$ compact. Alors il existe un nombre fini p de points $y_1, \ldots, y_p$ dans ∂U tels que $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant p} (U-y_i)$ soit un recouvrement de $K \setminus (K \cap H)$.*

Démonstration. Le groupe quotient T^n/H est isomorphe à $T^{n'}$, $1 \leqslant n' \leqslant n$, donc U s'envoie dans un ouvert U' de $\boldsymbol{R}^{n'}$ symétrique, $\emptyset \neq U' \neq \boldsymbol{R}^{n'}$ tel que $\{g \in \boldsymbol{R}^n,\ U'+g = U'\} = (2\pi \boldsymbol{Z})^n$. D'après le lemme 4.3 on peut choisir n' vecteurs linéairement indépendants $z_1, \ldots, z_{n'}$ de $\boldsymbol{R}^{n'}$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant n'$,

$$z_i = x_i'-y_i', \quad x_i' \in U', \quad y_i' \in \partial U', \quad \|z_i\| = d(x_i', \partial U').$$

Prenons les notations du lemme 4.2, alors $B_i \subset U'-y_i'$ et $\{0\} \cup (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} U'-y_i') \cup (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} U'+y_i')$ est un voisinage de l'origine dans $\boldsymbol{R}^{n'}$. On en déduit qu'il existe $2n'$ points $y_1, \ldots, y_{2n'}$ dans ∂U tels que $H \cup (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant 2n'} U+y_i)$ contienne un voisinage ouvert W de H.

Considérons le compact $K \cap \mathbf{C}W$. D'après le lemme 4.1, $(U-y)_{y \in \partial U}$ est un recouvrement ouvert de $K \cap \mathbf{C}W$, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini, ce qui conclut la preuve.

Remarque 4.1. Les lemmes 4.2 et 4.3 impliquent que si U est un ouvert symétrique de $\boldsymbol{R}^n$, $\emptyset \neq U \neq \boldsymbol{R}^n$, tel que $\{g \in \boldsymbol{R}^{n'},\ U+g = U\} = \{0\}$, alors il existe un nombre fini de points $y_1, \ldots, y_k$ dans ∂U tels que $\{0\} \cup (\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} (U-y_i))$ soit un voisinage de l'origine dans $\boldsymbol{R}^n$. On peut voir que ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie. En effet, soient $\boldsymbol{R}^N = \{(x_n)_{n \geqslant 1},\ x_n \in \boldsymbol{R},\ n \geqslant 1\}$ et $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$. Pour $k \geqslant 2$ entier, notons U_k le double cône ouvert de sommets $\pm\left(1-\frac{1}{k}\right)e_1$ et base

$$B_k = \{(x_n)_{n \geqslant 1} \in \boldsymbol{R}^N;\ x_1 = 0 \text{ et } |x_i| < 1/k,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Posons $U = \bigcup_{k \geqslant 2} U_k$. Alors U est un ouvert symétrique, $\emptyset \neq U \neq \boldsymbol{R}^n$ et $\{g \in \boldsymbol{R}^n,\ U+g = U\} = \{0\}$. Pour tout point $y \in \partial U$, on vérifie que $\mathbf{C}U$ contient un sous-espace vectoriel affine de $\boldsymbol{R}^N$ passant par y et de codimension finie. Alors il n'est pas possible de trouver un nombre fini de points $y_1, \ldots, y_k$ dans ∂U tels que $\{0\} \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} (U - y_i)$ soit un voisinage de l'origine, car $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathbf{C}(U - y_i)$ contient encore un sous-espace vectoriel de codimension finie de $\boldsymbol{R}^N$.

Ce contre-exemple et les lemmes topologiques de ce paragraphe ont été trouvés en collaboration avec A. Douady.

5. Démonstration du théorème 1.

5.1. Le cas $n = 1$. Nous allons refaire dans le cas $n = 1$ la démonstration du théorème 4 de [7], d'une part pour montrer comment l'utilisation du lemme 3.1 permet de remplacer kE par E_k^+ (déf. 2.2), d'autre part pour donner les motivations du raisonnement employé dans le cas n-dimensionnel.

PROPOSITION 5.1. *Soit $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ une partie de $\boldsymbol{Z}$. On suppose que pour tout $k \geqslant 1$ l'espace $C_{E_k^+}(T)$ ne contient pas c_0. Alors la densité harmonique de E est nulle.*

Démonstration. *1ère étape.* Soit $0 < a \leqslant \pi$, montrons que si $[-a, a]$ est associé à E_2^+ alors $[0, a]$ est associé à $C_E(T)$.

Appliquons le lemme 3.3 successivement aux points $-a$, 0 et a. On trouve alors $0 < \varepsilon < a$ tel que $[-a+\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a-\varepsilon]$ soit associé à E_2. Posons

$$b = \inf\{l, [0, l] \text{ est associé à } E\}.$$

Supposons que $b > a$. Soit $\eta > 0$ tel que $\eta < \min(\varepsilon/2, b-a, b/3)$. Alors $[-\eta, b]$ est associé à E avec constante $C(\eta)$ et $[\eta/2, b]$ n'est pas associé à E, donc il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_j)_{j \geqslant 1}$ telle que:

1. $\mathrm{sp}(P_j) \subset E$, $\|P_j\|_\infty \leqslant C(\eta)$ pour $j \geqslant 1$ et $\lim_{j \to \infty} \|P_j\|_{\infty,\eta,b} = 0$.
2. Il existe $x_j \in [-\eta, \eta]$ tel que $|P_j(x_j)| = 1$ pour $j \geqslant 1$.
3. $\mathrm{sp}(P_j) \cap \mathrm{sp}(P_{j'}) = \emptyset$ pour $j \geqslant 1$, $j' \geqslant 1$, $j \neq j'$.

La condition 1 exprime que $[\eta, b]$ n'est pas associé à E, la condition 2 que $[-\eta, b]$ l'est. La condition 3 découle du lemme 3.1. En effet, supposons choisis $P_1, P_2, \ldots, P_k$ $(k \geqslant 1)$ satisfaisant aux conditions 2, 3 et à la condition 1' suivante:

1'. $\mathrm{sp}(P_j) \subset E$, $\|P_j\|_\infty \leqslant C(\eta)$ et $\|P_j\|_{\infty,[2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-j},b]} \leqslant \dfrac{1}{2^j}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Soit $S_k = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} \mathrm{sp}(P_j)$. Si $E \backslash S_k$ était associé à

$$\left[\eta\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right), b\right]$$

alors d'après le lemme 3.1, E serait associé à

$$\left[\eta\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right), b\right],$$

contre l'hypothèse. Il s'ensuit que l'on peut trouver P_{k+1} satisfaisant aux conditions 2, 3 et 1′ (pour $j = k+1$).

Posons $g_j(x) = P_j(x+x_j)$ pour $j \geqslant 1$. Alors $|g_j(0)| = 1$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \|g_j\|_{\infty,[2\eta, b-\eta]} = 0$.

Posons $h_j(x) = g_{2j}(x)\overline{g_{2j-1}(-x)}$ pour $j \geqslant 1$. Alors $|h_j(0)| = 1$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \|h_j\|_{\infty,I} = 0$ où $I = [-b+\eta, -2\eta] \cup [2\eta, b-\eta] \supset [-a+\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a-\varepsilon]$. Puisque $\mathrm{sp}(h_j) \subset E_2^+$ pour $j \geqslant 1$, ceci montre que I n'est pas associé à E_2^+, et a fortiori $[-a, a]$ n'est pas associé à E_2^+, contre l'hypothèse. On conclut que $b \leqslant a$.

2ème étape. La preuve de la proposition s'obtient par réitération de la 1ère étape, quitte à préciser l'ensemble $F_2 = \bigcup\limits_{j\geqslant 1} \mathrm{sp}(h_j)$. En effet, si on applique la 1ère étape à F_2 les polynômes h_j obtenus à la fin aurons leur spectre non seulement dans $(E_2^+)_2^+$ mais même dans E_4^+, grâce à la condition 3. Dès lors , il devient facile à vérifier que l'on peut réitérer la 1ère étape avec l'hypothèse faite sur E_k^+, pour $k \geqslant 1$. En effet, supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $[-2^n\pi, 2^n\pi]$ ne soit pas associé à E. D'après la 1ère étape, $[-2^{n-1}\pi, 2^{n-1}\pi]$ n'est pas associé à $F_4 \subset E_4^+$ et ainsi de suite, on aura que $[-\pi, \pi]$ ne sera pas associé à $F_{2^n} \subset E_{2^n}^+$, ce qui conclut la preuve.

Remarque 5.1. Le point fondamental pour l'obtention de 5.1 tient au fait que le compact connexe "optimum" I associé à E est un intervalle ($I = [0, b]$ dans 5.1); ensuite, pour toute suite $(P_j)_{j\geqslant 1}$ satisfaisant aux conditions 1 et 3, on a pu trouver x_j "proche" du point frontière 0 de $[0, b]$ où $P_j(x_j)$ "grand"; finalement, $(I-0) \cup (I-b) = [-b, b]$ soit, en translatant le compact connexe "optimum" par les points dans sa frontière nous avons trouvé l'intervalle double.

Dans le cas n-dimensionnel, nous aurons d'abord un problème de géométrie du compact "optimum" associé à E, ce qui nous amènera à introduire un ouvert U "optimum", pour lequel les étapes suivantes pourront être réalisées, grâce aux lemmes topologiques du § 4.

5.2. Démonstration du théorème 1. Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ des voisinages compacts, connexes et symétriques de l'origine dans T^n tels que

$$\mathscr{A}_2 \subset \mathring{\mathscr{A}}_1 \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathring{\mathscr{A}}' \subset \mathscr{A}' \subset \mathring{\mathscr{A}}.$$

Supposons que $\mathscr{A}$ ne soit pas associé à E. Nous allons montrer qu'il existe un entier p tel que $2\mathscr{A}_2$ ne soit pas associé à E_p.

$\mathscr{A}$ n'étant pas associé à E, il existe une suite $(P_j)_{j\geqslant 1}$ de polynômes trigonométriques telle que:

(i) $\mathrm{sp}(P_j) \subset E$, $\|P_j\|_\infty \leqslant 1$ pour $j \geqslant 1$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \|P_j\|_{\infty,\mathscr{A}_1} = 0$.

(ii) $\mathrm{sp}(P_j) \cap \mathrm{sp}(P_{j'}) = \emptyset$ pour $j \geqslant 1$, $j' \geqslant 1$, $j \neq j'$.

(iii) Il existe $x_0 \in T^n$ tel que $|P_j(x_0)| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $j \geqslant 1$.

(iv) P_j est à coefficients réels pour $j \geqslant 1$.

Voyons comment réaliser ces conditions. Puisque $\mathscr{A}' \subset \mathring{\mathscr{A}}$, il existe d'après le lemme 3.1 une suite $(Q_j)_{j \geqslant 1}$ de polynômes trigonométriques à spectres dans E et deux à deux disjoints tels que

$$\|Q_j\|_\infty = 1 \quad \text{pour } j \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{j \to \infty} \|Q_j\|_{\infty, \mathscr{A}'} = 0.$$

Soit alors pour $j \geqslant 1$, $x_j \in T^n$ tel que $|Q_j(x_j)| = 1$. Quitte à se restreindre à une sous-suite on peut supposer que $\lim_{j \to \infty} x_j = x_0$. Posons pour $j \geqslant 1$, $R_j(x) = Q_j(x + (x_j - x_0))$, alors $|R_j(x_0)| = 1$; quitte à se restreindre à $j \geqslant j_0$, on peut supposer que $\mathscr{A}_1 + (x_j - x_0) \subset \mathscr{A}'$, donc $\lim_{j \to \infty} \|R_j\|_{\infty, \mathscr{A}_1} = 0$. Posons alors pour $j \geqslant 1$, $S_j(x) = \dfrac{R_j(x) + \overline{R_j(x)}}{2}$ et $T_j(x) = \dfrac{R_j(x) - \overline{R_j(-x)}}{2i}$; S_j et T_j ont même spectre que R_j et sont à coefficients réels; $\|S_j\|_{\infty, \mathscr{A}_1} \leqslant \|R_j\|_{\infty, \mathscr{A}_1}$ et $\|T_j\|_{\infty, \mathscr{A}_1} \leqslant \|R_j\|_{\infty, \mathscr{A}_1}$ car $\mathscr{A}_1$ est symétrique; puisque $|S_j(x_0)|^2 + |T_j(x_0)|^2 \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\overline{R_j(-x_0)}| \geqslant \frac{1}{2}$, on a soit $|S_j(x_0)|^2 \geqslant \frac{1}{4}$, et dans ce cas on posera $P_j = S_j$, soit $|T_j(x_0)|^2 \geqslant \frac{1}{4}$ et alors on posera $P_j = T_j$. La suite $(P_j)_{j \geqslant 1}$ satisfera alors aux conditions (i) à (iv).

Soit U la réunion de tous les ensembles ouverts et connexes V de T^n contenant $\mathring{\mathscr{A}}_1$ et tels que pour tout x dans V,

$$\lim_{j \to \infty} P_j(x) = 0.$$

Dans le cas $n = 1$, U est un intervalle; pour $n > 1$ on ignore la forme de U, mais tout $y \in \partial U$ est limite d'une suite $(y'_k)_{k \geqslant 1}$ de points de $\complement U$ telle que $(P_j(y'_k))_{j \geqslant 1}$ ne converge pas vers zéro pour $k \geqslant 1$. Cette propriété va nous permettre d'adapter la démonstration uni-dimensionnelle à T^n, à l'aide du lemme 4.4. Remarquons que U est symétrique d'après la condition (iv) et que $U \neq T^n$ d'après la condition (iii).

Soit H le sous-groupe de T^n qui laisse U invariant, $H = \{g \in T^n, U + g = U\} \neq T^n$. Soit K un compact de T^n, saturé par H, et tel que

$$2\mathscr{A}_2 \subset \mathring{K} \subset K \subset U + U.$$

D'après le lemme 4.4 il existe un nombre fini p de points $y_1, \ldots, y_p$ dans ∂U tels que $(U - y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ soit un recouvrement de $K \setminus H$.

Soit $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de H tel que $K \cap \complement\mathcal{O} \neq \emptyset$. Alors il est possible de trouver $\alpha > 0$, des points $y'_1, \ldots, y'_p$ assez voisins des points $y_1, \ldots, y_p$ et p suites croissantes d'entiers $(j^i_k)_{k \geqslant 1}$ tels que:

(j) $(U - y'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ soit un recouvrement de $K \cap \complement\mathcal{O}$;

(jj) $|P_{j_k^i}(y_i')| \geqslant \alpha$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $k \geqslant 1$;

(jjj) $j_k^i \neq j_{k'}^{i'}$ si $(i, k) \neq (i', k')$ pour $1 \leqslant i,\ i' \leqslant p,\ k, k' \geqslant 1$.

Posons alors $G_k(x) = P_{j_k^1}(x+y_1') \dots P_{j_k^p}(x+y_p')$,

$$H_k(x) = (G_k(0))^{-1}\, G_k(x).$$

Alors $H_k(0) = 1$, $\|H_k\|_\infty \leqslant \alpha^{-p}$ pour $k \geqslant 1$ et pour $x \in K \cap \mathbf{C}\mathcal{O}$,

$$\lim_{k \to \infty} H_k(x) = 0.$$

Dans un espace de Banach, l'adhérence faible et l'adhérence pour la norme d'une partie convexe sont confondues. On en déduit qu'il existe une suite bornée $(R_j)_{j \geqslant 1}$ de polynômes trigonométriques à spectre dans un sous-ensemble propre E_p' de E_p, valant 1 à l'origine et tendant uniformément vers zéro sur $K \cap \mathbf{C}\mathcal{O}$. Alors le compact $K \cap \mathbf{C}\mathcal{O}$ n'est pas associé à E_p', et puisque $C_{E_p'}(T^n)$ ne contient pas c_0, d'après le lemme 3.4, $2\mathscr{A}_2$ n'est pas associé à E_p'.

Remarquons que lorsqu'on multiplie q polynômes trigonométriques à spectres disjoints dans E_p' on obtient un polynôme trigonométrique à spectre dans un sous-ensemble E_{pq}' de E_{pq}. Il est donc possible d'itérer la démonstration précédente en remplaçant $\mathscr{A}$ par $2\mathscr{A}_2$ et E par E_p' (le raisonnement a été détaillé dans 5.1). On peut en conclure qu'il existe un entier k tel que E_k ne soit pas associé à T^n, ce qui fournit une contradiction. Par conséquent la densité harmonique de E est nulle.

6. Lemmes sur les mesures d'interpolation à support compact et démonstration du théorème 2. Les lemmes 6.1 et 6.2 suivent de près la présentation de la méthode d'interpolation de S. Drury faite dans [3]. Le lemme 6.1 est l'analogue du lemme 2.1 de [3] et nous donnons sa démonstration pour la commodité du lecteur. Le lemme 6.2 est l'étape fondamentale pour l'obtention du théorème 2.

LEMME 6.1. *Soient G un groupe abélien compact, Γ son dual et $E = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ un ensemble fini dissocié de Γ. Supposons que le compact K de G est associé à E_2 avec constante C (définition 1.1). Soit $b \in B(\Gamma)$, $\|b\| \leqslant 1$. Pour tout $\omega = (\omega_j)_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \{-1, 1\}^m = \Omega$, il existe $\sigma_\omega \in M(G)$ telle que*

1. $\operatorname{supp}(\sigma_\omega) \subset K+K$ *et* $\|\sigma_\omega\| \leqslant 4C^2$;
2. $\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \omega_{j_1}\omega_{j_2} b(\gamma)$ *si* $\gamma = \pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in E_2$, $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant m$, $j_1 \neq j_2$;
3. $\sup_{\gamma \in \Gamma} \|g_\gamma\|_{A(\Omega)} \leqslant (4C)^2$, *où g_γ est la fonction définie sur Ω par $\omega \to \hat{\sigma}_\omega(\gamma)$.*

Démonstration. Pour tout $\omega \in \Omega$ le produit de Riesz

$$R_\omega(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (1 + \omega_j \operatorname{Re}(x, \gamma_j))$$

est tel que $\hat{R}_\omega(\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}) = \frac{1}{4}\omega_{j_1}\omega_{j_2}$ pour $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant m$, $j_1 \neq j_2$ et $\|R_\omega\| = 1$.

Si $b \in B(\Gamma)$ et $\|b\| \leqslant 1$, $b'_\omega = \big(4b(\gamma)\hat{R}_\omega(\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma} \in B(\Gamma)$ et $\|b'_\omega\| \leqslant 4$. Il existe alors μ_ω et μ'_ω dans $M(G)$, à support dans K, telles que $\|\mu_\omega\| \leqslant 4C$, $\|\mu'_\omega\| \leqslant 4C$ et pour tout $\gamma \in E_2$,

$$\hat{\mu}_\omega(\gamma) = 4\hat{R}_\omega(\gamma), \qquad \hat{\mu}'_\omega(\gamma) = 4b(\gamma)\hat{R}_\omega(\gamma).$$

Posons

$$\sigma_\omega = \int_\Omega \mu_{\omega'} * \mu'_{\omega\omega}\, d\omega'.$$

Alors $\operatorname{supp}(\sigma_\omega) \subset K+K$ et $\|\sigma_\omega\|^2 \leqslant (4C)^2$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, d\sigma_\omega(x) = \int_\Omega \Big(\int_G (-x, \gamma)\, d(\mu_{\omega'} * \mu_{\omega\omega'})(x)\Big) d\omega'$$
$$= \int_\Omega \hat{\mu}_{\omega'}(\gamma)\,\hat{\mu}_{\omega\omega'}(\gamma)\, d\omega'.$$

Si $\gamma = \pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in E_2$, on obtient $\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \omega_{j_1}\omega_{j_2} b(\gamma)$. Si $\gamma \in \Gamma$, la fonction g_γ: $\omega \to \hat{\sigma}_\omega(\gamma)$ est le produit de convolution sur Ω de la fonction $\omega \to \hat{\mu}_\omega(\gamma)$ avec elle-même, donc $g_\gamma \in A(\Omega)$ et $\|g_\gamma\|_{A(\Omega)} \leqslant \int_\Omega |\hat{\mu}_\omega(\gamma)|^2\, d\omega \leqslant (4C)^2$.

LEMME 6.2. *Soient $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ un ensemble dissocié de Z^n et r un entier positif. Posons $E^r = \{\gamma_j, j \geqslant r\}$. Supposons que le voisinage compact K de l'origine dans T^n soit associé à l'ensemble $(E^r)_2 = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 > j_2 \geqslant r\}$ avec constante C. Alors il existe $A = A(r, K, C) > 0$ avec la propriété suivante: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $q \geqslant r$ tel que si on note*

$$F_1 = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 > j_2 \geqslant r, j_1 \geqslant q\},$$
$$F_2 = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 \geqslant q, 1 \leqslant j_2 < r\}$$

alors pour tout $b \in B(\Gamma)$, $\|b\| \leqslant 1$, il existe $\mu \in M(T^n)$ telle que:
1. $\operatorname{supp}(\mu) \subset 3K$, $\|\mu\| \leqslant \varepsilon^{-2} A$;
2. $\sum_{\gamma\in F_1} |\hat{\mu}(\gamma) - b(\gamma)| \leqslant \varepsilon$;
3. $\sup_{\gamma\in F_2} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. *1ère étape.* Déterminons d'abord l'entier q. L'ensemble F_2 est un ensemble de Sidon, car réunion des $2(r-1)$ ensembles de Sidon $\{\gamma_j \pm \gamma_{j_2}, j \geqslant q\}$, $1 \leqslant j_2 \leqslant r-1$. Alors l'ensemble

$$S = \{0\} \cup \{\pm\gamma_j, 1 \leqslant j \leqslant r-1\} \cup \{\pm 2\gamma_j, j \geqslant r\} \cup F_2$$

est un ensemble de Sidon. Soit W un voisinage compact de l'origine tel que $W + W \subset K$, W est associé à S [3] et il existe $\nu' \in M(T^n)$, à support dans W telle que

$$\hat{\nu}'(0) = 1, \qquad \hat{\nu}'(\gamma) = 0, \qquad \gamma \in S,\ \gamma \neq 0.$$

Soit Δ une fonction "triangle" à support dans W, c'est-à-dire, Δ est continue, $\Delta \geqslant 0$, $\hat{\Delta} \geqslant 0$, $\hat{\Delta}(0) = 1$ et $\sum_{\gamma \in Z^n} \hat{\Delta}(\gamma) < \infty$. Alors $\nu = \nu' * \Delta$ est une fonction continue à support dans K et

(i) $\|\nu\|_1 \leqslant \|\nu'\| = C'$, $\hat{\nu}(0) = 1$, $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ pour $\gamma \in S \setminus \{0\}$, $\sum_{\gamma \in Z^n} |\hat{\nu}(\gamma)| < \infty$ (on remarquera que C' dépend de r et de W).

Soit $0 < \varepsilon < 1$ donné, il existe une partie finie F de Z^n telle que

(ii) $$\sum_{\gamma \in Z^n/F} |\hat{\nu}(\gamma)| < \frac{\varepsilon^3}{4(64C^2 C')^2}.$$

La remarque 2.7 s'applique à la partie dissociée E. Prenons alors $s_0 = 4$ et faisons γ_0 parcourir la partie finie F. On en déduit:

(iii) Il existe $q \geqslant r$ tel que si $\gamma \in F$ s'écrit sous la forme

$$\varepsilon_1 \gamma_{j_1} + \varepsilon_2 \gamma_{j_2} + \varepsilon_3 \gamma_{j_3} + \varepsilon_4 \gamma_{j_4}, \quad j_1 > j_2 > j_3 > j_4, \ \varepsilon_i \in \{0, \pm 1, \pm 2\}, \quad \prod_{1 \leqslant i \leqslant} \varepsilon_i \neq 0$$

alors $j_1 < q$.

2ème étape. Passons à la construction de la mesure μ. Quitte à effectuer ensuite un passage à la limite, on peut se limiter à des ensembles finis, c'est-à-dire, considérer $\{\gamma_j, 1 \leqslant j \leqslant m\}$. Soit $b \in B(\Gamma)$, $\|b\| \leqslant 1$.

Appliquons le lemme 6.1 à l'ensemble $\{\gamma_p, \ldots, \gamma_m\}$ et soit pour tout $\omega = (\omega_j)_{r \leqslant j \leqslant m} \in \{-1, 1\}^m$ σ_ω la mesure correspondante. Soit $0 < \beta < 1$, considérons le produit de Riesz

$$R_\omega(x) = \prod_{r \leqslant j \leqslant m} (1 + \omega_j \beta \operatorname{Re}(x, \gamma_j)).$$

Posons

$$\mu' = \int_\Omega (\sigma_\omega * R_\omega \nu)\, d\omega.$$

Alors $\mu' \in M(T^n)$, $\operatorname{supp}(\mu) \subset 3K$ et

$$\|\mu'\| \leqslant \int_\Omega \|\sigma_\omega * R_\omega \nu\|\, d\omega \leqslant (4C)^2 \int_\Omega \Big(\int_{T^n} |R_\omega(x) \nu(x)|\, dx\Big) d\omega$$
$$= (4C)^2 \int_G |\nu(x)| \Big(\int_\Omega R_\omega(x)\, d\omega\Big) dx = 4C^2 \|\nu\| \leqslant 4C^2 C'.$$

Soit $\gamma = \pm \gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in F_1$, alors

$$\hat{\mu}'(\gamma) = \int_\Omega \hat{\sigma}_\omega(\gamma) (R_\omega \nu)\hat{}(\gamma)\, d\omega = b(\gamma) \int_{T^n} (-x, \gamma) \Big(\int_\Omega \omega_{j_1} \omega_{j_2} R_\omega(x)\, d\omega\Big) \nu(x)\, dx$$
$$= b(\gamma) (\tfrac{1}{2}\beta)^2 \int_{T^n} (-x, \gamma) [(x, \gamma_{j_1}) + (-x, \gamma_{j_1})] [(x, \gamma_{j_2}) + (-x, \gamma_{j_2})] \nu(x)\, dx$$
$$= b(\gamma) (\tfrac{1}{2}\beta)^2 (\hat{\nu}(0) + \hat{\nu}(2\gamma) + \hat{\nu}(\pm 2\gamma_{j_1}) + \hat{\nu}(\pm 2\gamma_{j_2}))$$
$$= b(\gamma) (\tfrac{1}{2}\beta)^2 (1 + \hat{\nu}(2\gamma))$$

grâce à la condition (i). Or, si $\gamma \in F_1$ alors $2\gamma \notin F$ grâce à (iii), donc

$$\sum_{\gamma \in F_1} \left|\frac{4}{\beta^2}\hat{\mu}'(\gamma) - b(\gamma)\right| = \frac{4}{\beta^2}\sum_{\gamma \in F_1} |\hat{\nu}(2\gamma)| \leqslant 4\beta^{-2} \sum_{\gamma \in Z^n/F} |\hat{\nu}(\gamma)|.$$

Soit maintenant $\gamma = \pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in F_2$. La condition 3 du lemme 6.1 permet d'écrire

$$\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \sum_{\chi \in \hat{\Omega}} a(\gamma, \chi)(\omega, \chi), \qquad \sum_{\chi \in \hat{\Omega}} |a(\gamma, \chi)| \leqslant (4C)^2.$$

Alors

$$|\hat{\mu}'(\gamma)| = \left|\int_\Omega \hat{\sigma}_\omega(\gamma)(R_\omega \nu)\hat{}(\gamma)\, d\omega\right| \leqslant (4C)^2 \sum_{\chi \in \hat{\Omega}} |b_\chi|$$

où

$$b_\chi = \int_\Omega (\omega, \chi)(R_\omega \nu)\hat{}(\gamma)\, d\omega = \int_{T^n} (-x, \gamma)\Big(\int_\Omega (\omega, \chi) R_\omega(x)\, d\omega\Big)\nu(x)\, dx.$$

Si $\chi = 1$, $b_\chi = \hat{\nu}(\gamma) = 0$ par la condition (i). En général, $(\omega, \chi) = \prod_{p \leqslant j \leqslant m} \omega_j^{\varepsilon_j'}$. Notons η_χ le nombre d'indices j tels que $\varepsilon_j = 1$. Si $\eta_\chi \geqslant 3$, alors $|b_\chi| \leqslant \beta^3 \|\nu\|$. Si $\eta_\chi = 2$, $(\omega, \chi) = \omega_{j_1'} \omega_{j_2'}$ où $j_1' > j_2' \geqslant p$, et

$$\begin{aligned} b_\chi &= (\tfrac{1}{2}\beta)^2 \int_{T^n} (-x, \gamma)[(x, \gamma_{j_1'}) + (-x, \gamma_{j_1'})][(x, \gamma_{j_2'}) + (-x, \gamma_{j_2'})]\nu(x)\, dx \\ &= (\tfrac{1}{2}\beta)^2 [\hat{\nu}(\gamma - \gamma_{j_1'} - \gamma_{j_2'}) + \hat{\nu}(\gamma - \gamma_{j_1'} + \gamma_{j_2'}) + \hat{\nu}(\gamma + \gamma_{j_1'} - \gamma_{j_2'}) + \hat{\nu}(\gamma + \gamma_{j_1'} + \gamma_{j_2'})]. \end{aligned}$$

Si j_1' et j_2' sont distincts de j_1, $\gamma' = \gamma - (\pm\gamma_{j_1'} \pm \gamma_{j_2'})$ est une combinaison linéaire à coefficients ± 1 de 4 éléments distincts de E, où au moins une lettre a indice $j \geqslant q$, donc $\gamma' \notin F$ d'après la condition (iii).

Si $j_1' = j_1$ ou $j_2' = j_1$, soit $\gamma' = \gamma - (\pm\gamma_{j_1'} \pm \gamma_{j_2'}) \in F_2$ et $\hat{\nu}(\gamma') = 0$ par la condition (i); soit γ' est une combinaison linéaire à coefficient linéaire ± 1 et ± 2 de 3 éléments distincts de E, où au moins une lettre a indice $j_1 \geqslant q$, donc $\gamma' \notin F$ par la condition (iii).

On en déduit que $|b_\chi| \leqslant \beta^2 \sup_{\gamma' \notin F} |\hat{\nu}(\gamma')|$. Si $\eta_\chi = 1$, $(\omega, \chi) = \omega_{j_1'}$ et $b_\chi = \dfrac{\beta}{2}[\hat{\nu}(\gamma - \gamma_{j_1'}) + \hat{\nu}(\gamma + \gamma_{j_1'})]$. Si $j_1' \neq j_1$, $\gamma \pm \gamma_{j_1'} \notin F$; si $j_1' = j_1$, soit $\gamma \pm \gamma_{j_1'} \notin F$, soit $\gamma \pm \gamma_{j_1'} = \pm\gamma_{j_2}$ et $\hat{\nu}(\pm\gamma_{j_2}) = 0$ d'après la condition (i). On a donc $|b_\chi| \leqslant \beta \sup_{\gamma' \notin F} |\nu(\gamma')|$.

En considérant les différents cas on a

$$|b_\chi| \leqslant \max\{\beta \sup_{\gamma' \notin F} |\hat{\nu}(\gamma')|, \beta^3 \|\nu\|\}.$$

Si on pose $\mu = 4\beta^{-2}\mu'$, on a $\sup_{\gamma \in F_2} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant 64C^2 \max(\beta^{-1} \sup_{\gamma \notin F} |\hat{\nu}(\gamma)|, \beta C')$. Choisissons $\beta = \varepsilon(64C^2 C')^{-1}$, la condition (ii) montre que $\sup_{\gamma \in F_2} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ et $\sum_{\gamma \in F_1} |\hat{\mu}(\gamma) - b(\gamma)| \leqslant \varepsilon$. D'autre part $\|\mu\| \leqslant 16C^2 C' \beta^{-2} = \varepsilon^2 A$, ce qui conclut la preuve.

Le lemme suivant est une conséquence facile de 6.2.

LEMME 6.3. *Soient $E = \{\gamma_j, j \geqslant 1\}$ une partie dissociée de Z^n et r un entier positif. Si K est un voisinage compact de l'origine dans T^n associé à $(E^r)_2 = \{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 > j_2 \geqslant r\}$ alors $4K$ est associé à E_2.*

Démonstration. L'ensemble $\{\pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2}, j_1 > j_2, 1 \leqslant j_2 \leqslant r-1\}$ est un ensemble de Sidon de constante C_r, donc K lui est associé avec constante $B = B(r, K)$ [3]. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon(1+B)(1+5C_r) < 1$. Soit q l'entier donné par le lemme 6.2, reprenons les notations de ce lemme. Soit $P \in \mathscr{P}_{F_1 \cup F_2}$; soit $x_0 \in T^n$ tel que $|P(x_0)| = \|P\|_\infty$. Soit $\mu_1 \in M(T^n)$, à support dans K, telle que $\|\mu_1\| \leqslant B$ et pour tout $\gamma \in F_2$, $\hat{\mu}_1(\gamma) = (x_0, \gamma)$. Posons $b(\gamma) = (x_0, \gamma) - \hat{\mu}_1(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$. Alors $b = (b(\gamma))_{\gamma \in \Gamma} \in B(\Gamma)$ et $\|b\| \leqslant 1 + B$. D'après le lemme 6.2, il existe $\mu_2 \in M(T^n)$ à support dans $3K$ et telle que:

$$\|\mu_2\| \leqslant \varepsilon^{-2} A(1+B), \quad \sum_{\gamma \in F_1} |\hat{\mu}_2(\gamma) - b(\gamma)| \leqslant \varepsilon(1+B), \quad \sup_{\gamma \in F_2} |\hat{\mu}_2(\gamma)| \leqslant \varepsilon(1+B).$$

Posons $\mu = \mu_1 + \mu_2$, alors

$$\begin{aligned} \|P\|_{\infty,3K} \|\mu\| \geqslant |\mu(P)| &= \Big|P(x_0) + \sum_{\gamma \in F_2} \hat{\mu}_2(\gamma)\hat{P}(\gamma) + \sum_{\gamma \in F_1} (\hat{\mu}_2(\gamma) - b(\gamma))\hat{P}(\gamma)\Big| \\ &\geqslant |P(x)| - \varepsilon(1+B) \sum_{\chi \in F_2} |\hat{P}(\gamma)| - \varepsilon(1+B)\|P\|_\infty. \end{aligned}$$

Posons $R(x) = 4 \prod_{j \geqslant r} (1 + \mathrm{Re}(x, \gamma_j))$. Alors

$$\sum_{\gamma \in F_2} |\hat{P}(\gamma)| \leqslant C_r \Big\| \sum_{\gamma \in F_2} \hat{P}(\gamma)\gamma \Big\|_\infty = C_r \|P - R * P\|_\infty \leqslant 5C_r \|P\|_\infty$$

d'où

$$\|P\|_{\infty,3K} \geqslant (1 - \varepsilon(1+B)(1+5C_r))\varepsilon^2 (A(1+B))^{-1} \|P\|_\infty$$

ce qui montre que $3K$ est associé à $F_1 \cup F_2$. Comme $E_2 \backslash (F_1 \cup F_2)$ est fini, on conclut que $4K$ est associé à E_2 (lemme 3.1).

6.4. Démonstration du théorème 2. Soit $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ des voisinages compacts, connexes et symétriques de l'origine dans T^n tels que

$$4\mathscr{A}_1 \subset \mathring{\mathscr{A}} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2 \subset \mathring{\mathscr{A}}_1.$$

Si on suppose que $\mathscr{A}$ n'est pas associé à E_2 il existe une suite $(P_j)_{j \geqslant 1}$ de polynômes trigonométriques satisfaisant aux conditions (ii), (iii) et (iv) de la démonstration du théorème 1, et à la condition:

(i′) $\operatorname{sp}(P_j) \subset E_2$, $\|P_j\|_\infty \leqslant 1$ pour $j \leqslant 1$, $\lim_{j\to\infty} \|P_j\|_{\infty,\mathscr{A}_1} = 0$, et

$$\max\{j_1,\ \pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in \operatorname{sp} P_j, j_1 > j_2\} < \min\{j_2,\ \pm\gamma_{j_1} \pm \gamma_{j_2} \in \operatorname{sp} P_{j+1}, j_1 > j_2\}$$

pour $j \geqslant 1$.

La condition (i′) peut être réalisée grâce au lemme 6.3. Dès lors la démonstration rejoint la démonstration du théorème 1: on démontre que $2\mathscr{A}_2$ n'est pas associé à un sous-ensemble E'_p de E_p, et que l'on peut réitérer le résultat, ce qui permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Mathematica 17 (1958), p. 165–174.

[2] R. Blei, *On subsets with associated compacts in discrete abelian groups*, Proceedings of the American Mathematical Society 37 (1973), p. 453–455.

[3] M. Dechamps-Gondim, *Ensembles de Sidon topologiques*, Annales de l'Institut Fourier, 22 (1972).

[4] —, *Densité harmonique et espaces de Banach ne contenant pas de sous-espace fermé isomorphe à c_0*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Série A 282 (1976), p. 963.

[5] S. W. Drury, *Sur les ensembles de Sidon*, ibidem 271 (1970), p. 162.

[6] J. M. Lopez and K. A. Ross, *Sidon sets*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 13 (1975).

[7] F. Lust-Piquard, *L'espace des fonctions presque-périodiques dont le spectre est contenu dans un ensemble compact dénombrable a la propriété de Schur*, Colloquium Mathematicum 41 (1979), p. 273–284.

[8] Y. Meyer, *Recent advances in spectral synthesis*, Conference on Harmonic Analysis, Maryland 1972, Lecture Notes in Mathematics 266.

[9] —, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques*, Astérisque 1 (1973).

[10] G. Pisier, *Ensembles de Sidon et espaces de cotype* 2, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, Ecole Polytechnique, exposé no. 14 (1978).

[11] —, *Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues*, Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, Ecole Polytechnique, exposé XVII-XVIII, 1977-1978.

[12] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, New York 1962.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (BÂT. 425)
ORSAY CEDEX

Reçu par la Rédaction le 21. 02. 1984