COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XL 1979 FASC. 2

DEUX EXEMPLES DE FONCTIONS NON MESURABLES

PAR

ZBIGNIEW GRANDE (BYDGOSZCZ)

Soit R l'espace des nombres réels.

Définition 1 (voir [1], Définitions 5 et 6). On dit qu'une fonction $f: R \to R$ mesurable (L) (au sens de Lebesgue) est *non dégénérée* [*non dégénérée positivement*] au point $x_0 \in R$ lorsque la densité supérieure [la densité inférieure] de l'ensemble $f^{-1}(U)$ au point x_0 est positive, quel que soit l'ensemble ouvert U contenant $f(x_0)$.

Définition 2. On dit qu'une fonction $f: R \to R$ a la *propriété de Denjoy* lorsque, quels que soient les ensembles ouverts U et V tels que $f^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$, la mesure de Lebesgue $m[f^{-1}(U) \cap V]$ de l'ensemble $f^{-1}(U) \cap V$ est positive.

Pour une fonction quelconque $F: R \times R \to R$ posons $F_x(t) = F(x, t)$ et $F^y(t) = F(t, y)$ (les coupes de F). Soit $A(f)$ [$B(f)$] l'ensemble des points (x, y) tels que F_x n'est pas non dégénérée positivement [n'est pas non dégénérée] au point y ou bien F^y n'est pas non dégénérée au point x. Désignons par m_2 la mesure plane de Lebesgue.

Dans [1] j'ai démontré le théorème suivant (Théorème 5):

Soit $F: R \times R \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables (L). Pour que la fonction F soit mesurable (L) il faut et il suffit que $m_2(A(f)) = 0$.

Au même lieu j'ai posé le problème suivant (Problème 1):

Soit $F: R \times R \to R$ une fonction telle que toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables (L). Est-ce que la condition $m_2(B(f)) = 0$ est suffisante pour que F soit mesurable (L)?

Dans le présent article je démontre (en admettant l'hypothèse du continu) que la réponse à cette question est négative et en outre je montre (encore moyennant l'hypothèse du continu) qu'il existe une fonction $F: R \times R \to R$ non mesurable (L) et telle que toutes ses coupes F_x sont mesurables (L) et ont la propriété de Denjoy et que toutes ses coupes F^y sont approximativement continues.

LEMME. *Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites disjointes de nombres réels. Il existe une fonction $f\colon R \to R$ mesurable* (L), *non dégénérée en tout point $x \in R$ et telle que $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$ pour tout $x \in R$.*

Démonstration. Soient A_1 et B_1 deux ensembles fermés, non denses et tels que la densité supérieure $D_g(x_1, A_1)$ de l'ensemble A_1 au point x_1 est positive,

$$D_g(y_1, B_1) > 0, \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset, \quad A_1 \cap \{y_n\} = \emptyset \quad \text{et} \quad B_1 \cap \{x_n\} = \emptyset.$$

Supposons que tous les ensembles fermés, non denses A_i et B^i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ soient déjà définis de manière que

$$D_g(x_i, A_i) > 0, \quad D_g(y_i, B_i) > 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$A_i \cap \{y_n\} = \emptyset \quad \text{et} \quad B_i \cap \{x_n\} = \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Soient U et V deux intervalles ouverts contenant respectivement x_{k+1} et y_{k+1} et tels que .

$$U \cap V = \emptyset, \quad U \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \emptyset \quad \text{et} \quad V \cap \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \emptyset.$$

Les ensembles $U - \{y_n\}$ et $V - \{x_n\}$ étant du type G_δ et $m(\{y_n\} \cup \{x_n\}) = 0$, il existe deux ensembles fermés, non denses $A_{k+1} \subset U - \{y_n\}$ et $B_{k+1} \subset V - \{x_n\}$ tels que

$$D_g(x_{k+1}, A_{k+1}) > 0 \quad \text{et} \quad D_g(y_{k+1}, B_{k+1}) > 0.$$

Posons, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$C_n = \{x \in A_n\colon D_g(x, A_n) > 0\} \quad \text{et} \quad D_n = \{x \in B_n\colon D_g(x, B_n) > 0\}.$$

Remarquons que $x_n \in C_n$, $y_n \in D_n$ et $D_g(x, C_n) > 0$ et $D_g(y, D_n) > 0$, quels que soient les points $x \in C_n$ et $y \in D_n$. Soient

$$E = R - \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cup D_n), \quad F = \{x \in E\colon D_g(x, E) > 0\}$$

et

$$G = \Big\{x \in E - F\colon D_g\Big(x, \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) > 0\Big\}.$$

Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in F \cup G \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \\ 1 & \text{pour } x \in (E - F - G) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \end{cases}$$

et remarquons que la fonction f satisfait aux conditions du lemme.

COROLLAIRE. *Il existe une fonction $f: R \to R$ mesurable* (L), *partout discontinue et non dégénérée en chaque point.*

Remarque. Cependant toute fonction $f: R \to R$ mesurable (L) et non dégénérée positivement en tout point $x \in R$ est ponctuellement discontinue ([1], Théorème 2; elle a même la propriété (G) introduite dans le travail [1]).

THÉORÈME 1. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F: R \times R \to R$ non mesurable* (L) *et telle que toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables* (L) *et non dégénérées en tout point $x \in R$.*

Démonstration. Rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots$$

($\alpha < \Omega$, où Ω désigne le premier nombre ordinal indénombrable) telle que $a_\alpha \neq a_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$. Soit $A \subset R \times R$ l'ensemble non mesurable (L) tel que la mesure intérieure de son complémentaire est égale à zéro et qui a au plus deux points communs avec toute droite [2]. Soient

$$f_1: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\} \quad \text{et} \quad g_1: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\}$$

deux fonctions mesurables (L), non dégénérées en tout point $x \in R$ et telles que

$$g_1(\{a_1\} \cup A_{a_1}) = f_1(\{a_1\} \cup A^{a_1}) = \{0\}$$

($A_{a_1} = \{t \in R: (a_1, t) \in A\}$ et $A^{a_1} = \{t \in R: (t, a_1) \in A\}$). Fixons un nombre $\alpha < \Omega$ et supposons que, quel que soit le nombre ordinal $\beta < \alpha$, on ait déjà défini deux fonctions mesurables (L) et non dégénérées

$$f_\beta: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\} \quad \text{et} \quad g_\beta: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\}$$

de manière que

$$f_\beta(a_\beta \cup A^{a_\beta}) = g_\beta(a_\beta \cup A_{a_\beta}) = \{0\}, \quad f_\beta(a_\gamma) = g_\gamma(a_\beta)$$

pour $\gamma < \beta$ et $g_\beta(a_\gamma) = f_\gamma(a_\beta)$ ($\gamma < \beta$). L'ensemble $\{\beta: \beta < \alpha\}$ étant dénombrable, il existe, d'après le lemme, deux fonctions

$$f_\alpha: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\} \quad \text{et} \quad g_\alpha: R \xrightarrow{\text{sur}} \{0, 1\}$$

mesurables (L), non dégénérées en tout point $x \in R$ et telles que, pour $\beta < \alpha$,

$$f_\alpha(a_\alpha \cup A^{a_\alpha}) = g_\alpha(a_\alpha \cup A_{a_\alpha}) = \{0\}, \quad f_\alpha(a_\beta) = g_\beta(a_\alpha) \quad \text{et} \quad g_\alpha(a_\beta) = f_\beta(a_\alpha).$$

Posons

$$F(x, y) = f_\alpha(x) \quad \text{lorsque } y = a_\alpha.$$

Remarquons que $F_x(y) = g_a(y)$ lorsque $x = a_a$. Les coupes F_x et F^y sont donc mesurables (L) et non dégénérées en tout point $x \in R$. La fonction F est non mesurable (L), comme l'ensemble $B = F^{-1}(1)$ est contenu dans $(R \times R) - A$ et toutes les coupes

$$B_x = \{t \in R\colon (x, t) \in B\} \quad \text{et} \quad B^y = \{t \in R\colon (t, y) \in B\}$$

sont de mesure lebesguienne positive.

THÉORÈME 2. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F\colon R \times R \to R$ non mesurable* (L) *et telle que toutes les coupes F_x sont de deuxième classe de Baire et ont la propriété de Denjoy et toutes les coupes F^y sont approximativement continues.*

Démonstration. Soit $A \subset R$ un ensemble fermé, non dense et de mesure lebesguienne positive. Rangeons tous les points de l'ensemble A en une suite transfinie

$$a_1, a_2, \ldots, a_a, \ldots \qquad (a < \Omega)$$

telle que $a_a \neq a_\beta$ lorsque $a \neq \beta$ et tous les points de l'espace R en une suite transfinie

$$b_1, b_2, \ldots, b_a, \ldots \qquad (a < \Omega)$$

telle que $b_a \neq b_\beta$ lorsque $a \neq \beta$. Fixons un nombre $a < \Omega$ et désignons par A_a l'ensemble $\{b_\gamma\colon \gamma < a\}$. L'ensemble A_a étant dénombrable, il existe un ensemble B_a du type G_δ et de mesure lebesguienne zéro qui contient l'ensemble A_a. D'après le lemme 11 du travail [3] il existe une fonction $g_a\colon R \to R$ approximativement continue et telle que $g_a(x) = 0$ pour $x \in B_a$ et $0 < g_a(x) \leqslant 1$ pour $x \in R - B_a$. Soit $\{U_n\}$ la suite des composantes de l'ensemble $R - A$. Etant fixé l'indice naturel n, désignons par $\overline{U}_n$ l'adhérence de l'ensemble U_n et définissons une fonction continue

$$h_n\colon \overline{U}_n \xrightarrow{\text{sur}} [0, 1].$$

Posons

$$F(x, y) = \begin{cases} g_a(x) & \text{lorsque } y \in A \text{ et } y = a_a, \\ h_n(y) & \text{lorsque } y \in U_n \ (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Toutes les coupes F^y de cette fonction sont approximativement continues. Démontrons maintenant que toutes ses coupes F_x de cette fonction sont de deuxième classe de Baire et ont la propriété de Denjoy. Fixons le nombre $x \in R$. Il existe un nombre $a < \Omega$ tel que $x = b_a$. Remarquons que $x \in B_\beta$ pour tout $\beta > a$ et, par conséquent, $g_\beta(x) = 0$ pour tout $\beta > a$. L'ensemble $\{y \in A\colon F(x, y) \neq 0\}$ est donc dénombrable. Posons

$$g(y) = \begin{cases} h_n(y) & \text{lorsque } y \in U_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{lorsque } y \in A. \end{cases}$$

La fonction g étant de première classe de Baire et l'ensemble $\{y \in R: F(x, y) \neq g(y)\}$ étant dénombrable, la coupe F_x est de deuxième classe de Baire.

Fixons maintenant l'ensemble ouvert U et l'intervalle ouvert V tels que $(F_x)^{-1}(U) \cap V \neq \emptyset$. L'interieur $\mathrm{Int}\big((F_x)^{-1}(U)\big)$ de l'ensemble $(F_x)^{-1}(U)$ étant dense dans $(F_x)^{-1}(U)$, l'ensemble $(F_x)^{-1}(U) \cap V$ contient un intervalle et, par conséquent, il est de mesure lebesguienne positive. La fonction F n'est pas mesurable (L), parce que la fonction partielle $F/R \times A$ ne l'est pas. Pour le voir remarquons que l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in R \times R: y \in A \text{ et } F(x, y) \neq 0\}$$

n'est pas mesurable (L), comme toutes ses coupes C_x sont dénombrables et toutes ses coupes C^y sont telles que $m(R - C^y) = 0$.

TRAVAUX CITÉS

[1] Z. Grande, *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$*, Dissertationes Mathematicae 159 (1978).

[2] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fundamenta Mathematicae 32 (1920), p. 112-115.

[3] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society 69 (1950), p. 1-54.

Reçu par la Rédaction le 7. 6. 1977