COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXIV 1976 FASC. 2

SUR LES DÉRIVÉES SYMÉTRIQUES DES FONCTIONS APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

PAR

F. M. FILIPCZAK (ŁÓDŹ)

Cette communication contient une caractérisation de l'ensemble des points où une fonction approximativement continue n'a pas de dérivée symétrique (ou de dérivée symétrique finie). Il y sera déterminée aussi la structure de l'ensemble des points où une fonction approximativement continue n'a ni de dérivée symétrique, ni de dérivée unilatérale.

Les dérivées symétriques inférieure $\underline{D}f$ et supérieure $\overline{D}f$ d'une fonction mesurable f sont, comme il a été démontré dans mon travail antérieur (1), des fonctions mesurables. Il se trouve ici un exemple de fonction f pour laquelle les dérivées $\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ sont non-mesurables et l'ensemble $\{x\colon \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\}$ est non-mesurable, de même qu'un exemple de fonction f mesurable au sens de Lebesgue et pour laquelle les fonctions $\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ n'appartiennent à aucune classe de Baire et l'ensemble $\{x\colon \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)\}$ n'est pas borelien.

Les fonctions considérées ici sont supposées réelles, finies et définies sur l'ensemble des nombres réels tout entier. Les notations employées seront les suivantes:

$Df(x)$ — dérivée symétrique de la fonction f au point x;

$\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ — ses dérivées symétriques inférieure et supérieure respectivement;

$\{x\}$ — partie fractionnaire du nombre x, c'est-à-dire différence entre x et le plus grand des nombres entiers $k \leqslant x$;

Q — ensemble de tous les nombres rationnels;

R — celui de tous les nombres réels;

$q\cdot E = \{x = qy\colon y \in E\}$ où $q \in R$ et $E \subset R$;

c — la puissance du continu;

$\overline{\overline{E}}$ — celle de l'ensemble E.

---

(1) F. M. Filipczak, *Sur la structure de l'ensemble des points où une fonction continue n'admet pas de dérivée symétrique*, Dissertationes Mathematicae 130 (1975).

LEMME 1. *Si f est une fonction approximativement continue, les ensembles $\{x\colon \underline{D}f(x) \leqslant a\}$ et $\{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant a\}$ sont de classe G_δ pour tout a, où $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$.*

Démonstration. Posons $E = \{x\colon \bar{D}f(x) \geqslant a\}$ et

$$E_n = \left\{x\colon \sup_{0<h<1/n} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} > a-\frac{1}{n}\right\},$$

où $-\infty < a < +\infty$. On a $E = \bigcap_1^\infty E_n$. Nous allons montrer que l'ensemble E_n est ouvert pour tout $n = 1, 2, \ldots$

En effet, considérons un $x_0 \in E_n$. Il existe alors un h_0 tel que

$$0 < h_0 < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)}{2h_0} > a-\frac{1}{n}.$$

Choisissons un nombre b satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)}{2h_0} > b > a-\frac{1}{n}$$

et soit δ_0 un nombre tel que $0 < 2\delta_0 < h_0$, $h_0+\delta_0 < 1/n$ et $bh_0/h > a-1/n$ pour $h_0-\delta_0 < h < h_0+\delta_0$. La fonction f étant supposée approximativement continue, on peut faire correspondre au nombre positif

$$\varepsilon = [f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)-2h_0 b]/2$$

un nombre $\delta > 0$ tel que $3\delta < \delta_0$ et que

$$\begin{aligned} &\big|\{t \in (x_0-h_0-3\delta,\, x_0-h_0+3\delta)\colon |f(t)-f(x_0-h_0)| < \varepsilon\}\big| > 5\delta,\\ &\big|\{t \in (x_0+h_0-3\delta,\, x_0+h_0+3\delta)\colon |f(t)-f(x_0+h_0)| < \varepsilon\}\big| > 5\delta. \end{aligned} \tag{1}$$

Or on a l'inclusion $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset E_n$. En effet, si $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ et, si h varie de façon que $x+h \in (x_0+h_0-\delta, x_0+h_0+\delta)$, il vient

$$h \in (h_0-2\delta, h_0+2\delta) \subset (h_0-\delta_0, h_0+\delta_0)$$

et

$$x-h \in (2x-x_0-h_0-\delta, 2x-x_0-h_0+\delta) \subset (x_0-h_0-3\delta, x_0-h_0+3\delta).$$

La longueur des intervalles

$$(x_0+h_0-\delta, x_0+h_0+\delta) \quad \text{et} \quad (2x-x_0-h_0-\delta, 2x-x_0-h_0+\delta)$$

étant 2δ, il résulte des inégalités (1) que

$$\begin{aligned} &\big|\{t \in (x_0+h_0-\delta,\, x_0+h_0+\delta)\colon |f(t)-f(x_0+h_0)| < \varepsilon\}\big| > \delta,\\ &\big|\{t \in (2x-x_0-h_0-\delta,\, 2x-x_0-h_0+\delta)\colon |f(t)-f(x_0-h_0)| < \varepsilon\}\big| > \delta. \end{aligned}$$

Il existe donc un $h_x \in (h_0-\delta_0,\ h_0+\delta_0)$ tel que

$$|f(x+h_x)-f(x+h_0)|<\varepsilon \quad \text{et} \quad |f(x-h_x)-f(x_0-h_0)|<\varepsilon.$$

Par conséquent, $0<h_x<1/n$ et

$$\frac{f(x+h_x)-f(x-h_x)}{2h_x}$$
$$=\frac{[f(x+h_x)-f(x_0+h_0)]+[f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)]}{2h_x}+\frac{[f(x_0-h_0)-f(x-h_x)]}{2h_x}$$
$$>\frac{f(x_0+h_0)-f(x_0-h_0)-2\varepsilon}{2h_x}=\frac{bh_0}{h_x}>a-\frac{1}{n},$$

d'où $x \in E_n$.

Il est ainsi démontré que les ensembles E_n sont ouverts. Par conséquent, $E \in G_\delta$ (pourvu que $-\infty<a<+\infty$). Pour $a=-\infty$ on a $E=R$ et pour $a=+\infty$ on a

$$E=\bigcap_1^\infty \{x\colon \bar{D}f(x)\geqslant n\}.$$

La démonstration que $\{x\colon \underline{D}f(x)\leqslant a\}\in G_\delta$ est analogue.

COROLLAIRE 1. *La fonction f étant approximativement continue eı la dérivée symétrique $Df(x)$ existant en tout point, la fonction Df est de première classe de Baire. De façon plus générale: si la dérivée symétrique $Df(x)$ existe sauf dans un ensemble de points au plus dénombrable, les fonctions $\underline{D}f$, $\bar{D}f$ et Df sont de première classe de Baire.*

COROLLAIRE 2. *Si f est une fonction approximativement continue, les fonctions $\underline{D}f$ et $\bar{D}f$ sont de deuxième classe de Baire.*

THÉORÈME 1. *Pour qu'un ensemble E (ensemble E_0 respectivement) soit celui des points où une fonction approximativement continue f n'a pas de dérivée symétrique (de dérivée symétrique finie respectivement), il faut et il suffit que $E=A\cup B$ ($E_0=A_0\cup B_0$ respectivement), où $A\in G_\delta$, $B\in G_{\delta\sigma}$ et $|B|=0$ ($A_0\in G_\delta$, $B_0\in G_{\delta\sigma}$ et $|B_0|=0$ respectivement).*

Démonstration. La condition est suffisante en vertu du travail cité (théorème 20). Reste à en établir la nécessité. Les égalités

$$E=\bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{m=-\infty}^\infty \left[\left\{x\colon \underline{D}f(x)\leqslant\frac{m}{n}\right\}\cap\left\{x\colon \bar{D}f(x)\geqslant\frac{m+1}{n}\right\}\right],$$
$$E_0=E\cup\{x\colon \underline{D}f(x)=-\infty\}\cup\{x\colon \bar{D}f(x)=+\infty\}$$

entraînent en vertu du lemme 1 que $E, E_0\in G_{\delta\sigma}$. En posant

$$A=A_0=\{x\colon \underline{D}f(x)=-\infty\}\cap\{x\colon \bar{D}f(x)=+\infty\},$$
$$B=E\setminus A \quad \text{et} \quad B_0=E_0\setminus A_0,$$

on trouve $A, A_0 \in G_\delta$, $B, B_0 \in G_{\delta\sigma}$, $A \cup B = E$, $A_0 \cup B_0 = E_0$ et $|B| = |B_0| = 0$, la dernière égalité résultant du travail cité (corollaire 3.2).

THÉORÈME 2. *Pour qu'un ensemble E soit celui des points où une fonction approximativement continue f n'a ni de dérivée symétrique (dérivée symétrique finie respectivement), ni de dérivée finie unilatérale, il faut et il suffit que $E = A \cup B$, où $A \in G_\delta$, $B \in G_{\delta\sigma}$ et $|B| = 0$.*

C'est une conséquence du théorème 1 et du travail cité (théorème 23).

Remarque 1. *Il existe une fonction non-mesurable f dont les dérivées symétriques extrêmes $\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ sont non-mesurables. L'ensemble de tous les points où cette fonction f n'a pas de dérivée symétrique (de dérivée symétrique finie respectivement) n'est non plus mesurable.*

Démonstration. Soit B une base de l'espace R des nombres réels sur le corps Q des nombres rationnels, telle que $1 \in B$. Alors tout nombre réel x peut être représenté d'une seule manière sous la forme

$$x = \sum_{b \in B} x_b \cdot b,$$

où $x_b \in Q$ et les coefficients $x_b \neq 0$ n'étant qu'en nombre fini. Posons $A = \{x\colon x_1 = 0\}$.

On voit aisément que A est un espace linéaire sur le corps Q (sous-espace de l'espace R). En outre, l'ensemble A est dense et non-mesurable. Considérons la fonction caractéristique de l'ensemble A:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in R \setminus A. \end{cases}$$

Cette fonction est non-mesurable et elle a une dérivée symétrique (qui est nulle) en tout point $x \in A$. Enfin, on a $\underline{D}f(x) = -\infty$ et $\overline{D}f(x) = +\infty$ pour $x \in R \setminus A$.

LEMME 2. *Il existe un groupe additif G de nombres réels qui est un ensemble borelien de mesure nulle et de puissance du continu.*

Démonstration ([2]). Désignons par $(x_1, x_2, \ldots)_2$ le développement binaire (dans lequel il y a une infinité de zéros) du nombre $x \in \langle 0, 1)$. Évidemment, il détermine le nombre x univoquement. Soit

$$C_{p,k,m} = \Big\{(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+k})\colon \sum_{m+1}^{m+k} |a_n - a_{n-1}| = p\Big\},$$

$$D^{(m)}_{a_m, \ldots, a_{m+k}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots)_2\colon x_n = a_n \text{ pour } n = m, m+1, \ldots, m+k\},$$

$$D_{p,k,m} = \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots)_2\colon \sum_{m+1}^{m+k} |x_n - x_{n-1}| = p\Big\}, \quad E_{j,k,m} = \bigcup_{p=0}^{j} D_{p,k,m},$$

([2]) M. C. Ryll-Nardzewski a remarqué que ce lemme résulte aussi du théorème de J. von Neumann [*Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*, Mathematische Annalen 99 (1928), p. 134-141].

où $a_n = 0$ ou 1 pour $n = 1, 2, \ldots, j$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ et $k, m = 1, 2, \ldots$ On voit facilement que l'ensemble $C_{p,k,m}$ compte $2\binom{k}{p}$ éléments et que

$$D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+k}} \cap D^{(m+k+1)}_{a_{m+k+1},\ldots,a_{m+q}} = D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+q}},$$

$$D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+k}} = \bigcup_{s=0}^{2^{m-1}-1} \Big(s\cdot 2^{-m+1} + \sum_m^{m+k} 2^{-n}a_n,\ s\cdot 2^{-m+1} + \sum_m^{m+k} 2^{-n}a_n + 2^{-m-k}\Big),$$

$$|D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+k}}| = 2^{-k-1}, \qquad D_{p,k,m} = \bigcup_{C_{p,k,m}} D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+k}},$$

où le symbole $\bigcup_{C_{p,k,m}}$ désigne la somme étendue à toutes les suites $(a_m, \ldots, a_{m+k}) \in C_{p,k,m}$. L'égalité

$$E_{j,k,m} \cap E_{j,k,m+k+1} = \bigcup_{p=0}^{j} \bigcup_{q=0}^{j} \bigcup_{C_{p,k,m}} \bigcup_{C_{q,k,m}} D^{(m)}_{a_m,\ldots,a_{m+2k+1}}$$

entraîne

$$|E_{j,k,m} \cap E_{j,k,m+k+1}| = \Big[\sum_{p=0}^{j} \binom{k}{p}\Big]^2 \cdot 2^{-2k},$$

d'où par récurrence

$$|E_{j,k,m} \cap E_{j,k,m+k+1} \cap \ldots \cap E_{j,k,m+(n-1)(k+1)}| = \Big[\sum_{p=0}^{j} \binom{k}{p}\Big]^n \cdot 2^{-nk}$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots$ et $k, m, n = 1, 2, 3, \ldots$

Vu que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\Big[\sum_{p=0}^{j} \binom{k}{p}\Big]^n \cdot 2^{-nk}\Big) = 0 \qquad \text{pour } j = 0, 1, 2, \ldots \text{ et } k > j,$$

l'ensemble

$$F_{j,k,l} \overset{\text{df}}{=} \bigcap_{m=l}^{\infty} E_{j,k,m}$$

est de mesure nulle pour $k > j$, de même que l'ensemble

$$G_{j,k,l} \overset{\text{df}}{=} \{x \colon \{x\} \in F_{j,k,l}\}.$$

Posons

$$G = \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} G_{j,k,l}.$$

L'ensemble G ainsi défini est évidemment borelien et $|G| = 0$. Pour prouver que G est un groupe additif, remarquons d'abord que l'on a les relations

$$(2)\qquad G = \Big\{x\colon \{x\} = (x_1, x_2, \ldots)_2 \text{ et } \bigvee_j \bigwedge_k \bigvee_l \bigwedge_{m\geqslant l} \sum_{m+1}^{m+k} |x_n - x_{n-1}| \leqslant j\Big\},$$

$$\{-x\} = \begin{cases} (0, 0, \ldots)_2, & \text{si } x = 0, \\ (y_1, \ldots, y_{p-1}, 1, 0, 0, \ldots)_2, & \text{si } x_p = 1 \text{ pour un } p \text{ et } x_n = 0 \\ \cdot & \text{pour tout } n > p, \\ (y_1, y_2, \ldots)_2 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

$$\text{où } (x_1, x_2, \ldots)_2 = \{x\} \text{ et } y_n = 1 - x_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots$$

Il résulte de ces relations que $x \in G$ entraîne $-x \in G$. Reste à montrer que $x + y \in G$ pour $x, y \in G$.

Soit $x, y \in G$,

$$\{x\} = (x_1, x_2, \ldots)_2, \qquad \{y\} = (y_1, y_2, \ldots)_2 \qquad \text{et} \qquad \{x+y\} = (z_1, z_2, \ldots)_2.$$

On conclut de (2) que

$$\bigvee_j \bigwedge_k \bigvee_l \bigwedge_{m\geqslant l} \sum_{m+1}^{m+k} |x_n - x_{n-1}| \leqslant j \qquad \text{et} \qquad \sum_{m+1}^{m+k} |y_n - y_{n-1}| \leqslant j.$$

Pour un $m \geqslant l$ quelconque fixé, désignons par $r_0, r_1, \ldots, r_s$ une suite croissante de nombres naturels telle que $r_0 = m$, $r_s = m+k$, $x_{r_i+1} = x_{r_i+2} = \ldots = x_{r_{i+1}}$ et $y_{r_i+1} = y_{r_i+2} = \ldots = y_{r_{i+1}}$ pour $i = 0, 1, \ldots, s-1$, enfin $x_{r_i} \neq x_{r_i+1}$ ou $y_{r_i} \neq y_{r_i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Évidemment $s \leqslant 2j+1$. De plus

$$(3)\qquad \sum_{r_i+2}^{r_{i+1}} |z_n - z_{n-1}| \leqslant 1.$$

Cette inégalité résulte des considérations suivantes.

Si $x_{r_{i+1}} + y_{r_{i+1}} = 1$, on a

$$z_{r_i+1} = z_{r_i+2} = \ldots = z_{r_{i+1}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } a < b, \\ 0 & \text{pour } a \geqslant b, \end{cases}$$

$$\text{où } a = \sum_{n > r_{i+1}} 2^{-n} z_n \text{ et } b = 2^{-r_{i+1}}.$$

Si $x_{r_{i+1}} = y_{r_{i+1}} = 0$, on a

$$z_{r_i+1} = z_{r_i+2} = \ldots = z_{r_{i+1}-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad z_{r_{i+1}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } a < b, \\ 1 & \text{pour } a \geqslant b. \end{cases}$$

Enfin, si $x_{r_{i+1}} = y_{r_{i+1}} = 1$, on a

$$z_{r_i+1} = z_{r_i+2} = \ldots = z_{r_{i+1}-1} = 1 \quad \text{et} \quad z_{r_{i+1}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } a < b, \\ 1 & \text{pour } a \geqslant b. \end{cases}$$

On conclut donc de (3) que

$$\sum_{m+1}^{m+k} |z_n - z_{n-1}| = \sum_{i=0}^{s-1} |z_{r_i+1} - z_{r_i}| + \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{n=r_i+2}^{r_{i+1}} |z_n - z_{n-1}| \leqslant 2s \leqslant 4j+2,$$

d'où $x+y \in G$.

L'ensemble G a la puissance du continu. En effet, le nombre $x = (x_1, x_2, \ldots)_2$, où $x_{2^n} = 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $x_s = 0$ pour $s \neq 2^n$, appartient à G. En remplaçant dans le développement du nombre x les termes $x_2, x_4, x_8, \ldots$ par $y_1, y_2, y_3, \ldots$ où $(y_1, y_2, y_3, \ldots)_2$ est le développement binaire d'un nombre quelconque de l'intervalle $\langle 0, 1)$, on obtient c nombres distincts de l'ensemble G.

Remarque 2. On voit aisément que $G \in F_{\sigma\delta\sigma}$.

Lemme 3. *Il existe sur le corps Q un espace P linéaire de nombres réels qui est borelien, de mesure nulle et de puissance du continu.*

Démonstration. Soit G un groupe additif de nombres réels tel que l'ensemble de ses éléments soit borelien, de mesure nulle et de puissance du continu. Posons

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G.$$

Alors P est un espace linéaire sur le corps Q et a toutes les propriétés réquisés.

Théorème 3. *Il existe une fonction mesurable f dont les dérivées symétriques extrêmes $\underline{D}f$ et $\overline{D}f$ sont non-mesurables au sens de Borel. L'ensemble de tous les points où cette fonction f n'a pas de dérivée symétrique (dérivée symétrique finie respectivement) est non-borelien.*

Démonstration. Soient P l'espace linéaire établi par le lemme 3 et B une base de P. L'ensemble B est de puissance c. En effet, b désignant la puissance de B, on voit que $b \geqslant \aleph_0$ et que b est la puissance de la famille de tout les sous-ensembles finis de B. Tout sous-ensemble de la base B composé de n éléments détermine $\aleph_0^n = \aleph_0$ éléments différents de P. Il en résulte que $\overline{\overline{P}} = \aleph_0 \cdot b = b$, d'où $b = c$.

Soit à présent $A \subset B$. Alors l'ensemble

$$P_A = \{x \colon \bigvee_n \bigvee_{a_1, \ldots, a_n \in A} \bigvee_{q_1, \ldots, q_n \in Q} x = a_1 \cdot q_1 + \ldots + a_n \cdot q_n\}$$

est un sous-espace de l'espace P, et on a évidemment $P_{A_1} \neq P_{A_2}$ pour $A_1, A_2 \subset B$ et $A_1 \neq A_2$. La famille de tous les sous-ensembles de B est de puissance 2^{c}. Il en est même de la famille des sous-espaces linéaires de l'espace P. Il existe donc un sous-espace non-borelien P_A. Évidemment $|P_A| = 0$.

La fonction caractéristique f de l'ensemble P_A a les propriétés suivantes:

$Df(x) = 0$ pour $x \in P_A$, $\underline{D}f(x) = -\infty$ et $\overline{D}f(x) = +\infty$ pour $x \notin P_A$, ce qui achève la démonstration.

Aux considérations précédentes se rattache le problème de caractériser l'ensemble des points où les fonctions quelconques ou mesurables (au sens de Lebesgue) n'ont pas de dérivée symétrique.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ
INSTITUT MATHÉMATIQUE

Reçu par la Rédaction le 29. 3. 1974