COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XXVI DÉDIÉ À M. WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI 1972

KLEINSCHE GEOMETRIE UND THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE

VON

E. J. JASIŃSKA (CZERNOWITZ) UND M. KUCHARZEWSKI (KATOWICE)

Einleitung. F. Klein hat in seinem berühmten Erlanger Programm [1] folgende Definition der Geometrie aufgestellt:

Definition 1. Es sei eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden, m. a. W. man soll die Invariantentheorie in bezug anf diese Gruppe entwickeln.

Hier möchten wir diese Definition etwas ausführlicher erklären. Insbesondere werden die geometrischen Begriffe durch Bergiffe der Theorie der geometrischen [2], [3] bzw. algebraischen Objekte ausgedrückt. Es zeigt sich, daß zwischen diesen zwei Theorien ein enger Zusammenhang besteht. Man kann also die Begriffe und Ergebnisse der Theorie der geometrischen Objekte in der Kleinschen Geometrie interpretieren bzw. anwenden.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden wir alle hier auftretenden Begriffe möglichst genau definieren. Manche von ihnen sind schon früher und sogar auf verschiedene Weise definiert worden. Darum ist es notwendig festzulegen in welchem Sinne sie hier zu verstehen sind.

Im Abschnitt 1 wird die Transformationsgruppe und die Kleinsche Geometrie definiert. Objekte dieser Geometrie definieren wir im Abschnitt 2. Komitanten und Äquivalenz dieser Objekte werden im Abschnitt 3 und Äquivalenz der Geometrien im Abschnitt 4 erklärt. In den Abschnitten 5 und 6 beschäftigen wir uns mit speziellen Arten der Geometrie (Untergeometrie, Teilgeometrie und Faktorgeometrie) und im Abschnitt 7 werden gewisse Zusammenhänge zwischen Komitanten und den verträglichen Äquivalenzrelationen betrachtet.

1. Transformationsgruppe und Kleinsche Geometrie. Aus der Definition 1 folgt, daß Geometrie im Sinne von Klein ein Paar $(M, \tilde{G})$ ist, wo M eine Menge und $\tilde{G}$ eine Transformationsgruppe bedeutet. Um also die

Definition der Geometrie genau zu formulieren, müssen wir zuerst bestimmen, was wir unter einer Transformationsgruppe $\tilde{G}$ der Menge M auf sich verstehen.

Es sei G eine beliebige Gruppe. Die Gruppe G wirkt auf M als Transformationsgruppe, wenn jedem Element der Gruppe G eine eindeutige Abbildung der Menge M auf sich zugeordnet ist, d.h., wenn es eine Funktion

(1.1) $$f\colon M \times G \to M,$$

gibt, welche folgende Bedingungen erfüllt, wo e das neutrale Element von G ist und $g_2 \cdot g_1$ das Produkt der Elemente g_1 und g_2 bedeutet:

(1.2) $$\bigwedge g \in G \; f(M, g) = M,$$

(1.3) $$\bigwedge g \in G, \; \bigwedge x_1, x_2 \in M \; x \neq x_2 \Rightarrow f(x_1, g) \neq f(x_2, g),$$

(1.4) $$\bigwedge g_1, g_2 \in G, \; \bigwedge x \in M \; f\big(f(x, g_1), g_2\big) = f(x, g_2 \cdot g_1),$$

(1.5) $$\bigwedge x \in M \; f(x, e) = x.$$

Die Bedingung (1.4) heißt *Fundamentalgleichung* und (1.3) heißt *Identitätsbedingung.*

Da die Transformationsgruppe $\tilde{G}$ der Menge M auf sich durch f und G eindeutig bestimmt ist, kann man eine Geometrie folgendermaßen definieren:

Definition 1.2. Geometrie im Sinne von F. Klein ist ein Tripel (M, G, f), wo M beliebige Menge, G beliebige Gruppe und f die Wirkung der Gruppe G auf M ist.

Die Menge M heißt *geometrischer Raum* und seine Elemente werden *Punkte* genannt.

Überdies werden wir immer voraussetzen, daß die Gruppe G auf M effektiv wirkt, d.h. die Implikation

(1.6) $$\bigwedge x \in M \; f(x, g) = x \Rightarrow g = e,$$

gilt.

Wenn (1.6) nicht erfüllt ist, kann G durch eine andere Gruppe G_0 ersetzt werden, welche dieser Bedingung bereits genügt. Als G_0 nehmen wir die Faktorgruppe $G_0 = G/H$, an, wo

$$H = \{g\colon g \in G, \; \bigwedge x \in M \; f(x, g) = x\}$$

eine invariante Untergruppe (Normalteiler) von G ist.

Wenn die Gruppe G auf M transitiv wirkt, d.h. wenn sie die Relation

(1.7) $$\bigwedge x, y \in M, \; \bigvee g \in G \; y = f(x, g),$$

erfüllt, so heißt der Raum M *homogen.*

Manche Autoren verstehen unter Geometrie die Menge aller Invarianten hinsichtlich der Transformationsgruppe $\tilde{G}$. Wir glauben, daß die Definition 1.2 bequemer ist.

Aus der Definition 1.1 folgt, daß jede Geometrie ein algebraisches Objekt im Sinne von Zajtz [7] ist und daß jedes abstrakte geometrische Objekt, in dem die Gruppe G effektiv wirkt, eine Geometrie darstellt (vgl. [2], [3]).

2. Objekte der angegebenen Geometrie. Es sei

$$(M, G, f) \tag{2.1}$$

eine Geometrie im oben definierten Sinne. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge und mit F die Wirkung der Gruppe G auf $\mathfrak{M}$, d.h. F: $\mathfrak{M}\times G \to \mathfrak{M}$ ist eine Funktion, die der Fundamentalgleichung (1.4) und der Identitätsbedingung (1.5) genügt.

Definition 2.1. Das Tripel $(\mathfrak{M}, G, F)$ heißt ein *abstraktes geometrisches Objekt* der Geometrie (2.1) mit der Faser $\mathfrak{M}$ und mit der Transformationsformel

$$\bar{\omega} = F(\omega, g), \quad \omega\in\mathfrak{M},\ g\in G. \tag{2.2}$$

Jedes Element ω von $\mathfrak{M}$ wird *Objekt* der Geometrie (2.1) genannt.

Es ist zu bemerken, daß das abstrakte geometrische Objekt $(\mathfrak{M}, G, F)$ eine neue Geometrie darstellt, wenn nur G auf $\mathfrak{M}$ effektiv wirkt.

Um alle abstrakten Objekte zu bestimmen, muß man alle Lösungen der Funktionalgleichung

$$F\big(F(\omega, g_1), g_2\big) = F(\omega, g_2\cdot g_1), \quad \omega\in\mathfrak{M},\ g_1, g_2\in G, \tag{2.3}$$

mit der Bedingung

$$F(\omega, e) = \omega, \tag{2.4}$$

finden. Die Bestimmung der abstrakten Objekte ist das erste Problem jeder Geometrie.

Jetzt führen wir zwei wichtige abstrakte Objekte X ein, die in jeder Geometrie auftreten. Es sei eine Geometrie (2.1) und eine beliebige Menge $\mathfrak{M}$ gegeben. Die Funktion

$$F_0(\omega, g) \overset{\mathrm{df}}{\equiv} \omega, \quad \omega\in\mathfrak{M},\ g\in G \tag{2.5}$$

erfüllt offensichtlich die Gleichung (2.3) und die Bedingung (2.4). Das Tripel $(\mathfrak{M}, G, F_0)$ bestimmt also ein abstraktes Objekt. Dieses wird *Invariant* bzw. *Skalar* genannt. Es hat die Transformationsformel

$$\bar{\omega} = \omega, \tag{2.6}$$

die zeigt, daß ω bei den Transformationen der Gruppe G unverändert bleibt.

Aus der Definition (2.1) folgt noch, daß die Geometrie (2.1) ein abstraktes Objekt für sich selbst darstellt. Es genügt das entsprechende Tripel $(\mathfrak{M}_1, G, F_1)$ durch $\mathfrak{M}_1 = M$ und $F_1 = f$ zu definieren. Jeder Punkt von M ist also ein Objekt der Geometrie (2.1).

Das letzte Beispiel zeigt, daß man sich auf die Untersuchung geometrischer Objekte beschränken kann, weil man jedes für ein Objekt geltende Ergebnis auf die entsprechende Geometrie bzw. ihre Punkte anwenden darf.

3. Komitanten und Äquivalenz der abstrakten Objekte. Wir wollen jetzt zwei wichtige Relationen betrachten, die zwischen den geometrischen Objekten derselben Geometrie bestehen können.

Es seien

$$(\mathfrak{M}_1, G, F_1) \tag{3.1}$$

und

$$(\mathfrak{M}_2, G, F_2) \tag{3.2}$$

zwei abstrakte Objekte der Geometrie (2.1). Mit ω bzw. σ werden die Elemente von $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet.

Definition 3.1. Das Objekt (3.2) heißt *Komitante* von (3.1), wenn es eine Surjektion h gibt, welche die Menge $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{M}_2$ abbildet und bei allen Transformationen $f \epsilon G$ erhalten bleibt, d.h. die Implikation

$$\sigma = h(\omega) \Rightarrow \bar{\sigma} = h(\bar{\omega}), \tag{3.3}$$

erfüllt.

Werden in (3.3) $\bar{\sigma}$ und $\bar{\omega}$ durch ihre Werte ersetzt, die sich aus den Transformationsformeln ergeben, so erhalten wir die Funktionalgleichung

$$F_2\big(h(\omega), g\big) = h\big(F_1(\omega, g)\big) \tag{3.4}$$

welche jede Komitante erfüllen muß.

Auf diese Weise wird die Bestimmung aller Komitanten auf die Bestimmung aller Lösungen der Gleichung (3.4) zurückgeführt. Die Bestimmung aller Komitanten ist das zweite Problem jeder Geometrie.

Definition 3.2. Bildet die Funktion h die Menge $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{M}_2$ eineindeutig ab, d.h. ist h eine Bijektion, so sagen wir, daß (3.1) *mit* (3.2) *äquivalent ist.*

In diesem Falle kann (3.4) auf die Form

$$F_2(\sigma, g) = h\Big(F_1\big(h^{-1}(\sigma), g\big)\Big), \tag{3.5}$$

gebracht werden.

Äquivalenz der geometrischen Objekte ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Alle Objekte können also in Äquivalenzklassen eingeteillt werden. Die Bestimmung dieser Klassen heißt Klassifikation. Das ist das dritte Problem der Geometrie.

Es seien abstrakte Objekte

$$(\mathfrak{M}_i, G, F_i), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.6}$$

der Geometrie (2.1) gegeben. Aus diesen können wir ein neues abstraktes Objekt $(\mathfrak{M}, G, F)$ bilden, wenn wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \ldots \times \mathfrak{M}_p$ und $F = (F_1, F_2, \ldots, F_p)$ setzen. Das Objekt $(\mathfrak{M}, G, F)$ heißt Produktobjekt der Objekte (3.6).

Unter den Komitanten jeder Geometrie sind diejenigen von Produkten von Punkten besonders wichtig. Die skalaren Komitanten (Invarianten) spielen hier eine grundlegende Rolle.

4. Äquivalenz zweier Geometrien. Zuerst betrachten wir zwei Geometrien

$$(M_1, G, f_1) \tag{4.1}$$

und

$$(M_2, G, f_2) \tag{4.2}$$

mit derselben Gruppe. Aus der Definition 2.1 folgt, daß die Geometrie (4.2) ein abstraktes Objekt von (4.1) und umgekehrt ist. Darum kann man naturgemäß folgende Definition einführen:

Definition 4.1. Die Geometrie (4.2) und (4.1) sind *äquivalent*, wenn die entsprechenden abstrakten Objekte äquivalent sind.

Die Äquivalenz der Geometrien (4.1) und (4.2) bedeutet also, daß es eine Bijektion h gibt, welche die Menge M_1 auf M_2 abbildet und die Gleichung

$$f_2(y, g) = h\big(f_1(h^{-1}(y), g)\big), \tag{4.3}$$

erfüllt.

Um die Äquivalenz zweier Geometrien, die mit Hilfe verschiedener Gruppen G_1 und G_2 gebildet sind, zu definieren, bemerken wir zuerst Folgendes:

Jeder Monomorphismus φ: $G_1 \to G$ gestattet aus (2.1) eine neue Geometrie

$$(M, G_1, f_1) \tag{4.4}$$

zu gewinnen, wo f_1 durch $f_1(x, a) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f\big(x, \varphi(a)\big)$, $a \in G_1$, $x \in M$ definiert ist. Wenn insbesondere φ ein Isomorphismus ist, so nennen wir die Geometrien (2.1) und (4.6) *isomorph* und wir betrachten sie dann als identisch.

Nach dieser Bemerkung ist die folgende Definition der Äquivalenz zweier Geometrien selbstverständlich:

Definition 4.1. Zwei Geometrien (M_1, G_1, f_1) und (M_2, G_2, f_2) sind *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\varphi\colon G_1 \to G_2$ und eine Bijektion $h\colon M_1 \to M_2$ gibt, welche die Relation

$$f_2(y, g_2) = h\big(f_1\big(h^{-1}(y),\ \varphi^{-1}(g_2)\big)\big), \qquad y \in M_2,\ g_2 \in G_2,$$

erfüllen.

5. Untergeometrie und Teilgeometrie. Es sei eine Geometrie (2.1) gegeben. Mit G_1 bezeichnen wir eine Untergruppe von G und mit f_1 die eingeschränkte Funktion $f|_{G_1}$:

$$f_1(x, g) = f(x, g), \qquad x \in M,\ g \in G_1. \tag{5.1}$$

Es ist leicht zu prüfen, daß f_1 die Fundamentalgleichung (1.4) und die Identitätsbedingung (1.5) erfüllt. Das Tripel (M, G, f_1) definiert eine neue Geometrie. Diese wird Untergeometrie von (5.1) genannt, die durch die Untergruppe G_1 bestimmt ist.

Um die Teilgeometrie zu definieren, führen wir zuerst den Begriff einer zulässigen Teilmenge ein.

Definition 5.2. Eine Teilmenge M_0 von M heißt *zulässig*, wenn sie die Implikation

$$x \in M_0 \Rightarrow f(x, g) \in M_0, \qquad x \in M_0,\ g \in G \tag{5.2}$$

für jedes Element $g \in G$ erfüllt.

Mit f_0 bezeichnen wir jetzt die eingeschränkte Funktion

$$f|_{M_0}\colon f_0(x, g) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x, g), \qquad x \in M_0,\ g \in G.$$

Die Funktion f_0 erfüllt im Produkt $M_0 \times G$ die Fundamentalgleichung (1.4) und Identitätsbedingung (1.5). Das Tripel (M_0, G, f_0) bestimmt also eine neue Geometrie, wenn f_0 auf M_0 effektiv wirkt.

Definition 5.3. Die Geometrie (M_0, G, f_0) heißt *Teilgeometrie* von (2.1).

Ganz analog kann man ein abstraktes Teilobjekt für ein abstraktes Objekt der Geometrie (2.1) definieren.

6. Faktorobjekte und Faktorgeometrie. Es sei ein abstraktes Objekt

$$(\mathfrak{M}, G, F) \tag{6.1}$$

der Geometrie (2.1) gegeben. Es sei $\mathfrak{r}$ eine in $\mathfrak{M}$ definierte Relation.

Definition 6.1. Die Relation $\mathfrak{r}$ heißt *mit dem Objekt* (6.1) *verträglich*, wenn sie die Implikation

$$\underset{1}{\omega} \in \mathfrak{M},\ \underset{2}{\omega} \in \mathfrak{M}, \qquad \underset{1}{\omega}\,\mathfrak{r}\,\underset{2}{\omega} \Rightarrow F(\underset{1}{\omega}, g)\,\mathfrak{r}\,F(\underset{2}{\omega}, g), \tag{6.2}$$

erfüllt (vgl. [5]).

Satz 6.1. *Eine Äquivalenzrelation $\mathfrak{r}$ ist dann und nur dann mit dem Objekt* (6.1) *verträglich, wenn die Funktion F jede Äquivalenzklasse von $\mathfrak{r}$ wieder auf eine solche überführt.*

Mit Hilfe dieses Satzes kann jetzt ein neues geometrisches Objekt gebildet werden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $[\omega]$ die Äquivalenzklasse der Relation $\mathfrak{r}$, die ω enthält und mit $\mathfrak{M}/\mathfrak{r}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Dann definieren wir eine Funktion F_1: $\mathfrak{M}/\mathfrak{r} \times G \to \mathfrak{M}/\mathfrak{r}$ durch

$$F_1([\omega], g) \overset{\mathrm{df}}{=} [F(\omega, g)]. \tag{6.3}$$

Also erfüllt F_1 die Fundamentalgleichung (2.3) und die Identitätsbedingung (2.4). Das Tripel $(\mathfrak{M}/\mathfrak{r}, G, F_1)$ bestimmt daher ein neues abstraktes Objekt der Geometrie (2.1). Es wird *Faktorobjekt* von (6.1) hinsichtlich der Relation $\mathfrak{r}$ genannt (vgl. [5] und [6], Pseudoobjekt).

Im Abschnitt 2 haben wir gesehen, daß das Tripel (M, G, f) ein abstraktes Objekt der Geometrie (M, G, f) ist. Man kann also alle obigen Ergebnisse auf Punkte des Raumes M anwenden. Insbesondere bestimmt eine mit der Funktion $\bar{x} = f(x, a)$ verträgliche Relation $\mathfrak{r}$ in der Menge M eine neue Geometrie

$$(M_1, G, f_1), \tag{6.4}$$

wo $M_1 = M/\mathfrak{r}$ und $f_1([x], g) = [f(x, g)]$.

Definition 6.2. Die Geometrie (6.4) nennen wir *Faktorgeometrie*, die durch (2.1) und die Äquivalenzrelation $\mathfrak{r}$ bestimmt ist.

Für jedes abstrakte Objekt (6.1) gibt es wenigstens die folgenden veträglichen Äquivalenzrelationen:

$$\underset{1}{\omega}\mathfrak{r}\underset{2}{\omega} \Leftrightarrow \underset{1}{\omega} = \underset{2}{\omega}, \tag{6.5}$$

und

$$\bigwedge \underset{1}{\omega}, \underset{2}{\omega} \in \mathfrak{M} \quad \underset{1}{\omega}\mathfrak{r}\underset{2}{\omega}. \tag{6.6}$$

Wir werden sie *triviale Äquivalenzrelationen* nennen. Das Objekt (6.1) heißt *primitiv*, wenn es keine nichttriviale mit ihm verträgliche Äquivalenzrelation gibt. Andernfalls wird es *imprimitiv* genannt (vgl. [4], S. 30). Ganz analog kann man den Begriff der primitiven und imprimitiven Geometrie einführen.

Als Beispiele von Faktorobjekten können Richtung, Richtung mit einem Sinn, Orientierung u.s.w. dienen, (vgl. 2, S. 68-73). Sie spielen in jeder Geometrie eine wichtige Rolle.

7. Komitanten und verträgliche Äquivalenzrelationen. Das Problem alle Faktorobjekte für ein angegebenes Objekt zu bestimmen ist mit der Bestimmung aller verträglichen Äquivalenzrelationen äquivalent. Der nachstehende Satz zeigt, daß man das letzte Problem durch die Bestimmung aller Komitanten ersetzen kann.

SATZ 7.1. *Jede Komitante des abstrakten Objektes bestimmt eine mit ihm verträgliche Äquivalenzrelation und umgekehrt.*

Der Beweis ist in [6] enthalten.

Wir erwähnen einen Satz, der den Zusammenhang zwischen den verträglichen Äquivalenzrelationen und den Untergruppen von G zeigt. Zuerst müssen wir aber den Begriff einer stationären Untergruppe und eines transitiven Objektes einführen.

Das Objekt (6.1) heißt *transitiv*, wenn die Gruppe G auf $\mathfrak{M}$ transitiv wirkt, d.h. wenn es keine von $\mathfrak{M}$ verschiedene zulässige Teilmenge der Faser $\mathfrak{M}$ gibt.

Mit $\mathfrak{A}$ wird eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Die Menge aller Elemente der Gruppe G, die $\mathfrak{A}$ durch die Transformationsformel F auf sich abbilden, ist eine Untergruppe von G. Sie heißt *stationäre Untergruppe* für die Teilmenge $\mathfrak{A}$, $G(\omega, \mathfrak{A})$.

SATZ 7.2. *In der Faser $\mathfrak{M}$ eines transitiven abstrakten Objektes* (6.1) *gibt es dann und nur dann eine mit demselben verträgliche Äquivalenzrelation, wenn es eine Untergruppe H von G gibt, welche die stationäre Untergruppe $G(\omega, \omega_0)$ für einen Punkt $\omega_0 \in \mathfrak{M}$ enthält* (vgl. [6]).

Aus dem Satz 7.1 folgt, daß jede verträgliche Äquivalenzrelation, also auch jedes Faktorobjekt, durch entsprechende Komitante bestimmt werden kann. Komitante ist deswegen der wichtigste Begriff jeder Geometrie.

8. Schlußbemerkungen. Die oben dargestellten Betrachtungen betreffen offenbar die Geometrie im Sinne von F. Klein, die nur ein Teil der allgemeinen Geometrie ist. Als Beispiele solcher Geometrien können die von B. A. Rozenfeld und (E. J. Jasińska) untersuchten Räume mit projektiver Metrik („halbnichteuklidische Räume") dienen. Diese wurden verhaltismäßig tiefgehend jedoch mit anderen Mitteln erforscht. Ihrer Beschreibung vermöge der hier erörterten Begriffe wollen wir uns an einer anderen Stelle zuwenden.

LITERATURNACHWEIS

[1] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen 1872, Mathematische Annalen 43 (1893).

[2] M. Kucharzewski, *Elementy teorii obiektów geometrycznych* [*Elements of the theory of geometric objects*], Uniwersytet Śląski, Katowice 1969 [polnisch].

[3] — and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne 43, Warszawa 1964.

[4] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Москва 1969.

[5] E. Siwek, *Pseudoobjets géométriques*, Annales Polonici Mathematici 17 (1963), p. 209-218.

[6] — et A. Zajtz, *Contribution à la théorie des pseudoobjets géométriques*, ibidem 19 (1967), p. 185-192.

[7] A. Zajtz, *Algebraic objects*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego 167, Prace Matematyczne 12 (1968), p. 67-79.

[8] Е. У. Ясинская, *Полунеевклидовы пространства*, Московский Госсударственный Педагогический Институт, Москва 1963.

[9] — *Полуевклидовы и полунеевклидовы пространства*, Доклады Академии Наук СССР 137 (1961), p. 1327-1330.

[10] — *Метрические инварианты уравнений квадрик и пар плоскостей в полунеевклидовых пространствах*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу 12 (1963), p. 315-337.

Reçu par la Rédaction le 9. 11. 1971