COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 1

REMARQUES SUR L'UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY

PAR

J. CHABROWSKI (KATOWICE)

Il se trouvent établis dans la communication présente quelques théorèmes sur l'unicité du problème de Cauchy pour les équations paraboliques linéaires dans une classe de solutions non bornées. Ce problème sera envisagé d'abord pour les solutions au sens classique et ensuite pour les solutions généralisées. Les considérations sont basées sur les résultats d'Aronson et Besala (voir [2]).

1. Considérons l'équation parabolique linéaire

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \{a_{ij}(t,x)u\}_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} \{b_i(t,x)u\}_{x_i} + c(t,x)u - u_t = 0 \tag{1}$$

dont les coefficients avec ses dérivées intervenant dans (1) sont définis et mesurables dans une couche $H = (0, T] \times E_n$ (E_n étant l'espace euclidien à n dimensions) et bornés dans tout cylindre $(0, T] \times (|x| \leqslant R)$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_n)$.

Soit $B(s)$ une fonction de classe C^1 dans $[1, \infty)$ satisfaisant aux conditions qui suivent:

(a) $\sqrt{B(s)} > 0$ pour $s \geqslant 1$, (b) $\int_1^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}} = \infty$,

(c) $\sqrt{B(s)} \leqslant M_1 s \int_1^{s} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}$, (d) $\left|\frac{d}{ds}\sqrt{B(s)}\right| \leqslant M_2 \int_1^{s} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}$,

(e) il existe pour tout $a > 0$ une constante $M(a)$ telle que

$$s \exp\text{-}a \left[\int_1^{s} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 \leqslant M(a).$$

Le problème de Cauchy (au sens classique) rélatif à l'équation (1) et à la couche H consiste à chercher de cette équation une solution $u(t, x)$ régulière dans H (c'est-à-dire continue dans $\bar{H}$ et admettant des dérivées u_{x_i}, $u_{x_i x_i}$ pour $i, j = 1, \ldots, n$ et u_t continues dans H) et satisfaisant à la condition

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in E_n \tag{2}$$

où la fonction $\varphi(x)$ est donnée d'avance dans E_n.

Introduisons la notation $r_1 = r_1(x) = \{|x|^2+2\}^{1/2}$ qui interviendra dans la suite.

Théorème 1. *Admettons que*

1° *Les coefficients de l'équation* (1) *satisfont aux conditions*

$$|a_{ij}(t, x)| \leqslant K_1 B(r_1), \qquad |b_i(t, x)| \leqslant K_2 \sqrt{B(r_1)} \int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}$$

et

$$c(t, x) \leqslant K_3 \left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$ (K_1, K_2, K_3 *étant des constantes positives*).

2° *La forme quadratique* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i \xi_j$ *est semi-définie positive.*

3° *La fonction* $u(t, x)$ *est la solution du problème de Cauchy avec la condition initiale* $u(0, x) = 0$ *pour* $x \in E_n$ *et on a*

$$\int_H |u(t, x)| \exp\text{-}a \left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 dt dx < \infty \tag{3}$$

pour un certain a_0.

Alors on a $u(t, x) \equiv 0$ *dans* $\bar{H}$.

Démonstration. Posons

$$H_\delta = (0, \delta] \times E_n, \qquad \Phi(t, x) = \exp\text{-}(a+\beta t)\left[\int_1^{r_1(x)} \frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2$$

où $a > a_0$. Les constantes β et δ seront choisies convenablement tout à l'heure. Commençons par vérifier que la fonction $\Phi(t, x)$ satisfait aux conditions

$$\tilde{L}\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\Phi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\Phi_{x_i} + c(t, x)\Phi + \Phi_t \leqslant 0 \tag{4}$$

dans $\bar{H}_\delta$ et

$$\int_{H\delta} |u(t, x)| \Big\{\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t, x)\Phi_{x_j}| + \Phi(t, x)\big(\max_{i,j} |a_{ij}(t, x)| + \max_i |b_i(t, x)|\big)\Big\} dt dx < \infty. \tag{5}$$

En effet, on obtient par un calcul simple

$$\tilde{L}\Phi = \Phi \Big\{ -2(\alpha+\beta t)\frac{1}{r_1\sqrt{B}}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + 2(\alpha+\beta t)\times$$

$$\times\frac{1}{r_1^3\sqrt{B}}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2(\alpha+\beta t)\frac{1}{r_1^2 B}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{B(r_1)}\right)\times$$

$$\times\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - 2(\alpha+\beta t)\frac{1}{r_1^2 B}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j +$$

$$+4(\alpha+\beta t)^2\frac{1}{r_1^2 B}\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2(\alpha+\beta t)\frac{1}{r_1 B}\times$$

$$\times\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c - \beta\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\Big\}.$$

Vu que $r_1 \geqslant \sqrt{2}$, on peut admettre que $\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}} \geqslant 1$; il existe donc d'après l'hypothèse 1° et les propriétés (c) et (d) de la fonction $B(s)$ des constantes positives C_1, C_2 et C_3 telles que

$$\tilde{L}\Phi \leqslant \left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 \Phi\{C_1(\alpha+\beta t)^2 + C_2(\alpha+\beta t) + C_3 - \beta\} = \left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 \Phi Q_\beta(t).$$

Posons à présent $\beta = 2(C_1\alpha^2 + C_2\alpha + C_3)$; alors $Q_\beta(0) = -\beta/2$. Il est aisé de voir qu'il existe une constante $\delta = \delta(\alpha)$ telle que $Q_\beta(t) \leqslant -\beta/4$ pour $t \in [0, \delta]$. Pour démontrer l'inégalité (5), vérifions que

$$\int_{H_\delta} |u|\Big[\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}\Phi_{x_j}| + \Phi(\max a_{ij} + \max|b_i|)\Big]dtdx$$

$$\leqslant \int_{H_\delta} |u|\Big\{2K_1(\alpha+\beta t)\sqrt{B(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{r_1} + K_1B(r_1) +$$

$$+K_2\sqrt{B(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\Big\}\Phi\, dtdx$$

$$\leqslant \int_{H_\delta} |u|\Big\{2nK_1(\alpha+\beta\delta)\sqrt{B(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}} + K_1B(r_1) +$$

$$+K_2\sqrt{B(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\Big\}\Phi\, dtdx$$

$$\leqslant \int_{H_\delta} |u|\{2nK_1M_1(\alpha+\beta\delta)r_1 + K_1M_1^2r_1^2 + K_2M_1r_1\}\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 dtdx.$$

Puisque $a > a_0$ et $\beta > 0$, la propriété (e) de $B(s)$ et l'inégalité (3) impliquent que la dernière intégrale est convergente. Il résulte du théorème 2 de [2] que $u = 0$ dans H_δ, ce qui achève la démonstration du théorème 1 dans le cas de $\delta = T$. Si $\delta < T$, on n'a qu'à diviser la couche H à l'aide des plans $t = l\delta$ où $l = 1, \ldots, n_1$ et à établir de proche en proche l'égalité $u = 0$ dans les couches $(l\delta < t < (l+1)\delta) \times E_n$.

2. Passons à établir des théorèmes analogues pour les solutions généralisées du problème de Cauchy. Soit

$$\mathscr{L}u = u_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(t,x)u_{x_i}\right)_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} - a(t,x)u, \tag{6}$$

où $a_{ij}(t,x) = a_{ji}(t,x)$, l'opérateur parabolique en question. Admettons que les coefficients sont mesurables dans H et essentiellement bornés dans tout cylindre $[0,T]\times(|x| \leqslant R)$.

Une fonction $u = u(t,x)$ est dite *la solution faible du problème de Cauchy* $\mathscr{L}u = f$, $u(0,x) = \Psi(x)$ (voir [1]), lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

(i) u est mesurable dans $\bar{H}$ et telle que

$$\max_{[0,T]} \int_{\Omega} u^2(t,x)\,dx < \infty$$

pour toute boule ouverte $\Omega \subset E_n$.

(ii) u possède les dérivées fortes par rapport à x dans H, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions u_{x_j} où $j = 1, \ldots, n$ telles que l'on a $u_{x_j} \in L^1(\Omega \times (0,T))$ pour toute boule ouverte $\Omega \subset E_n$ et

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} u\varphi_{x_j}\,dx = -\int_0^T dt \int_{\Omega} u_{x_j}\varphi\,dx$$

pour les fonctions $\varphi = \varphi(t,x)$ de classe $C^1(\bar{H})$ et aux supports bornés dans E_n,

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2\,dx < \infty, \tag{iii}$$

$$\int_{E_n} u(t,x)\theta(t,x)\,dx + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Big(-u\theta_\tau + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}\theta_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}\theta - au\theta\Big)\,dx \tag{iv}$$
$$= \int_{E_n} \psi(x)\theta(0,x)\,dx + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \theta f\,dx$$

pour tous $t \in [0,T]$ et $\theta \in C^1(\bar{H})$ aux supports bornés dans E_n.

Les fonctions Ψ et f sont données d'avance, mesurables et essentiellement bornées dans toute boule $(|x| \leqslant R)$ et dans tout cylindre $(0,T)\times$ $\times(|x| \leqslant R)$ respectivement.

Introduisons la désignation $\boldsymbol{a}^T = (a_1, \ldots, a_n)$ et dénotons par A^{-1} la matrice inverse de $A = \{a_{ij}\}$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j$ *une forme quadratique définie positive presque partout dans* $\bar{H}$ *et telle que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leqslant K_1|\xi|^2 B(r_1),$$

$$\boldsymbol{a}^T(i, x)A^{-1}(t, x)\boldsymbol{a}(t, x) + a(t, x) \leqslant K_2\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2$$

presque partout dans $\bar{H}$ *et pour tout vecteur* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E_n$ *(*K_1 *et* K_2 *étant des constantes positives). Soit* u *la solution faible du problème de Cauchy* $\mathscr{L}_u = 0$, $u(0, x) = 0$ *assujettie pour un certain* $a_0 > 0$ *à l'inégalité*

$$\int_0^T dt \int_{E_n} u^2(t, x)\exp -2a_0\left[\int_1^{r_1(x)}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 dx < \infty. \tag{7}$$

Alors on a $u(t, x) \equiv 0$ *dans* $\bar{H}$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$\Phi(t, x) = \exp\left\{-(a + \frac{\beta}{2}t)\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\right\}$$

où $a > a_0$. On peut choisir les nombres positifs β et δ de façon à avoir

$$\mathscr{L}_\varepsilon\Phi \tag{8}$$

$$= |A|\left\{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} - \sum_{i=1}^{n}\Phi a_i\Phi_{x_i} + (1-\varepsilon)(a\Phi^2 + \Phi\Phi_t) + \frac{\Phi}{4}\,\boldsymbol{a}^T A^{-1}\boldsymbol{a}\right\} \leqslant 0$$

dans H_δ pour un certain $\varepsilon \in (0, 1)$ et

$$\int_0^\delta dt \int_{E_n} u^2\Phi^2 \max_{|\xi|=1}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j\Big)dx < \infty, \tag{9}$$

où $|A|$ désigne le déterminant de la matrice $\{a_{ij}\}$.

Prenons dans ce but $\varepsilon = \frac{1}{3}$. D'après l'inégalité

$$\left|\sum_{i=n}^{n} a_i\Phi_{x_i}\Phi\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} + \frac{\Phi^2}{4}\,\boldsymbol{a}^T A^{-1}\boldsymbol{a},$$

on a alors

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{3}}\Phi \leqslant \frac{2}{3}|A|\left\{3\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} + \Phi^2\frac{3}{4}\boldsymbol{a}^T A^{-1}\boldsymbol{a} + a\right\} + \Phi\Phi_t = \frac{2}{3}|A|\hat{\mathscr{L}}\Phi$$

et il est aisé de voir que

$$\hat{\mathscr{L}}\Phi = \left\{6\left(a+\frac{\beta}{2}t\right)^2\frac{1}{r_1^2 B}\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+\left(\frac{3}{4}\mathbf{a}^TA^{-1}\mathbf{a}+a\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{2}\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\right\}\Phi^2$$

$$\leqslant\left\{6\left(a+\frac{\beta}{2}t\right)^2K_1+K_2-\frac{\beta}{2}\right\}\Phi^2\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2 = \Phi^2\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\bar{Q}_\beta(t).$$

Posons $\beta = 4(6a^2K_1+K_2)$; on a alors $\bar{Q}_\beta(0) = -\beta/4$. Il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que $\bar{Q}_\beta(t) \leqslant -\beta/2$ dans $[0, \delta]$. Puisque $a > a_0$ et $\beta > 0$, il résulte de l'inégalité (7) que la relation (9) est satisfaite. En vertu d'un théorème d'Aronson et Besala (voir [2], théorème 5), on a $u \equiv 0$ dans $[0, \delta]\times E_n$.

THÉORÈME 3. *Admettons les quatre hypothèses qui suivent:*

1° *La forme quadratique* $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j$ *est semi-définie positive.*

2° *Les dérivées* $\partial a_i/\partial x_i$ *où* $i = 1, \ldots, n$ *sont définies presque partout dans* $\bar{H}$.

3° *Les coefficients de l'opérateur* (6) *sont assujettis aux conditions*

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j\leqslant K_1|\xi|^2B(r_1),\qquad |a_i(t, x)| \leqslant K_2\sqrt{B(r_1)}\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}},\tag{10}$$

$$a(t, x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(t, x)}{\partial x_i}\leqslant K_3\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2$$

presque partout dans $\bar{H}$ *et pour tout vecteur* $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in E_n$ (K_1, K_2 *et* K_3 *étant des constantes positives*).

4° *La solution faible* $u(t, x)$ *du problème de Cauchy* $\mathscr{L}u = 0$, $u(0, x) = 0$ *satisfaisant à l'inégalité* (7) *est essentiellement bornée dans chaque sous--ensemble compact de* H.

Alors on a $u \equiv 0$ *dans* $\bar{H}$.

Démonstration. D'une façon analogue à celle de la démonstration du théorème 2, on peut vérifier que la fonction

$$\Phi(t, x) = \exp\left\{-\left(a+\frac{\beta}{2}t\right)\left[\int_1^{r_1}\frac{ds}{\sqrt{B(s)}}\right]^2\right\}$$

satisfait aux conditions

$$\mathscr{L}_\varepsilon^*\Phi = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j}+(1-\varepsilon)\left\{\left[a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right]\Phi^2-\Phi\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_{x_i}+\Phi\Phi_t\right\}\leqslant 0$$

pour un certain $\varepsilon\epsilon(0,1)$ dans H_δ et que

$$\int_0^\delta dt \int_{E_n} u^2 \Phi^2 \Big(\max_{|\xi|=1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j + \max_i |a_i|\Big) dtdx < \infty$$

où β et δ sont des constantes positives convenablement choisies. Ceci fait, le théorème 5 du travail [2] implique la thèse à démontrer.

TRAVAUX CITÉS

[1] D. G. Aronson, *Uniqueness of positive weak solutions of parabolic equations*, Annales Polonici Mathematici 16 (1965), p. 285–303.

[2] — and P. Besala, *Uniqueness of solutions of the Cauchy Problem for parabolic equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 13 (1966), p. 516–526.

Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1958