COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XLII DÉDIÉ À LA MÉMOIRE D'EDWARD MARCZEWSKI 1979

КОНЕЧНАЯ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА ТОЧНЫХ МОДУЛЕЙ

Л. А. СКОРНЯКОВ (МОСКВА)

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Следующие свойства кольца R (ассоциативного с единицей) эквивалентны:*

(1) *Класс всех точных унитарных левых R-модулей конечно аксиоматизируем.*

(2) *R содержит такое конечное множество $\mathfrak{F}$, что унитарный левый R-модуль M точен, если для каждого $\lambda \in \mathfrak{F}$ найдётся $x \in M$ такой, что $\lambda x \neq 0$.*

(3) *R содержит конечное множество $\mathfrak{H}$ ненулевых элементов, имеющее непустое пересечение с каждым ненулевым двусторонним идеалом кольца R.*

(4) *R содержит конечную систему $\mathfrak{I}$ минимальных двусторонних идеалов такую, что каждый ненулевой двусторонний идеал из R содержит хотя бы один идеал из $\mathfrak{I}$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть класс T всех точных левых R-модулей описывается конечной системой аксиом $\mathfrak{A}$. С другой стороны, класс T описывается системой аксиом

$$\mathfrak{A}_\lambda = \big(\exists x(\lambda x \neq 0)\big), \qquad 0 \neq \lambda \in R.$$

Очевидно, аксиомы системы $\mathfrak{A}$ могут быть выведены из системы $\{\mathfrak{A}_\lambda\}$ с использованием лишь конечного множества входящих в неё аксиом, скажем, $\mathfrak{A}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{\lambda_m}$. Остаётся положить $\mathfrak{F} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть I — ненулевой идеал кольца R. Если $I \cap \mathfrak{F} = \emptyset$, то $\lambda(1+I) \neq 0+I$ для каждого $\lambda \in \mathfrak{F}$. Ввиду (2), левый R-модуль R/I точен, хотя его аннулятор содержит I. Остаётся положить $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть $\mathfrak{H} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ и $I_i = R\lambda_i R$. Если $I_i \subseteq I_j$, где $i \neq j$, то, очевидно, система $\mathfrak{H}$ сохранит своё свойство, если из неё удалить λ_j. Поэтому можно считать, что идеалы I_i попарно не сравнимы. Если теперь $0 \neq I \subseteq I_i$, где I — идеал кольца R, то $\lambda_i \in I$, откуда

$I = I_i$. Следовательно, I_i — минимальные идеалы и можно положить $\mathfrak{I} = \{I_1, \ldots, I_m\}$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Нужное множество $\mathfrak{H}$ можно получить, взяв по отличному от нуля элементу в каждом из идеалов системы $\mathfrak{I}$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что для левого R-модуля M истинны все высказывания

$$\big(\exists x(\lambda x \neq 0)\big), \qquad \lambda \in \mathfrak{H}.$$

Если M не точен, то $I = (0 : M) \neq 0$ и, следовательно, существует $\lambda \in I \cap \mathfrak{H}$. Но тогда $\lambda x = 0$ для всех $x \in M$, что невозможно. Остаётся положить $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) тривиальна.

Автор благодарен В. Т. Маркову, А. Ю. Ольшанскому и М. Я. Финкельштейну за полезные замечания, способствовавшие улучшению настоящей заметки.

Reçu par la Rédaction le 16. 2. 1978