COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

UNE REMARQUE SUR LES SOLUTIONS ANALYTIQUES D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

PAR

M. KUCZMA (KATOWICE)

1. Considérons l'équation fonctionnelle

$$\varphi[f(x)] = g[\varphi(x)] \tag{1}$$

où la fonction $\varphi(x)$ est inconnue, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont analytiques autour de l'origine et s'y annulent. Toutes ces fonctions sont complexes d'une variable complexe. Admettons en outre que $f(x)$ a à l'origine un zéro d'ordre supérieur:

$$f(x) = \sum_{n=p}^{\infty} b_n x^n \quad \text{où} \quad b_p \neq 0 \text{ et } p > 1. \tag{2}$$

Cette communication a pour but de chercher les solutions $\varphi(x)$ de l'équation (1), analytiques dans un voisinage de l'origine et ayant zéro comme leur point double [1]:

$$\varphi(x) = \sum_{n=r}^{\infty} c_n x^n \quad \text{où} \quad c_r \neq 0 \text{ et } r \geqslant 1. \tag{3}$$

Le théorème de M$^{\text{me}}$ Smajdor [6] (cf. aussi Read [5]) concernant l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) = h\big(x, \varphi[f(x)]\big), \tag{4}$$

bien qu'assez général, ne peut s'appliquer dans notre cas. En effet, soit

$$g(y) = \sum_{n=q}^{\infty} a_n y^n \quad \text{où} \quad a_q \neq 0 \text{ et } q \geqslant 1 \tag{5}$$

et supposons que l'équation (1) ait une solution de la forme (3). En substituant dans (1) les membres droits de (2), (3) et (5) et en comparant

[1] Un point ξ s'appelle *point double* de la fonction $F(x)$ lorsque $F(\xi) = \xi$. Le nombre $F'(\xi)$ est appelé le *multiplicateur*; voir p. ex. [3].

le degré du premier terme des deux membres de (1), on constate que $q = p$, ce qui est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution de la forme (3) de l'équation (1). L'égalité (5) devient

$$g(y) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n y^n \quad \text{où} \quad a_p \neq 0, \tag{6}$$

ce qui montre que l'équation (1) ne peut pas être mise sous la forme (4).

Il sera démontré toutefois, que l'on peut tourner cette difficulté en introduisant une nouvelle fonction inconnue qui tout en satisfaisant à une équation fonctionnelle équivalente à (1), se laisse réduire à la forme (4). Il sera établi en outre que les fonctions $f(x)$ et $g(y)$ étant de la forme (2) et (6) respectivement, l'équation (1) a une famille à $p-1$ paramètres des solutions analytiques de la forme (3).

2. Théorème 1. *Soient $f(x)$ et $g(y)$ deux fonctions analytiques à l'origine, aux développements* (2) *et* (6) *respectivement, valables pour* $|x| < R_1$ *et* $|y| < R_2$. *Alors, pour tout entier positif r et pour chaque racine c_r de l'équation*

$$b_p^{-r} a_p c_r^p = c_r, \tag{7}$$

il existe exactement une solution $\varphi(x)$ de l'équation (1) *qui est analytique dans un voisinage de l'origine et qui satisfait à la condition*

$$\varphi(0) = \ldots = \varphi^{(r-1)}(0) = 0, \qquad \varphi^{(r)}(0) = r! c_r. \tag{8}$$

Démonstration. Si $\varphi(x)$ est une solution de la forme (3) de l'équation (1), le coefficient c_r doit satisfaire à (7), ce qui résulte immédiatement de la substitution des membres droits de (2), (3) et (6) dans (1).

Fixons le nombre r et le coefficient c_r satisfaisant à l'équation (7). Si $\varphi(x)$ est une solution de (1) satisfaisant aux conditions (8), la fonction

$$\psi(x) = x^{-r}\varphi(x) \tag{9}$$

est une solution analytique à l'origine de l'équation

$$\psi[f(x)] = G\big(x, \psi(x)\big) \tag{10}$$

où

$$G(x, y) = [f(x)]^{-r} g(x^r y), \tag{11}$$

et réciproquement. La fonction (9) satisfait à la condition

$$\psi(0) = c_r \neq 0. \tag{12}$$

L'existence d'une solution analytique $\varphi(x)$ de (1) assujettie à (8) équivaut donc à celle d'une solution analytique $\psi(x)$ de (10) satisfaisant à (12). On peut par conséquent se borner à l'étude de l'équation (10). Posons

$$f(x) = x^p F(x). \tag{13}$$

$F(x)$ est une fonction analytique pour $|x| < R_1$ et

(14) $$F(0) = b_p \neq 0.$$

Sans restreindre la généralité, on peut admettre que $F(x) \neq 0$ pour $|x| < R_1$ (car, en cas contraire, on n'aurait qu'à remplacer R_1 par une constante plus petite). Il s'ensuit de (11), (13) et (6) que

$$G(x, y) = [F(x)]^{-r} \sum_{n=p}^{\infty} a_n x^{r(n-p)} y^n.$$

$G(x, y)$ est une fonction de deux variables complexes, analytique au moins dans le domaine-bicercle

$$|x| < R_3, \qquad |y| < 2|c_r|, \qquad R_3 = \min(R_1, [\tfrac{1}{2}R_2|c_r|^{-1}]^{1/r}).$$

Il s'ensuit de (7) et (14)

(15) $$G(0, c_r) = b_p^{-r} a_p c_r^p = c_r.$$

Or

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0, c_r) = b_p^{-r} p a_p c_r^{p-1} = p \neq 0.$$

Il existe donc une fonction $H(x, z)$, analytique dans un domaine

(16) $$|x| < R_0, \qquad |z - c_r| < R_0$$

et telle que pour $|x| < R_0$, $|z - c_r| < R_0$ et $|y - c_r| < R_0'$ (où $R_0 < R_3$ et $R_0' < |c_r|$) les égalités $z = G(x, y)$ et $y = H(x, z)$ sont équivalentes. Il suffit par conséquent d'établir l'existence d'une solution unique $\psi(x)$ de l'équation

(17) $$\psi(x) = H\big(x, \psi[f(x)]\big),$$

analytique dans un voisinage de l'origine et satisfaisant à la condition (12). C'est-ce qui va être fait à présent.

3. Soit [2] $H(x, z)$ une fonction analytique dans le domaine (16) et telle que

(18) $$H(0, c_r) = c_r$$

(l'égalité (18) résultant de (15)). Posons

$$d = H_x'(0, c_r).$$

---

[2] Cette partie de la démonstration reste valable pour une équation quelconque de la forme (17) avec une fonction $H(x, z)$ arbitraire assujettie aux conditions formulées dans le § 2.

La fonction $H'_x(x, z)+H'_z(x, z)wf'(x)$ étant analytique pour $|x| < R_0$ et $|z-c_r| < R_0$, et pour w arbitraire, il existe, pour un nombre positif $K < R_0$ fixé, des nombres positifs L et M tels que

$$(19) \qquad |H'_x(x, z_1)+H'_z(x, z_1)w_1f'(x)-H'_x(x, z_2)-H'_z(x, z_2)w_2f'(x)| \leqslant L|z_1-z_2|+M|w_1-w_2|$$

pour $|x| \leqslant K$, $|z_1-c_r| \leqslant K$, $|z_2-c_r| \leqslant K$, $|w_1-d| \leqslant K$ et $|w_2-d| \leqslant K$. De plus, comme $f'(0) = 0$, on peut admettre que

$$(20) \qquad M < \tfrac{1}{2}$$

pourvu que la constante K ait été choisie suffisamment petite. On peut admettre également que

$$(21) \qquad L > 1.$$

Maintenant, on peut trouver un nombre $\sigma > 0$ tel que

$$(22) \qquad |f(x)| \leqslant |x| \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \sigma$$

et que

$$(23) \qquad |H'_x(x, c_r)-d|+|H'_z(x, c_r)df'(x)| \leqslant \tfrac{1}{4}K \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \sigma.$$

Fixons un $\varrho > 0$ tel que

$$(24) \qquad \varrho \leqslant \min\left(K, \sigma, \frac{1}{4L}\frac{K}{K+|d|}\right)$$

et considérons la famille $\mathscr{F}$ de fonctions $\psi(x)$ ayant les propriétés suivantes:

1° $\psi(x)$ est analytique pour $|x| < \varrho$,

2° $\psi'(x)$ est continue pour $|x| \leqslant \varrho$,

3° on a

$$(25) \qquad \psi(0) = c_r, \quad \psi'(0) = d,$$

$$(26) \qquad |\psi'(x)-d| \leqslant K \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \varrho.$$

La famille $\mathscr{F}$ n'est pas vide: elle a pour élément au moins la fonction linéaire $\psi(x) = c_r+dx$.

Formons à présent une suite d'approximations successives. Prenons pour $\psi_0(x)$ une fonction arbitraire de $\mathscr{F}$ et posons

$$\psi_{n+1}(x) = H\big(x, \psi_n[f(x)]\big).$$

Nous allons montrer que tous les fonctions $\psi_n(x)$ appartiennent à $\mathscr{F}$e t convergent uniformement pour $|x| < \varrho$ vers une fonction qui est évidemment une solution analytique de l'équation (17) satisfaisant à (12).

Admettons que la fonction $\psi(x)$ appartient à la classe $\mathcal{F}$. On a

$$\psi(x)-c_r-dx = x\int_0^1 [\psi'(tx)-d]dt,$$

d'où

$$|\psi(x)-c_r-dx| \leqslant \varrho K \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \varrho,$$

donc, pour $|x| \leqslant \varrho$

$$|\psi(x)-c_r| \leqslant |\psi(x)-c_r-dx|+|dx| \leqslant \varrho(K+|d|) \tag{27}$$

et en vertu de (24), vu que $L > 1$,

$$|\psi(x)-c_r| \leqslant K < R_0.$$

En tenant compte de (22), la fonction $H(x, \psi[f(x)])$ est par conséquent analytique pour $|x| < \varrho$ et on a $H(0, \psi[f(0)]) = H(0, c_r) = c_r$ d'après (18). Aussi la fonction

$$\frac{d}{dx} H(x, \psi[f(x)]) = H'_x(x, \psi[f(x)])+H'_z(x, \psi[f(x)])\psi'[f(x)]f'(x)$$

est continue pour $|x| \leqslant \varrho$ et elle prend pour $x = 0$ la valeur $H'_x(0, c_r) = d$. Ensuite, on conclut de (19) et (23) que

$$\left|\frac{d}{dx} H(x, \psi[f(x)])-d\right|$$

$$\leqslant |H'_x(x, \psi[f(x)])+H'_z(x, \psi[f(x)])\psi'[f(x)]f'(x)-H'_x(x, c_r)-H'_z(x, c_r)df'(x)|+$$

$$+|H'_x(x, c_r)+H'_z(x, c_r)df'(x)-d| \leqslant L|\psi[f(x)]-c_r|+M|\psi'[f(x)]-d|+\tfrac{1}{4}K,$$

d'où, en appliquant successivement (22), (27), (20), (26) et (24),

$$\left|\frac{d}{dx} H(x, \psi[f(x)])-d\right| \leqslant L\varrho(K+|d|)+\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{4}K \leqslant K,$$

ce qui montre que la fonction $H(x, \psi[f(x)])$ appartient à $\mathcal{F}$. Il est ainsi démontré que les fonctions $\psi_n(x)$ appartiennent à $\mathcal{F}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Au lieu d'établir la convergence de la suite $\{\psi_n(x)\}$ il suffit de montrer que la suite de ses dérivées converge uniformément dans $|x| \leqslant \varrho$, ce qui se réduit à montrer [3] que si $\alpha \in \mathcal{F}$ et $\beta \in \mathcal{F}$, on a

$$\left|\frac{d}{dx}[H(x, \alpha[f(x)])-H(x, \beta[f(x)])]\right| \tag{28}$$

$$\leqslant \tfrac{3}{4} \sup_{|x|\leqslant\varrho} |\alpha'(x)-\beta'(x)| \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant \varrho.$$

---

[3] Cette méthode n'est qu'une application du principe du point fixe de Banach dans l'espace $\mathcal{F}$ avec métrique $\sup\limits_{|x|\leqslant\varrho} |\alpha'(x)-\beta'(x)|$.

Or on a en effet d'après (19)

$$\left|\frac{d}{dx}H\big(x,\alpha[f(x)]\big)-H\big(x,\beta[f(x)]\big)\right|$$

$$= \big|H'_x\big(x,\alpha[f(x)]\big)+H'_z\big(x,\alpha[f(x)]\big)\alpha'[f(x)]f'(x)-H'_x\big(x,\beta[f(x)]\big)-$$

$$-H'_z\big(x,\beta[f(x)]\big)\beta'[f(x)]f'(x)\big|$$

$$\leqslant L|\alpha[f(x)]-\beta[f(x)]|+M|\alpha'[f(x)]-\beta'[f(x)]|$$

et comme, pour $|x|\leqslant\varrho$,

$$|\alpha[f(x)]-\beta[f(x)]|\leqslant \varrho\sup_{|x|\leqslant\varrho}|\alpha'(x)-\beta'(x)|,$$

$$|\alpha'[f(x)]-\beta'[f(x)]|\leqslant \sup_{|x|\leqslant\varrho}|\alpha'(x)-\beta'(x)|,$$

il vient

$$\left|\frac{d}{dx}\big[H\big(x,\alpha[f(x)]\big)-H\big(x,\beta[f(x)]\big)\big]\right|\leqslant(L\varrho+M)\sup_{|x|\leqslant\varrho}|\alpha'(x)-\beta'(x)|.$$

Il en résulte (28) en vertu de (20), (21) et (24).

L'unicité de la solution trouvée $\psi(x)$ résulte de (28) et du fait que toute solution analytique $\psi(x)$ satisfaisant à (12) de l'équation (17) appartient à $\mathscr{F}$, pourvu que ϱ ait été choisi suffisament petit. La fonction

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)$$

est alors une solution analytique locale de l'équation (10) et satisfait à la condition (12). La fonction $\varphi(x)=x^r\psi(x)$ est la solution cherchée de l'équation (1). L'unicité de φ résulte de celle de ψ.

4. Les résultats qui précèdent permettent de tirer quelques conséquences concernant la conjugaison des fonctions à multiplicateur zéro. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions analytiques dans un voisinage de l' origine supposée leur point double commun: $f(0)=g(0)=0$. Convenons de dire que f et g sont *conjuguées-$\mathscr{A}$* (c'est-à-dire conjuguées dans la classe $\mathscr{A}$ de fonctions analytiques) au point $x=0$ lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x)$ analytique en ce point, telle que $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)\neq 0$ et que l'on ait

$$f(x)=\varphi^{-1}\big(g[\varphi(x)]\big)$$

au voisinage de l'origine. Le théorème suivant est une conséquence du théorème 1:

THÉORÈME 2. *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions analytiques à l'origine et telles que $f(0)=g(0)=0=f'(0)=g'(0)$. Pour que f et g soient con-*

juguées-$\mathscr{A}$ dans 0, il faut et il suffit que $f(x)$ et $g(x)$ aient à l'origine un zéro du même ordre.

Dans le cas où $0 < |f'(0)| < 1$ et $0 < |g'(0)| < 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient conjuguées-$\mathscr{A}$ est que

$$f'(0) = g'(0).$$

La nécessite en résulte par exemple de (7) (pour $p = r = 1$) et la suffisance s'ensuit de la transitivité de la conjugaison-$\mathscr{A}$ en vertu du résultat classique de Koenigs [2] (voir aussi Kneser [1]) d'après lequel la fonction $f(x)$ telle que $0 < |f'(0)| < 1$ est conjuguée-$\mathscr{A}$ avec la fonction $g(x) = f'(0)x$.

Le cas où $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$ est plus difficile. Pour des résultats partiels, voir Muckenhoupt [4].

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Kneser, *Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen*, Journal für reine und angewandte Mathematik 187 (1950), p. 56-67.

[2] G. Koenigs, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3) 1 (1884), Supplément, p. 3-41.

[3] P. Montel, *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Paris 1957.

[4] B. Muckenhoupt, *Some results on analytic iteration and conjugacy*, American Journal of Mathematics 84 (1962), p. 161-169.

[5] A. H. Read, *The solution of a functional equation*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Sectio A 63 (1952), p. 336-345.

[6] W. Smajdor, *On the existence and uniqueness of analytic solutions of the functional equation $h(z, \varphi[f(z)]) = \varphi(z)$*, Annales Polonici Mathematici (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 11. 11. 1965