COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVIII 1990 FASC. 2

DÉCOMPOSITION DES MESURES SELON LA DIMENSION

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE (ORSAY) ET YITZHAK KATZNELSON (JERUSALEM)

Soit T un compact métrique (on peut, en pratique, penser à une partie compacte de $\mathscr{R}^n$) et $M^+(T)$ le cône constitué par les mesures de Radon positives sur T. Pour tout $\alpha > 0$, nous allons définir les mesures α-singulières et les mesures α-régulières, et montrer que toute mesure se décompose de manière unique en somme de sa partie α-singulière et de sa partie α-régulière. C'est l'objet du théorème I.

La partie α-singulière croît avec α. Si on la dérive par rapport à sa masse totale $\nu(\alpha)$ (fonction croissante de α), on obtient une probabilité μ_α. Les μ_α permettent de désintégrer la mesure donnée σ sous la forme $\int \mu_\alpha d\nu(\alpha)$. La mesure $d\nu$ $(\in M^+([0, \infty]))$ s'appelle le *spectre de dimension de* σ. Cette désintégration, et les propriétés dimensionnelles des μ_α, font l'objet des théorèmes II.1 et II.2.

Les μ_α ont, à leur tour, un spectre de dimension, toujours porté par l'intervalle fermé $[0, \alpha]$. L'exemple 1 montre qu'il peut être porté par 0 quel que soit α, l'exemple 2 qu'il peut être porté par α quel que soit α, l'exemple 3 indique des situations intermédiaires. La situation est donc beaucoup plus complexe que ne le disait la note [1], qui a fait l'objet d'un erratum rectificatif [2] après que Jacques Peyrière ait signalé une lacune dans les démonstrations, et qu'Y. Katznelson, en réponse à J.-P. Kahane, ait produit l'exemple 1.

I. Mesures α-singulières et α-regulières, et décomposition. Etant donné $\sigma \in M^+(T)$ et $\alpha > 0$, le *potentiel d'ordre* α de σ est la fonction

$$U_\alpha^\sigma = \int (\operatorname{dist}(t, s))^{-\alpha} d\sigma(s)$$

et *l'énergie* correspondante est

$$I_\alpha^\sigma = \int U_\alpha^\sigma(t)\, d\sigma(t) = \iint (\operatorname{dist}(t, s))^{-\alpha} d\sigma(t)\, d\sigma(s).$$

On dira que σ est *α-singulière*, et on écrira $\sigma \in \mathscr{S}_\alpha$, si $U_\alpha^\sigma(t) = \infty$ pour σ-presque tout t. On dira que σ est *α-régulière*, et on écrira $\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$, si σ est une somme dénombrable de mesures d'énergie (d'ordre α) finie. Quand α croît, $\mathscr{S}_\alpha$ croît et $\mathscr{R}_\alpha$ décroît. Remarquons que

$$(1) \qquad (U_\alpha^\sigma(\cdot) < \infty \;\; \sigma\text{-p.p.}) \Rightarrow (\sigma \in \mathscr{R}_\alpha)$$

(car $\sigma = \sum \sigma 1_{A_n}$, avec $A_n = \{t\colon\, n \leqslant U_\alpha^\sigma(t) < n+1\}$, $n \in \mathscr{N}$).

On dit qu'un borélien A dans T est de *α-capacité nulle*, et on écrit $\mathrm{Cap}_\alpha A = 0$, si $\sigma(A) = 0$ lorsque $\sigma \in \mathscr{R}_\alpha$. Désignons par $M^+(A)$ le cône dans $M^+(T)$ constitué par les mesures σ telles que $\sigma(A) = \sigma(T)$. Remarquons que

$$\mathrm{Cap}_\alpha A = 0 \Rightarrow M^+(A) \subset \mathscr{S}_\alpha. \tag{2}$$

En effet, si $\sigma \in M^+(A)$ et $\sigma \notin \mathscr{S}_\alpha$, la restriction τ de σ à l'ensemble $\{t\colon U_\alpha^\sigma(t) < \infty\}$ vérifie $\tau \neq 0$, $\tau \in M^+(A)$, $U_\alpha^\tau(\cdot) < \infty$ τ-p.p., donc (d'après (1)) $\tau \in \mathscr{R}_\alpha$, et par conséquent l'hypothèse de (2) est contredite.

THÉORÈME I. (1) *admet une réciproque*: *$\mathscr{R}_\alpha$ est l'ensemble des mesures σ dont le α-potentiel est fini σ-p.p.* (2) *admet une réciproque*: *$\mathscr{S}_\alpha$ est l'ensemble des mesures concentrées sur des boréliens de α-capacité nulle. Le cône $M^+(T)$ est la somme directe des cônes disjoints $\mathscr{S}_\alpha$ et $\mathscr{R}_\alpha$*:

$$M^+(T) = \mathscr{S}_\alpha \oplus \mathscr{R}_\alpha. \tag{3}$$

Autrement dit, toute mesure $\sigma \in M^+(T)$ se décompose de façon unique comme somme d'une partie α-singulière σ_α et d'une partie α-régulière $\sigma - \sigma_\alpha$.

La preuve du théorème se déroule ainsi.

LEMME 1. *Soit A une partie compacte de T. Si $\varrho \in M^+(A)$, on a*

$$\sup_{t \in T} U_\alpha^\varrho(t) \leqslant 2^\alpha \sup_{t \in A} U_\alpha^\varrho(t).$$

Preuve. Etant donné $t \in T$, soit a un point de A à distance minimum de t. La remarque

$$\mathrm{dist}(t, s) \geqslant \mathrm{dist}(t, a) \Rightarrow \mathrm{dist}(a, s) \leqslant 2\mathrm{dist}(t, s)$$

et la définition de $U_\alpha^\varrho(\cdot)$ donnent la conclusion.

LEMME 2. *Si $0 < I_\alpha^\tau < \infty$, il existe $\varrho \leqslant \tau$, $\varrho \neq 0$, tel que le potentiel $U_\alpha^\varrho(\cdot)$ est borné sur T.*

Preuve. Suivant l'hypothèse et la définition de I_α^τ, il existe un compact A dans T tel que $\tau(A) < 0$ et $U_\alpha^\tau(\cdot)$ est borné sur A. Posons $\varrho = \varrho 1_A$. Alors $\varrho \leqslant \tau$, $\varrho \neq 0$, $U_\alpha^\varrho(\cdot)$ ($\leqslant U_\alpha^\tau(\cdot)$) est borné sur A, donc (lemme 1) partout.

LEMME 3. *Posons $S = S(\alpha, \sigma) = \{t\colon U_\alpha^\sigma(t) = \infty\}$. On a* $\mathrm{Cap}_\alpha S = 0$.

Preuve. Si $\mathrm{Cap}_\alpha S \neq 0$, il existe $\tau \in M^+(S)$ tel que $0 < I_\alpha^\tau < \infty$. Le lemme 2 donne une $\varrho \in M^+(S)$, non nulle, à potentiel borné, et la formule

$$\infty = \int U_\alpha^\sigma \, d\varrho = \int U_\alpha^\varrho \, d\sigma < \infty$$

établit la contradiction.

LEMME 4. *Posons $\sigma_\alpha = \sigma 1_{S(\alpha,\sigma)}$. Alors σ_α est α-singulière et $\sigma - \sigma_\alpha$ est α-régulière.*

Preuve. Le lemme 3, avec (2), montre que $\sigma_\alpha \in \mathscr{S}_\alpha$, et (1) montre que $\sigma - \sigma_\alpha \in \mathscr{R}_\alpha$.

LEMME 5. $\mathscr{S}_\alpha \cap \mathscr{R}_\alpha = \{0\}$.

Preuve. Supposons $\sigma \in \mathscr{S}_\alpha$. Appliquons le lemme 3: σ est concentrée sur S (($= S(\alpha, \sigma)$) et, d'après le lemme 3, $\mathrm{Cap}_\alpha S = 0$. Si de plus $\sigma \in \mathscr{R}_\alpha$, on a $\sigma(S) = 0$ d'après la définition de la capacité. Donc $\sigma = 0$.

Le lemme 3 donne la réciproque de (2), le lemme 4 et le lemme 5 donnent la conclusion du théorème et la réciproque de (1).

II. Spectre de dimension, et désintégration. Soit de nouveau $\sigma \in M^+(T)$, et σ_α sa partie α-singulière ($0 < \alpha < \infty$). Posons

$$\nu(0) = 0, \qquad \nu(\alpha) = \sigma_\alpha(T) \ (0 < \alpha < \infty), \qquad \nu(\infty) = \sigma(T).$$

La fonction $\nu(\cdot)$ est croissante sur $[0, \infty]$. Elle définit une mesure positive sur $[0, \infty]$, que nous désignerons par $d\nu$, et que nous appelons le *spectre de dimension de σ*. Ainsi, en tous les points de continuité de ν,

$$\nu(\alpha) = \int_0^\alpha d\nu.$$

Aux points de discontinuité, la mesure $d\nu$ donne seulement un encadrement pour $\nu(\alpha)$.

Si $\sigma \neq 0$ et si le spectre de dimension est porté par un seul point β, on dit que σ est *unidimensionnelle et de dimension β*. Si $0 < \beta < \infty$, il revient au même de dire que

$$\sigma \in \mathscr{S}_{\beta+\varepsilon} \cap \mathscr{R}_{\beta-\varepsilon} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

THÉORÈME II.1. *Si le spectre de dimension de σ est discret, la mesure σ se désintègre de façon unique sous la forme*

$$\sigma = \int \mu_\alpha \, d\nu(\alpha), \tag{4}$$

où $d\nu$ est le spectre de dimension, et μ_α une mesure de probabilité unidimensionnelle et de dimension α.

Preuve. Soit α_n un point de discontinuité de la fonction $\nu(\cdot)$, et ν_n le saut correspondant. Supposons

$$0 < \alpha_n < \infty, \qquad \alpha' < \alpha_n < \alpha'', \qquad \alpha' \uparrow \alpha_n, \ \alpha'' \downarrow \alpha_r.$$

Alors $\sigma_{\alpha''} - \sigma_{\alpha'}$ décroît vers une limite σ_n, de masse totale ν_n. Or, lorsque

$$\alpha - \varepsilon < \alpha' < \alpha'' < \alpha + \varepsilon,$$

on a

$$\sigma_{\alpha''} - \sigma_{\alpha'} \in \mathscr{S}_{\alpha+\varepsilon} \cap \mathscr{R}_{\alpha-\varepsilon}$$

et on vérifie facilement, en corollaire du théorème I, que $\mathscr{S}_{\alpha+\varepsilon}$ et $\mathscr{R}_{\alpha-\varepsilon}$ sont fermés pour la convergence décroissante; donc σ_n est unidimensionnelle et de dimension α_n.

Si $d\nu = \sum \nu_n \delta_{\alpha_n}$ $(0 < \alpha_n < \infty$, α_n distincts), on peut décomposer σ à l'aide de partages n'admettant aucun des α_n pour points de subdivision, et, en raffinant les partages et passant à la limite, on obtient

$$\sigma = \sum \sigma_n = \sum \nu_n \frac{\sigma_n}{\nu_n} \tag{5}$$

qui est de la forme (4) avec $\mu_{\alpha_n} = \sigma_n/\nu_n$. La série (5) converge en norme, et la désintégration est évidemment unique. Pour terminer le preuve, il faut regarder le cas

$$d\nu = \sum \nu_n \delta_{\alpha_n} \qquad (0 \leqslant \alpha_n \leqslant \infty,\ \alpha_n \text{ distincts}),$$

qui ne requiert que des modifications évidentes.

Considérons maintenant le cas général, en supposant seulement $\sigma \neq 0$. Pour chaque fonction f positive continue sur T (nous écrivons $f \in C^+(T)$) la fonction croissante $\int f d\sigma_\alpha$ est dérivable par rapport à la fonction $\nu(\alpha)$ $d\nu$-presque partout. Il en est de même si $f \in \mathscr{D}^+$, un dénombrable dense dans $C^+(T)$. Cela veut dire que, pour $d\nu$-presque tout α, il existe une $\mu_\alpha \in M^+(T)$ vérifiant

$$\lim_{\alpha' \uparrow \alpha, \alpha'' \downarrow \alpha} \frac{1}{\nu(\alpha'') - \nu(\alpha')} \int f(d\sigma_{\alpha''} - d\sigma_{\alpha'}) = \int f d\mu_\alpha$$

pour tout $f \in \mathscr{D}^+$. En d'autres termes, pour $d\nu$-presque tout α, on a

$$\mu_\alpha = \lim_{\alpha' \uparrow \alpha, \alpha'' \downarrow \alpha} \frac{\sigma_{\alpha''} - \sigma_{\alpha'}}{\nu(\alpha'') - \nu(\alpha')} \tag{6}$$

au sens de la convergence faible; μ_α est donc une probabilité. La formule (6) vaut non seulement pour $\alpha \in]0, \infty[$, mais aussi pour $\alpha = 0$ (alors $\alpha' = 0$) et $\alpha = \infty$ (alors $\alpha'' = \infty$), en convenant que $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_\infty = \sigma$.

Pour chaque $f \in \mathscr{D}^+$, la fonction $\int f d\sigma_\alpha$ est lipschitzienne par rapport à $\nu(\alpha)$, donc

$$\int f d\sigma = \int_{[0,\infty]} \left(\int f d\mu_\alpha\right) d\nu(\alpha).$$

On a donc (4) au sens faible.

Donnons une autre façon de définir μ_α, qui permettra de préciser son spectre de dimension. Pour cela, introduisons une suite de points distincts $\alpha_j \in]0, \infty[$ $(j = 1, 2, \ldots)$, tous points de continuité de $\nu(\cdot)$, de façon que leur ensemble soit dense sur $[0, \infty]$. Pour chaque j, les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ définissent un partage $\mathscr{P}_j$ de $[0, \infty]$ en intervalles ouverts à droite et fermés à gauche. Pour chaque j et chaque $\alpha \in [0, \infty]$, désignons par $I_j(\alpha)$ l'intervalle de $\mathscr{P}_j$ contenant α, et posons

$$I_j(\alpha) = [\alpha'_j, \alpha''_j[,$$

$$\sigma_j(\alpha) = \sigma_{\alpha''_j} - \sigma_{\alpha'_j}, \qquad \nu_j(\alpha) = \nu(\alpha''_j) - \nu(\alpha'_j), \qquad \mu_j(\alpha) = \sigma_j(\alpha)/\nu_j(\alpha).$$

Ainsi $\mu_j(\alpha)$ est une probabilité, qui ne dépend que de j et de l'intervalle de $\mathscr{P}_j$ qui contient α. En comparant à (6), on voit que, pour $d\nu$-presque tout α (sauf peut-être $\alpha = \infty$),

$$\mu_\alpha = \lim_{j \to \infty} \mu_j(\alpha) \tag{7}$$

au sens de la convergence faible.

Utilisant les notations du lemme 4, on a

$$\sigma_j(\alpha) = \sigma 1_{B_j(\alpha)}$$

avec

$$B_j(\alpha) = S(\alpha_j'', \sigma) \backslash S(\alpha_j', \sigma).$$

Ainsi, pour α fixé, les $B_j(\alpha)$ décroissent, et, pour α et j fixés,

$$\mathrm{Cap}_{\alpha_j''} B_j(\alpha) = 0.$$

Pour nous ramener au cas des compacts décroissants, fixons $\varepsilon > 0$. Posons $\sigma_0^\varepsilon = \sigma$, $K_0^\varepsilon(\alpha) = [0, \infty]$, et définissons par induction des mesures σ_j^ε et des compacts K_j^ε et $K_j^\varepsilon(\alpha)$ tels que

$$K_j^\varepsilon(\alpha) \subset B_j(\alpha),$$

$$I_j(\alpha) \subset I_k(\beta) \Rightarrow K_j^\varepsilon(\alpha) \subset K_k^\varepsilon(\beta)$$

(en particulier, $K_j^\varepsilon(\alpha)$ ne dépend de α que par l'intermédiaire de $I_j(\alpha)$, donc il y a seulement $j+1$ compacts $K_j^\varepsilon(\alpha)$ distincts quand j est fini et α varie),

$$K_j^\varepsilon = \bigcup_\alpha K_j^\varepsilon(\alpha), \qquad \sigma_j^\varepsilon = \sigma 1_{K_j^\varepsilon},$$

$$\sigma_{j-1}^\varepsilon(T) - \sigma_j^\varepsilon(T) (= \sigma(K_{j-1}^\varepsilon \backslash K_j^\varepsilon)) < \varepsilon \cdot 2^{-j}.$$

(La j-ième étape consiste simplement à remplacer l'un des $K_{j-1}^\varepsilon(\alpha)$ par deux sous-compacts, sans perdre trop de σ-masse.) Les compacts K_j^ε tendent en décroissant vers un compact K^ε, et les mesures σ_j^ε tendent en décroissant vers $\sigma^\varepsilon = \sigma 1_{K_\varepsilon}$. Considérons les μ_α^ε associées à σ^ε comme μ_α à σ (formules (6) et (7)), pour $d\nu$-presque tout α. On a maintenant

$$\mu_j^\varepsilon(\alpha) = \sigma_j^\varepsilon(\alpha)/\nu_j(\alpha), \qquad \sigma_j^\varepsilon(\alpha) = \sigma 1_{K_j^\varepsilon(\alpha)},$$

donc (cf. formule (7)) μ_α^ε est portée par le compact

$$\lim_{j \to \infty} \downarrow K_j^\varepsilon(\alpha) = K^\varepsilon(\alpha).$$

Comme, pour chaque j, $\mathrm{Cap}_{\alpha_j''} K_j^\varepsilon(\alpha) = 0$, on a

$$\mathrm{Cap}_{\alpha+\delta} K^{\varepsilon}(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout } \delta > 0,$$

donc

$$\mu_\alpha^\varepsilon \in \mathscr{S}_{\alpha+0} \Big(= \bigcap_{\delta>0} \mathscr{S}_{\alpha+\delta}\Big).$$

Prenons une suite de ε tendant en décroissant vers 0. Pour $d\nu$-presque tout α, les μ_α^ε (données par (6)) tendent en croissant vers μ_α, donc $\mu_\alpha \in \mathscr{S}_{\alpha+0}$. En d'autres termes, le spectre de dimension de μ_α est contenu dans $[0, \alpha]$.

Remarquons que

$$\sigma_\beta = \int_{[0,\beta]} \mu_\alpha \, d\nu(\alpha)$$

quand β est un point de continuité de $\nu(\cdot)$. Enonçons le résultat.

THÉORÈME II.2. *Soit $\sigma \in M^+(T)$ et $d\nu$ son spectre de dimension. Pour $d\nu$-presque tout α, la partie α-singulière de σ est dérivable au sens faible par rapport à $\nu(\alpha)$, et la dérivée est une mesure de probabilité μ_α, dont le spectre de dimension est contenu dans* $[0, \alpha]$. *On a les formules de désintégration*

$$\sigma = \int_{[0,\infty]} \mu_\alpha \, d\nu(\alpha), \tag{8}$$

$$\sigma_\beta = \int_{[0,\beta]} \mu_\alpha \, d\nu(\alpha), \tag{9}$$

les intégrales étant prises au sens faible, et β étant un point de continuité de $\nu(\cdot)$.

Remarquons que la formule (9) définit bien μ_α pour $d\nu$-presque tout α.

III. Exemples.

EXEMPLE 1. On donne une mesure de probabilité $d\nu$ diffuse sur $[0, 1]$. On va construire une mesure σ qui l'admet pour spectre de dimension, et dont la désintégration (8) s'écrive

$$\sigma = \int \delta_{\varphi(\alpha)} \, d\nu(\alpha),$$

c'est-à-dire $\mu_\alpha = \delta_{\varphi(\alpha)}$ (masse de Dirac en $\varphi(\alpha)$). Ainsi le spectre de dimension de μ_α est la mesure δ_0.

L'idée est de construire un ensemble du type de Cantor sur $[0, 1]$, de façon dissymétrique, de façon que sa dimension locale varie de 0 à 1. On procédera comme à l'ordinaire par dissections successives, en partant de l'intervalle *blanc* $I = [0, 1]$, et en remplaçant à la j-ième étape l'intervalle blanc $I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}}$ par les deux intervalles $I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},0}$ et $I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1},1}$ obtenues en ôtant de $I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}}$ un intervalle ouvert (*noir*) $J_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}} \subset I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}}$. La construction est bien définie par la suite des longueurs des intervalles $I_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j}$, que nous désignons par $l_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j}$. Les seules conditions imposées pour que la construction soit possible sont

$$l = 1 \quad \text{et} \quad l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},0} + l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1},1} < l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{j-1}}$$

(en particulier, $l_0 + l_1 < 1$). On associe à cette construction la mesure σ telle que $\sigma(I_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j}) = 2^{-j}$.

Soit donc $\nu(\cdot)$ une application croissante de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Soit D l'ensemble des nombres dyadiques contenus dans $[0, 1]$. Pour tout $\eta \in D$ soit $\alpha(\eta)$ la préimage de η par $\nu(\cdot)$. Etant donné $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, tous égaux à 0 ou 1, posons

$$\eta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \frac{1}{2^n},$$

$$\alpha(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \alpha(\eta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)), \quad l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}^{\alpha(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)} \left(= (l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n})^{\alpha(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}\right) = 2^{-n}.$$

Ainsi $l_0^{\alpha(1/2)} = \frac{1}{2}$, $l_1 = \frac{1}{2}$, et le fait que la fonction $\alpha(\cdot)$ soit strictement croissante garantit les conditions de la construction. Lorsque $\eta = \eta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in]0, 1[$ associons lui l'intervalle noir $J_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m-1}}$. Soit $\eta \in D \cap]0, 1[$ et soit J l'intervalle noir associé, et $\alpha = \alpha(\eta)$. Pour tous les intervalles blancs à gauche de J on a $l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}^{\alpha} \leqslant 2^{-n}$ et pour tous les intervalles blancs à droite de J on a $l_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}^{\alpha} \geqslant 2^{-n}$. Donc, en désignant par $\varphi(\alpha)$ l'extrémité gauche de J, la mesure $\sigma 1_{[0,\varphi(\alpha)]}$ est portée par un compact de α-mesure $\leqslant 1$ (α-mesure signifie mesure de Hausdorff en dimension α), et la mesure $\sigma 1_{[\varphi(\alpha),1]}$ appartient à la classe Λ_α (elle charge tout intervalle de longueur l d'une masse $\leqslant Cl^\alpha$).

On a donc

$$\sigma 1_{[0,\varphi(\alpha)]} \in \mathscr{S}_{\alpha+0}, \qquad \sigma 1_{[\varphi(\alpha),1]} \in \mathscr{R}_{\alpha-0},$$

donc $\mu_\alpha = \delta_{\varphi(\alpha)}$ pour tout $\alpha \notin \nu^{-1}(D)$. Pour $\alpha \in \nu^{-1}(D)$, on a indétermination: le second membre de (6) a pour valeurs d'adhérence les combinaisons linéaires convexes de $\delta_{\varphi(\alpha)}$ et $\delta_{\varphi(\alpha)+\lambda}$, λ étant la longueur de l'intervalle noir associé à $\nu(\alpha)$.

Exemple 2. On donne une mesure de probabilité $d\nu$ quelconque sur $[0, 1]$. On va construire une mesure σ qui l'admette pour spectre se dimension, avec une désintégration (8),

$$\sigma = \int \mu_\alpha \, d\nu(\alpha)$$

telle que, pour tout α, le spectre de dimension de μ_α soit la mesure δ_α. Quitte à soustraire de $d\nu$ sa partie discrète (et à appliquer le théorème II.1) on peut supposer $d\nu$ diffuse. L'idée est maintenant de définir

$$\sigma = \int \varkappa_{\beta(x)} \, d\lambda(x),$$

où $d\lambda$ est une probabilité sur $[0, 1]$, $\beta(\cdot)$ une fonction croissante appliquant $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, et $(\varkappa_\beta)$ $(0 < \beta < 1)$ une famille de probabilités vérifiant les conditions suivantes:

1° les supports K_β des $\varkappa_\beta$ forment une famille croissante $(0 < \beta < 1)$;

2° $N_\varepsilon(K_\beta)$ désignant le nombre minimum d'intervalles de longueur ε

recouvrant K_β, on a pour chaque β

$$\log N_\varepsilon(K_\beta) = O\left(\beta \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon \to 0);$$

3° pour tout $\delta > 0$, l'intégrale d'énergie

$$I^{\varkappa_\beta}_{\beta-\delta} = \iint \frac{d\varkappa_\beta(t)\, d\varkappa_\beta(s)}{|t-s|^{\beta-\delta}}$$

est bornée quand $\beta \in]d, 1[$.

Remarquons que les conditions 1° et 3° entraînent que $\varkappa_\beta$ est unidimensionnelle et de dimension β.

Admettons pour le moment l'existence d'une telle famille $(\varkappa_\beta)$ (voir appendice).

Soit λ une mesure de probabilité diffuse portée par un compact L tel que

$$\log N_\varepsilon(L) = O\left(\gamma \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $\gamma > 0$. En considérant λ comme mesure sur $X = [0, 1]$ (la variable sur X étant notée x) et $\varkappa_y$ comme une mesure sur $Y = [0, 1]$ (la variable sur Y étant notée y), σ est une mesure sur le carré $X \times Y$, et on peut l'écrire

$$d\sigma(x, y) = d\varkappa_{\beta(x)}\, d\lambda(x).$$

Posons

$$\tau_a = \sigma 1_{[0,a]\times[0,1]}, \qquad \varrho_a = \sigma 1_{]a,1]\times[0,1]}.$$

Le support de τ_a est contenu dans $L \times K_{\beta(a)}$ (condition 1°), et comme

$$N_\varepsilon(L \times K_{\beta(a)}) = N_\varepsilon(L)\, N_\varepsilon(K_{\beta(a)})$$

(le premier membre désignant le nombre minimum de carrés de côtés ε recouvrant l'ensemble $L \times K_{\beta(a)}$), les conditions sur $N_\varepsilon(L)$ et $N_\varepsilon(K_\beta)$ (condition 2°) montrent que

$$\operatorname{Cap}_\beta(L \times K_{\beta(a)}) = 0$$

lorsque $\beta > \beta(a)$. Donc $\tau_a \in \mathscr{S}_{\beta(a)+0}$.

D'autre part, pour $\alpha < \beta(a)$ et $x \geqslant a$, les conditions 1° et 3° montrent que $\varkappa_{\beta(a)}$ a une énergie d'ordre α finie, et il en résulte que

$$\varkappa_{\beta(x)} = \lim \uparrow \varkappa^{(n)}_{\beta(x)},$$

où les potentiels d'ordre α des $\varkappa^{(n)}_{\beta(x)}$ sont uniformément bornés $(x \geqslant \alpha)$. Posons

$$\varrho^{(n)}_a = \int_{]a,1]} \varkappa^{(n)}_{\beta(x)}\, d\lambda(x).$$

Alors $\varrho_a^{(n)} \uparrow \varrho_a$ et le potentiel d'ordre α de $\varrho_a^{(n)}$ (en prenant pour distance dans $X \times Y$ la somme des distances des coordonnées) est

$$U_\alpha(\varrho_a^{(n)};\ x,\ y) = \iint_{]a,1]\times[0,1]} \frac{d\varkappa_{\beta(x')}^{(n)}(y')\,d\lambda(x')}{|x-x'|^\alpha + |y-y'|^\alpha}.$$

En intégrant d'abord par rapport à y', il est clair que ce potentiel est borné. Donc $\varrho_a \in \mathscr{R}_{\beta(a)-0}$.

Enfin $\tau_a(X \times Y) = \lambda([0,\ a])$.

Il en résulte que le spectre de dimension de σ vérifie

$$\nu(\beta(a)) = \lambda([0,\ a]).$$

Si on donne λ (diffuse) et ν (continue), on peut toujours choisir la fonction $\beta(a)$ pour qu'il en soit ainsi. Dans ces conditions, pour tout point $a \in L$ (support de λ) non extrémité d'intervalle contigü à L, on a

$$\mu_{\beta(a)} = \delta_a \otimes \varkappa_{\beta(a)}.$$

Ainsi, pour $d\nu$-presque tout β, μ_β est unidimensionnelle de dimension β, ce qu'on voulait démontrer.

Exemple 3. Soit $\beta^*(\alpha)$ une fonction croissante de α $(0 < \alpha < 1)$, à valeurs dans $[0,\ 1]$. On va construire une mesure σ admettant une désintégration du type (8) telle que $\mu_{\alpha+\beta^*(\alpha)}$ soit unidimensionnelle et de dimension $\beta^*(\alpha)$.

Prenons λ comme dans l'exemple 1, de façon que la partie α-singulière de λ soit sa restriction à $[0,\ \varphi(\alpha)]$. La partie α-singulière est portée par un compact L_α vérifiant

$$\log N_\varepsilon(L_\alpha) = O\left(\alpha \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

et la partie α-régulière et d'énergie finie pour tout ordre $< \alpha$. Prenons maintenant

$$\sigma = \int \varkappa_{\beta(x)}\,d\lambda(x)$$

comme dans l'exemple 2, et définissons de la même manière τ_a et ϱ_a. On obtient maintenant, au prix de changements faciles à voir,

$$\tau_{\varphi(\alpha)} \in \mathscr{S}_{\beta(\varphi(\alpha))+\alpha+0}, \qquad \varrho_{\varphi(\alpha)} \in \mathscr{R}_{\beta(\varphi(\alpha))+\alpha-0},$$

$$\nu\big(\beta(\varphi(\alpha))+\alpha\big) = \lambda([0,\ \varphi(\alpha)]), \qquad \mu_{\beta(\varphi(\alpha))+\alpha} = \delta_{\varphi(\alpha)} \otimes \varkappa_{\beta(\varphi(\alpha))}.$$

Ainsi, pour $\gamma = \beta(\varphi(\alpha))+\alpha$, la mesure μ_γ est unidimensionnelle et de dimension $\gamma' = \beta(\varphi(\alpha))$. Il suffit de choisir $\beta(\cdot)$ de façon que $\beta \circ \varphi = \beta^*$.

Il est possible de modifier la construction précédente, par exemple en choisissant

$$\sigma = \int \varkappa_{\beta(x,y)}\,d\lambda(x,\ y),$$

où la mesure $d\lambda(x, y)$ est obtenue elle même en intégrant par rapport à dy une famille de mesures construites comme dans l'exemple 1, à partir d'une famille de fonctions $v(\cdot, y)$ ($y \in [0, 1]$ pour fixer les idées). On peut obtenir ainsi des désintégrations du type (8) dans lesquelles les μ_α sont des mesures diffuses. Les détails sont assez laborieux.

Appendice. Construction des mesures $\varkappa_\beta$. Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $\omega \in \Omega = [0, 1]$, posons

$$W_\alpha(\omega) = \frac{1}{\alpha} 1_{\alpha > \omega}.$$

C'est un processus aléatoire où Ω est considéré comme espace de probabilité. On va en considérer une infinité dénombrable de copies indépendantes, qu'on désignera par $W^I_{\alpha,n}$: n est un entier $\geqslant 1$, et I un sous-intervalle dyadique de $[0, 1[$, de la forme $[p \cdot 2^{-n}, (p+1) \cdot 2^{-n}[$. Posons

$$P_{\alpha,n}(t) = \sum_I W^I_{\alpha,n} 1_I(t)$$

la somme étant prise sur tous les intervalles dyadiques d'ordre n, et

$$Q_{\alpha,n}(t) = P_{\alpha,1}(t) P_{\alpha,2}(t) \ldots P_{\alpha,n}(t).$$

Quand α est donné, $Q_{n,\alpha}(t)$ prend seulement les valeurs 0 et α^{-n}, et est constant sur chaque intervalle dyadique d'ordre n; on appelle *intervalles vivants au temps* n les intervalles dyadiques d'ordre n sur lesquels $Q_{\alpha,n}(t) \neq 0$. Soit $N_n(\alpha)$ leur nombre. On sait que, pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la mesure $Q_{\alpha,n}(t)\,dt$ tend faiblement vers une mesure S_α unidimensionnelle de dimension

$$\beta = \frac{\log 1/\alpha}{\log 2},$$

avec une probabilité positive. Pour tout $\gamma < \beta$, l'espérance de l'intégrale d'énergie d'ordre β de S est finie. Enfin, toujours pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la suite $N_n(\alpha)\alpha^{-n}$ est une martingale d'espérance 1 qui converge p. s. vers une limite $\not\equiv 0$. Donc, avec probabilité positive, le support de S_α, que nous désignons par K^*_α, vérifie

$$\log N_{2^{-n}}(K^*_\alpha) = \log \alpha^n + O(1) = \beta \log 2^n + O(1).$$

Il est clair que K^*_α augmente avec α. La construction aléatoire est donc réalisée avec $\varkappa_\beta = S_\alpha$ et $K_\beta = K^*_\alpha$ (avec probabilité positive quand on fixe $\beta_0 > 0$ et qu'on se limite aux $\beta \geqslant \beta_0$).

TRAVAUX CITÉS

[1] J.-P. Kahane, *Désintégration des mesures selon la dimension*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 306 (1988), pp. 107–110.

[2] — *Désintégration des mesures selon la dimension. Erratum*, ibidem 307 (1988), p. 59.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES (BÂT. 425)
91405 ORSAY, FRANCE

STANFORD UNIVERSITY
CALIFORNIA 94305, U.S.A.
HEBREW UNIVERSITY, JERUSALEM, ISRAËL

Reçu par la Rédaction le 25.11.1988