COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XV 1966 FASC. 1

ENSEMBLES DE RYLL-NARDZEWSKI ET ENSEMBLES DE HELSON

PAR

J.-P. KAHANE (PARIS)

1. C. Ryll-Nardzewski a introduit la notion suivante [1]: une partie Λ de la droite réelle R est un *ensemble d'interpolation* (ensemble I_0), si toute fonction bornée sur Λ peut être prolongée sur R en une fonction presque-périodique de Bohr. S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski en ont développé la théorie [2], [3].

Il se pose la question est-ce que Λ étant un ensemble d'interpolation, toute fonction bornée sur Λ peut être prolongée sur R en une fonction presque périodique dont la série de Fourier est absolument convergente. La réponse affirmative à cette question résulte d'un théorème plus général démontré dans le livre de Hoffman [4], p. 205, dont la preuve fait appel à un résultat de Badé et Curtis [1]. Cependant nous nous proposons de résoudre notre problème d'une manière directe en utilisant certaines propositions auxiliaires qui, elles-mêmes, peuvent présenter quelque intérêt.

Si nous admettons ce résultat, il en résulte que, dans le groupe de Bohr B (complété de R dans la topologie la moins fine rendant continues toutes les fonctions presque-périodiques), l'adhérence $\bar{\Lambda}$ de Λ est un *ensemble de Helson* ([7], p. 114). D'après les propriétés connues des ensembles de Helson ([7], p. 117-119 et [3], p. 141-146), on peut préciser à quel point un ensemble d'interpolation est „rare".

2. Précisons la terminologie.

Λ sera toujours une partie de R. On désignera par b $\big($soit $\lambda \to b(\lambda)\big)$ une fonction bornée sur Λ.

On a dit que Λ est un *ensemble d'interpolation* si toute fonction b bornée sur Λ est prolongeable sur R en une fonction presque périodique. Il revient au même de dire que Λ est prolongeable sur B en une fonction continue.

On dira que Λ est un *ensemble d'interpolation-A* si toute fonction b bornée sur Λ est prolongeable sur R en une fonction presque périodique dont la série de Fourier est absolument convergente. Il revient au même de dire que Λ est prolongeable sur B en une fonction de la classe A (c'est-à-dire transformée de Fourier d'une fonction sommable sur la droite discrète).

Soit maintenant K un groupe abélien compact (dans la suite, ce sera B) et S une partie de K (dans la suite, ce sera Λ). On dira que l'ensemble S est *helsonien* sur K si son adhérence $\overline{S}$ est un ensemble de Helson. En d'autres termes, l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite ([7], p. 115):

a) toute fonction uniformément continue sur S est prolongeable sur K en une fonction de la classe $A(K)$ $\big(A(K) = \mathcal{F}L^1(\hat{K})\big)$;

b) pour les mesures à support dans $\overline{S}$, la norme ordinaire est équivalente à la norme $\sup\limits_{\chi} |\langle\mu, \chi\rangle|$, où χ parcourt l'ensemble $\hat{K}$ des caractères du groupe K.

3. Voici quelques propositions préliminaires.

PROPOSITION 1. *Λ est un ensemble d'interpolation si et seulement si, quelles que soient Λ_1 et Λ_2, parties disjointes de Λ, leurs adhérences $\overline{\Lambda}_1$ et $\overline{\Lambda}_2$ dans B sont disjointes.*

Preuve: [2], p. 25. Nous n'utiliserons que la partie la plus évidente („seulement si").

PROPOSITION 2. *Λ est un ensemble d'interpolation-A si et seulement si c'est à la fois un ensemble d'interpolation et un ensemble helsonien dans B.*

C'est immédiat.

PROPOSITION 3. *Pour que Λ soit un ensemble d'interpolation-A, il suffit qu'existe un $\varepsilon > 0$ tel que, quelles que soient Λ_1 et Λ_2, parties de Λ disjointes et non vides, il existe un ouvert $\Omega = \Omega(\Lambda_1, \Lambda_2)$ de B, de mesure ε, tel que les sommes $\Lambda_1+\Omega$ et $\Lambda_2+\Omega$ (1) aient des adhérences disjointes dans B.*

Preuve. Supposons la condition satisfaite, et montrons (cela suffit) que toute fonction b appliquant Λ sur $[0, 1]$ est prolongeable sur B en une fonction de la classe A. Ecrivons

$$b(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} b_j(\lambda)$$

avec $b_j(\lambda) = 0$ ou 1. Nous allons montrer que chaque b_j est prolongeable sur B en une fonction de la classe A de norme $\leqslant 1/\varepsilon$; alors il en sera de même pour b.

Soient Λ_1 et Λ_2 les parties de Λ où respectivement b_j prend les valeurs 0 et 1. Il leur correspond un ouvert $\Omega \subset B$. Comme $\Lambda_1+\Omega$ et $\Lambda_2+\Omega$ ont

(1) $\Lambda+\Omega = \{\lambda+\omega\colon \lambda \in \Lambda \text{ et } \omega \in \Omega\}$.

des adhérences disjointes dans B, il existe une fonction continue φ, appliquant B dans $[0,1]$, égale à 0 sur $\Lambda_1+\Omega$ et à 1 sur $\Lambda_2+\Omega$. Soit χ la fonction caractéristique de Ω, et

$$h(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_B \varphi(x+y)\chi(y)dy$$

où $x\in B$, et dy est la mesure de Haar sur B. Alors $h=b_j$ sur Λ, et la norme de h dans A satisfait

$$\|h\|_A=\|\hat{h}\|_{L^1(R_d)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|\hat{\varphi}\|_{L^2(R_d)}\|\hat{\chi}\|_{L^2(R_d)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|_{L^2(B)}\|\chi\|_{L^2(B)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$$

($\hat{h}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\chi}$ désignant les transformées de Fourier de h, φ et χ, définies sur la droite discrète R_d). La preuve est ainsi terminée.

4. Nous aurons besoin du résultat suivant, qui concerne les ensembles non helsoniens sur un groupe abélien compact K.

THÉORÈME 1. *Tout ensemble non helsonien sur K contient une infinité d'ensembles disjoints non helsoniens sur K.*

Démonstration. Etant donné un ensemble $S\subset K$, nous dirons qu'un point $a\in K$ est non helsonien pour S si, pour tout voisinage $V(a)$ de a, $S\cap V(a)$ est non helsonien.

Si S est non helsonien, il existe un $a\in K$ qui est non helsonien pour S. Sinon en effet, K étant compact, il existerait des ouverts $V(a_1),\ldots,V(a_n)$, en nombre fini, recouvrant K, et tels que, pour tout j, $S\cap V(a_j)$ soit helsonien. Il existerait dans $A(K)$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, c'est-à-dire des $\varphi_j\in A(K)$, $j=1,2,\ldots,n$, de somme 1, tels que, pour chaque j, φ_j soit porté par $V(a_j)$ (Theorem 7, p. 419, et Corollary, p. 224). Et on conclut que toute fonction uniformément continue sur S serait prolongeable en une fonction $\in A(K)$, ce qui est impossible.

Soit donc a un point non helsonien pour S. On va construire par récurrence une suite de voisinages ouverts de a, V_j, et une suite de mesures ν_j $(j=1,2,\ldots)$. V_1 est arbitraire. V_j étant donné, on sait que l'ensemble $S_j=S\cap V_j$ est non helsonien. Il existe donc une mesure μ_j, portée par $\bar{S}_j$, telle que

$$\sup_{\chi\in\hat{K}}|\langle\mu_j,\chi\rangle|<\frac{1}{j+1}\|\mu_j\|,$$

$\|\ \|$ représentant la norme ordinaire des mesures, c'est-à-dire la masse totale. On sait, par un théorème de Wiener ([7], p. 118), que μ_j ne charge aucun point d'une masse supérieure au premier membre. On peut donc choisir $V_{j+1}\subset V_j$ de façon que la restriction σ_j de μ_j à V_{j+1} satisfasse

$$\|\sigma_j\|<\frac{1}{j+1}\|\mu_j\|.$$

V_{j+1} étant ainsi choisi, on pose $\nu_j = \mu_j - \sigma_j$, et on a

$$(*) \qquad \sup_{\chi\in\hat{R}} |\langle \nu_j, \chi\rangle| < \frac{2}{j} \|\nu_j\|;$$

de plus, ν_j est portée par $\overline{S \cap (V_j - V_{j+1})} = \overline{S_j - S_{j+1}}$.

Posons

$$S^\nu = \bigcup_{j=2^{\nu-1}(\mathrm{mod}\, 2^\nu)} (S_j - S_{j+1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Ce sont des ensembles disjoints, contenus dans S, et non helsoniens puisque l'adhérence de chacun d'eux porte des mesures ν_j satisfaisant $(*)$ avec j arbitrairement grand. Le théorème 1 est démontré.

5. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat annoncé.

Théorème 2. *Tout ensemble d'interpolation est un ensemble d'interpolation-A.*

Démonstration. Supposons que Λ est un ensemble d'interpolation qui n'est pas un ensemble d'interpolation-A. D'après la proposition 2, Λ est non helsonien sur B. D'après le théorème 1, Λ contient une infinité de parties disjointes Λ^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ qui sont non helsoniennes sur B. D'après la proposition 2 encore, aucun Λ^ν n'est ensemble d'interpolation A. Soit maintenant $\{\varepsilon_\nu\}$ une suite tendant vers zéro. D'après la proposition 3, il existe, quel que soit ν, deux parties de Λ^ν disjointes et non vides — soit Λ_1^ν et Λ_2^ν — telles que, pour tout ouvert Ω de mesure $\geqslant \varepsilon_\nu$, les ensembles $\Lambda_1^\nu + \Omega$ et $\Lambda_2^\nu + \Omega$ soient ahdérents dans B (c'est-à-dire que leurs adhérences ne soient pas disjointes).

Soient maintenant

$$\Lambda_1 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Lambda_1^\nu$$

et

$$\Lambda_2 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Lambda_2^\nu.$$

Quel que soit l'ouvert Ω, les ensembles $\Lambda_1 + \Omega$ et $\Lambda_2 + \Omega$ sont adhérents. Donc Λ_1 et Λ_2 sont adhérents, ce qui, d'après la proposition 1, contredit l'hypothèse que Λ est un ensemble d'interpolation. Cela démontre le théorème 2.

Remarque. Le théorème 2 reste vrai lorsqu'on remplace R par un groupe abélien localement compact arbitraire. La démonstration n'exige pas de changements.

6. On connait des conditions nécessaires pour qu'un ensemble soit helsonien ([5], p. 141-146); les résultats, établis pour des ensembles de

Helson sur le cercle, se transcrivent aisément au groupe B). On obtient ainsi des conditions nécessaires pour que Λ soit ensemble d'interpolation.

THÉORÈME 3. *Pour que Λ soit un ensemble d'interpolation, il est nécessaire que*

a) *l'adhérence de Λ dans le groupe de Bohr ne porte aucune mesure dont la transformée de Fourier s'annule à l'infini sur la droite discrete;*

b) *le nombre de points de Λ dans une progression arithmétique de 2^n termes ne dépasse pas Kn, K ne dépendant que de Λ;*

c) *étant donné s nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_s$, le nombre de points de Λ de la forme $a_1x_1+\ldots+a_sx_s$, avec a_j entiers et $|a_1|+\ldots+|a_s| < 2^n$, ne dépasse pas Kns, K ne dépendant que de Λ.*

La condition a) implique que $\bar{\Lambda}$ est de mesure nulle, ce qui a été obtenu indépendamment par Hartman et Ryll-Nardzewski [3], et répond affirmativement au problème P 252.

La condition c) est un peu plus générale que la condition b). Elle montre par exemple que la somme $\Lambda_1+\Lambda_2$ de deux ensembles infinis, si dispersés qu'ils soient, ne peut être un ensemble d'interpolation. La condition b) permet de résoudre négativement le problème P 454.

7. Un important résultat de Hartman et Ryll-Nardzewski ([3], Theorem 1) donne aussitôt le théorème suivant: si Λ est un ensemble d'interpolation, il existe un $\delta > 0$ tel que tout ensemble δ-voisin de Λ soit encore un ensemble d'interpolation (on convient de dire que Λ et Λ' sont deux ensembles *δ-voisins* s'il existe bijection φ de Λ dans Λ' telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $|\varphi(\lambda)-\lambda| < \delta$).

Cela permet essentiellement de ramener l'étude des ensembles d'interpolation à celle des ensembles d'interpolation contenus dans l'ensemble Z des entiers relatifs. En particulier, la condition b) du théorème 3 donne alors:

THÉORÈME 4. *Si Λ est un ensemble d'interpolation, le nombre de points de Λ contenus dans un intervalle quelconque de longueur r est uniformément $O(\log r)$ quand $r \to \infty$.*

D'autre part, si l'on se restreint aux Λ contenus dans Z, il est intéressant de comparer les notions d'ensembles d'interpolation et d'ensemble de Sidon ([7], p. 120). Une simple reformulation du théorème 2 est en effet la suivante:

THÉORÈME 5. *Si Λ est un ensemble d'interpolation contenu dans Z, toute fonction bornée sur Λ est la restriction à Λ de la transformée de Fourier d'une mesure discrète sur le cercle.*

Comme corollaire, tout ensemble d'interpolation contenu dans Z est un ensemble de Sidon sur Z. La réciproque est inexacte, comme nous l'ont indiqué H. Rosenthal et W. Rudin.

TRAVAUX CITÉS

[1] W. G. Badé et P. Curtis, Jr., *Wedderbaum decompositions of commutative Banach algebras*, American Journal of Mathematics 82 (1960), p. 851-866.

[2] S. Hartman et C. Ryll-Nardzewski, *Almost periodic extensions of functions*, Colloquium Mathematicum 12 (1964), p. 23-39.

[3] — *Almost periodic extensions of functions II*, ibidem 15 (1966), p. 79-86.

[4] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs 1962.

[5] J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris 1963.

[6] M. A. Naĭmark, *Normed rings*, Groningen 1959.

[7] W. Rudin, *Fourier transforms on groups*, New York-London 1962.

Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1965