

*ESPACES DES FEUILLES  
DE CERTAINES STRUCTURES FEUILLETÉES PLANES*

PAR

F. P L U V I N A G E (PARIS)

*INTRODUCTION*

La classification complète des structures feuilletées du plan ayant été déterminée par Kaplan [2], puis ramenée à la notion agréable des variétés à une dimension non forcément séparées (cf. [1]), on connaît par contre très peu de méthodes permettant de rattacher un élément de cette classification à une structure feuilletée donnée, par exemple par une équation différentielle ordinaire explicite. C'est une contribution à ce sujet que se propose le présent article, dont l'idée m'a été suggérée par Monsieur G. Reeb et que nous publions en hommage commun au Professeur T. Ważewski.

Le but que nous avons en vue était l'étude des équations polynomiales

$$dy = P(x, y)dx \quad (P: \text{polynome en } x \text{ et } y).$$

D'une part ce but n'a pas été atteint dans son intégralité, puisque, pour des raisons que nous exposerons, la méthode employée (étude d'une structure feuilletée d'un domaine borné à l'aide de la connaissance, le long du bord du domaine, d'un champ associé à cette structure) ne permet en général qu'une détermination incomplète de la structure feuilletée. D'autre part, il a été dépassé puisque les résultats énoncés sont susceptibles d'applications autres que l'étude de telles équations.

Pour nous permettre d'arriver rapidement aux applications, nous n'avons pas donné dans cet article la plupart des démonstrations des résultats énoncés. Ces démonstrations feront l'objet d'une publication ultérieure.

*1. STRUCTURES FEUILLETÉES D'UN DOMAINE PLAN SIMPLEMENT  
CONNEXE. RAPPELS*

Soit  $\mathcal{U}$  un domaine plan simplement connexe. A une structure feuilletée  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{U}$  est attachée une relation d'équivalence  $\rho$ , ouverte, dont les classes sont les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Toutes les hypothèses de différentia-

bilité nécessaires seront supposées remplies dans la suite.  $\mathcal{F}$  peut être associée à un champ de vecteurs  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{U}$  (en fait  $\mathcal{F}$  est associée à une classe de champs définissant en tout point une direction de champ, et nous prenons pour  $\mathcal{C}$  un représentant de cette classe).

La structure feuilletée la plus simple est celle déterminée dans un rectangle par les parallèles à l'un des côtés du rectangle. Un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{U}$  est dit *distingué* si la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{O}$  est homéomorphe à cette structure sur le rectangle. Tout point de  $\mathcal{U}$  possède un voisinage distingué (voir [1]).

Toute feuille de  $\mathcal{F}$  est simplement connexe et partage  $\mathcal{U}$  en deux composantes connexes (cf. [2]).

Enonçons enfin les résultats suivants qui se trouvent dans [1], dans lesquels  $V_1$  désigne une variété à une dimension, simplement connexe et à base dénombrable, mais non séparée en général:

L'espace quotient  $\mathcal{U}/\rho$  est une  $V_1$ .

Un branchement sur  $V_1$  est la donnée d'un couple de points de  $V_1$  distincts mais non séparés. Trois points distincts  $a, b, c$  de  $V_1$ , tels que  $a$  et  $b$  d'une part,  $b$  et  $c$  de l'autre, ne soient pas séparés, déterminent un branchement double. De même pour un branchement d'ordre supérieur à 2. Pour éviter de dissocier des cas, nous considérerons ici qu'il y a deux, ou plusieurs, branchements dans une telle situation, comme si ces branchements étaient tous simples.

Si une variété  $V_1$  est munie d'une relation d'ordre entre les deux points de chaque couple formant un branchement, il lui correspond une structure feuilletée sur  $\mathcal{U}$  unique à un homéomorphisme près.

Exemple 1. Si  $V_1$  est munie de  $n$  branchements, avec  $n \leq 2$  (éventuellement compte tenu de l'ordre de multiplicité en vertu de la remarque faite plus haut), il existe une droite munie de  $n$  branchements homéomorphe à  $V_1$ .

Une  $V_1$  possédant au moins un branchement n'étant par représentable dans  $\mathbf{R}^2$  qui est séparé, nous représenterons les  $V_1$  en identifiant les points non séparés (on obtient ainsi ce qu'on appelle une *dendrite*). Cette représentation présente l'avantage suivant: à tout chemin continu simple sur une  $V_1$  correspond un chemin continu simple sur la dendrite associée. Or si l'on considère une dendrite associée à une  $V_1$  possédant trois branchements distincts, les images  $a, b, c$  de ces trois branchements, peuvent être jointes par un chemin continu simple sur la dendrite. Mais l'orientation des greffes introduit une condition supplémentaire qui n'est toujours remplie que pour  $n \leq 2$ . Ainsi la  $V_1$  représentée par la figure 1 n'est pas homéomorphe à une droite munie de trois branchements.

Exemple 2. Si  $V_1$  possède quatre branchements (et donc également si  $V_1$  possède plus de quatre branchements), il peut se faire qu'il n'existe pas de droite munie de quatre branchements homéomorphe à  $V_1$ .

En effet, s'il y a quatre branchements auxquels sont associés sur la dendrite correspondante quatre points  $a, b, c, d$  dans la disposition de la figure 2, il n'est pas possible de trouver un chemin continu simple joignant  $a, b, c, d$ . L'exemple 3 nous fournira un cas dans lequel est obtenue cette situation.

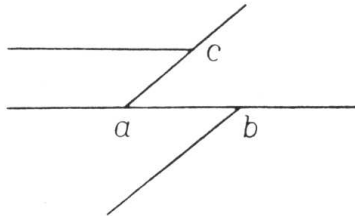


Fig. 1

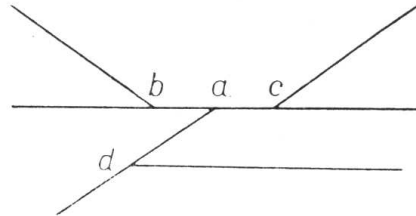


Fig. 2

Ces exemples nous montrent qu'une fois trouvé le nombre  $n$  de branchements d'une  $V_1$ , il se pose une question de disposition relative de ces branchements pour  $n \geq 4$ . Ce problème interviendra dans notre étude (voir exemples 3, 4, 5).

2. STRUCTURES PROLONGEABLES DU DISQUE: HYPOTHÈSES. POINTS DE CONTACT

Soit  $D$  un domaine plan simplement connexe, dont la frontière  $C$  est une courbe différentiable simplement fermée. Pour simplifier, nous considérerons dans la suite que  $D$  est un disque et  $C$  son cercle bord, mais seules interviendront pour  $D$  et  $C$  les hypothèses énoncées ci-dessus.

Définition I. Une structure feuilletée  $\mathcal{F}$  sur  $D$  est dite *prolongeable* s'il existe dans le plan un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $D$  et  $C$  et une structure feuilletée  $\mathcal{F}^*$  sur  $\mathcal{U}$  telle que la restriction à  $D$  de  $\mathcal{F}^*$  soit la structure  $\mathcal{F}$ ,

Remarque.  $\mathcal{F}$  étant prolongeable, si  $\mathcal{C}$  est un champ associé à  $\mathcal{F}$ , il existe un champ  $\mathcal{C}^*$  associé à  $\mathcal{F}^*$  et prolongeant  $\mathcal{C}$  (pourvu qu'il soit possible de trouver  $\mathcal{F}^*$  différentiable, ce que nous admettrons). Ni  $\mathcal{U}$ , ni  $\mathcal{F}^*$ , ni  $\mathcal{C}^*$  ne sont canoniquement déterminés par la donnée de  $\mathcal{F}$ .

Seule est déterminée par continuité la restriction de  $\mathcal{C}^*$  à  $C$ . Cette détermination se trouve également être la seule dont nous aurons besoin qu'elle soit canoniquement associée à  $\mathcal{C}$ . En particulier, nous pouvons dès maintenant faire l'hypothèse:

HYPOTHÈSE. *Les structures  $\mathcal{F}$  que nous considérerons sont supposées telles que  $\mathcal{C}^*$  ne soit tangent à  $C$  qu'en un nombre fini de points.*

Jusqu'au paragraphe 5 inclus, toutes les hypothèses qui viennent d'être énoncées seront supposées remplies.

Fixons nous une origine sur  $C$  et le sens direct comme sens de parcours. Notons  $s$  l'abscisse curviligne sur  $C$  qui en résulte et supposons

pour fixer les idées que l'on décrit un tour sur  $C$  en faisant varier  $s$  de 0 à 1. Etant donné un point  $x$  sur  $C$ , d'abscisse curviligne  $s$ , notons  $T(x)$  un vecteur tangent à  $C$  en  $x$  dont le sens induit le sens direct sur  $C$ , et notons  $\mathcal{C}^*(x)$  le vecteur de  $\mathcal{C}^*$  en  $x$ . Soit  $\Delta$  un axe de référence. Notons respectivement  $\theta(s)$  et  $\alpha(s)$  les déterminations des angles  $(\Delta, T(x))$  et  $(\Delta, \mathcal{C}^*(x))$  qui sont contenues dans  $[0, 2\pi]$  pour  $s = 0$ , et qui sont fonctions continues de  $s$ . Nous aurons:

$$\theta(s+a) = \theta(s) + 2a\pi \quad (a \text{ entier}),$$

$$\alpha(s+a) = \alpha(s) \quad (a \text{ entier}).$$

Cette dernière propriété provient du fait que  $\mathcal{F}^*$  est définie sur un ouvert contenant  $D$  et  $C$ ; par suite  $\alpha$  est bien une fonction uniforme de  $s$ .

Posons  $\varphi(s) = \theta(s) - \alpha(s)$ .

Définition 2. On dit qu'un point  $x_0$  de  $C$ , d'abscisse  $s_0$ , est un *point de contact intérieur* (resp. *extérieur*) s'il existe un entier  $k$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $s_0$  dans  $\mathbf{R}$  tels que:

- (i)  $\varphi(s_0) - k\pi = 0$ ,
- (ii)  $\varphi(s) - k\pi > 0$  (resp.  $< 0$ ) pour  $s \in \mathcal{V}$  et  $s < s_0$ ,
- (iii)  $\varphi(s) - k\pi < 0$  (resp.  $> 0$ ) pour  $s \in \mathcal{V}$  et  $s > s_0$ .

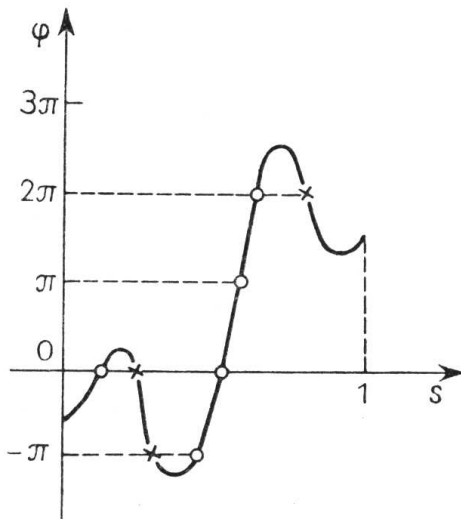


Fig. 3

- point de contact extérieur,
- × point de contact intérieur

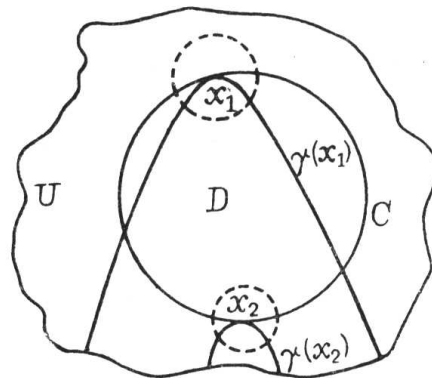


Fig. 4

- $x_1$  point de contact intérieur,
- $x_2$  point de contact extérieur

La figure 3 donne un exemple de graphe obtenu pour  $\varphi$ , sur lequel apparaissent 5 points de contact extérieur pour 3 points de contact intérieur.

Dans la suite, nous appellerons *point de contact* un point qui est soit point de contact intérieur, soit point de contact extérieur, et *point d'intersection* un point de  $C$  qui n'est pas un point de contact.

L'hypothèse faite plus haut implique que le nombre de points de contact est fini. Les propriétés des fonctions continues sur un compact appliquées à la fonction  $\varphi$  sur le segment  $[0, 1]$ , et le fait que  $\varphi(s+a) = \varphi(s) + 2a\pi$ , pour tout  $s$  et pour tout  $a$  entier, nous conduisent alors au théorème suivant:

**THÉORÈME 1.** *Le nombre des points de contact est pair et au moins égal à deux. Soit  $2p$  ce nombre ( $p \geq 1$ ). Le nombre des points de contact extérieur est*

$$n = p + 1$$

*et celui des points de contact intérieur est*

$$m = p - 1.$$

3. AUTRE DÉFINITION DES POINTS DE CONTACT.  
RÉSULTAT FONDAMENTAL

**PROPOSITION.** *Dire qu'un point  $x$  sur  $C$  est un point de contact intérieur (resp. extérieur) équivaut à dire que, dans un voisinage suffisamment petit de  $x$  dans un ouvert  $\mathcal{U}$  où  $\mathcal{F}$  se prolonge en  $\mathcal{F}^*$ , la feuille  $\gamma(x)$  de  $x$  pour  $\mathcal{F}^*$  est, à l'exception du point  $x$  lui-même, tout entière intérieure (resp. extérieure) à  $D$  (voir figure 4).*

**COROLLAIRE.** *Les points de  $C$  peuvent être ainsi caractérisés:*

(a) *„ $x$  est un point de contact extérieur” équivaut à „aucune feuille de  $\mathcal{F}$  n'admet  $x$  pour extrémité”.*

(b) *„ $x$  est un point d'intersection” équivaut à „il existe une feuille unique de  $\mathcal{F}$  admettant  $x$  pour extrémité”.*

(c) *„ $x$  est un point de contact intérieur” équivaut à „il existe deux feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$  admettant  $x$  pour extrémité”.*

**Résultat fondamental.** Rappelons qu'un ensemble invariant pour une structure feuilletée  $\mathcal{F}$  est un ensemble non vide qui, en même temps qu'un point, contient toute la feuille passant par ce point.

**THÉORÈME 2.** *L'existence sur  $C$  d'un point de contact intérieur est équivalente à l'existence dans  $D$  de trois domaines  $D_1, D_2, D_3$  vérifiant les conditions suivantes:*

$D_i$  est invariant ( $i = 1, 2, 3$ ).

$D_i \cap D_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

$\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \cup \bar{D}_3 = \bar{D} = D \cup C$ .

$\bar{D}_i \cap \bar{D}_j \neq \emptyset$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

**COROLLAIRE 1.** *S'il existe dans  $D$  trois feuilles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  telles que  $|\gamma_1\gamma_2\gamma_3|^+$ , il existe sur  $C$  un point de contact intérieur  $x$ . De plus pour tout couple  $i, j, i \neq j, (i, j = 1, 2, 3)$  il existe une feuille  $\gamma$  de  $\mathcal{F}$ , d'extrémité  $x$ , telle que  $\gamma_i|\gamma|\gamma_j$ .*

Pour les notations  $|\gamma_1\gamma_2\gamma_3|^+$  et  $\gamma_i|\gamma_j|\gamma_k$  se reporter à [2] ainsi qu'aux figures 5a et 5b ci-contre qui présentent respectivement ces deux dispositions possibles de trois feuilles de  $\mathcal{F}$ .

**COROLLAIRE 2.** *Un structure feuilletée prolongeable de  $D$  est déterminée à un homéomorphisme près par la donnée des feuilles de  $D$  dont une extrémité (au moins) est un point de contact intérieur.*

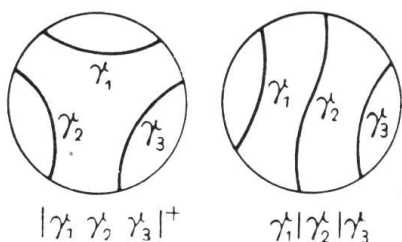


Fig. 5a et 5b

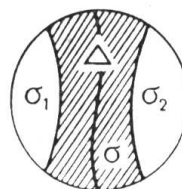


Fig. 6

Autrement dit, seules certaines feuilles suffisent pour déterminer entièrement une structure feuilletée de  $D$ . Mais en vue des applications que nous nous proposons, nous nous restreindrons aux résultats fournis par la seule connaissance des points de contact, car lorsqu'une structure feuilletée est donnée par une équation différentielle ordinaire, les points de contact apparaissent immédiatement tandis que l'étude des feuilles présente souvent de très grosses difficultés.

#### 4. RÉSULTATS SUR L'ESPACE DES FEUILLES DE $D$

**PROPOSITION.** *Pour que deux feuilles distinctes de  $D$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , soient deux points non séparés dans l'espace des feuilles, il faut et il suffit qu'il existe une famille de feuilles  $\varphi_0 = \gamma_1, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, \varphi_k = \gamma_2$  telles que  $\overline{\varphi_{i-1}} \cap \overline{\varphi_i} \neq \emptyset$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k$ , et que  $|\varphi_{i-1}\varphi_i\varphi_{i+1}|^+$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, k-1$ .*

$\overline{\varphi_{i-1}} \cap \overline{\varphi_i} \neq \emptyset$  signifie que  $\overline{\varphi_{i-1}} \cap \overline{\varphi_i}$  est un point de contact intérieur. Le fait que la condition soit suffisante résulte immédiatement de la définition de la non-séparation de deux feuilles.

Comme exemple d'utilisation des notions et des résultats énoncés jusqu'ici, démontrons la nécessité de cette condition dans le cas le plus simple, celui où  $C$  ne comporte pas de point de contact intérieur. Il s'agit alors de montrer que deux feuilles quelconques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $\mathcal{F}$  constituent dans l'espace des feuilles deux points séparés.

Nous avons signalé parmi les rappels § 1 que toute feuille de  $\mathcal{F}$  partage  $D$  en deux composantes connexes. Notons  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ) la composante connexe de  $D$  déterminée par  $\sigma_1$  (resp.  $\sigma_2$ ) et qui contient  $\sigma_2$  (resp.  $\sigma_1$ ). Posons  $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$  (voir figure 6) et remarquons que  $\Delta$  est invariant pour  $\mathcal{F}$ . Soit  $\sigma$  une feuille de  $\Delta$ . En l'absence de point de contact intérieur, le corollaire 1 implique  $\sigma_1|\sigma|\sigma_2$ . Or cette disposition signifie que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont respectivement contenues dans chacune des composantes connexes déterminées dans  $D$  par  $\sigma$ . Ces deux composantes connexes constituent donc deux voisinages ouverts de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  invariants et ne se coupant pas, c.q.f.d.

La proposition démontrée donne lieu au corollaire suivant :

**THÉORÈME 3.** *Le nombre des branchements de l'espace des feuilles de  $D$  est égal au nombre des points de contact intérieur sur  $C$ .*

5. EXEMPLES ET REMARQUES

**Exemple 3.** Dans le disque  $D$  de rayon 12, considérons l'équation différentielle ordinaire

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x = (x+1)x(x-2)(x-5).$$

L'équation (1) s'intègre immédiatement, dans le plan tout entier, en

$$y = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + x^3 + 5x^2 + k \quad (k - \text{constante d'intégration}).$$

Dans le plan, la famille des courbes intégrales est donc invariante par translation parallèle à  $Oy$ . Il suffit de considérer alors la courbe correspondant à  $k = 0$ , dont nous traçons l'allure (figure 7), pour obtenir toute la famille par translation. Pour chercher dans  $D$  l'espace des feuilles, nous traçons un système de transversales (figure 8: en traits continus les feuilles, discontinus les transversales, les points non séparés portent des numéros identiques), qui nous montre que *l'espace des feuilles de  $D$  pour l'équation (1) est la variété associée à la dendrite de la figure 2.*

**Exemple 4.** Déterminons maintenant l'espace des feuilles du même disque  $D$  que dans l'exemple précédent, pour l'équation

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = x^4 - 6x^3 + 10x + 432 - 3y^2.$$

Cette équation n'est pas intégrable par des méthodes élémentaires, mais la simple étude du signe de  $dy/dx$  suffira ici. On a  $dy/dx = 0$  sur



la quartique de la figure 9, composée de deux branches symétriques par rapport à  $Ox$ . La dérivée  $dy/dx$  est positive entre ces deux branches, et négative à l'extérieur. La quartique coupe  $C$  en huit points:  $a, b, c,$

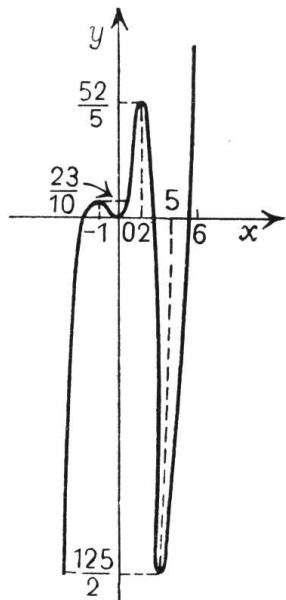


Fig. 7

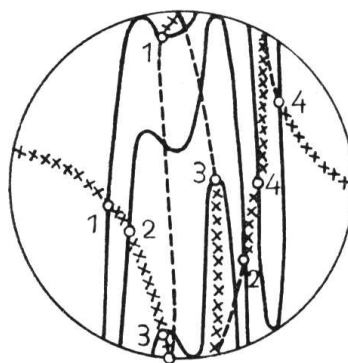


Fig. 8

$d, e, f, g, h$  (voir figure 10). Appelons arcs  $ab, bc, \dots, gh, ha$  les „petits” arcs, c'est-à-dire ceux qui ne contiennent que leurs extrémités parmi ces huit points. L'équation de  $C$  étant  $x^2 + y^2 = 144$ , les équations (1) et (2) sont les mêmes sur  $C$ . Par suite les champs associés à ces équations

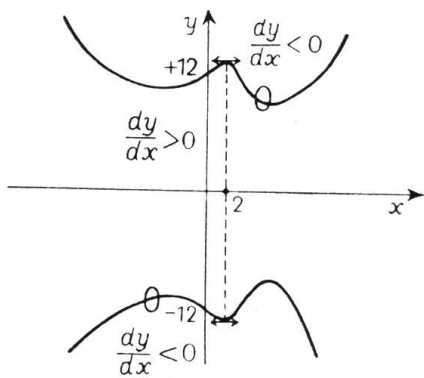


Fig. 9

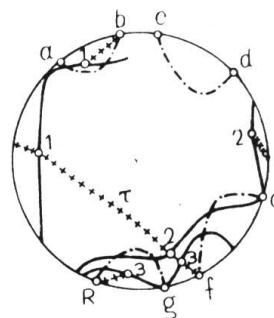


Fig. 10

- +++ transversales
- feuilles
- · - quartique

peuvent être pris identiques sur  $C$ . Les arcs  $ha$  et  $fg$  ne contiennent chacun qu'un point de contact extérieur. Une courbe  $\tau$  différentiable à tangente de pente négative, joignant ces deux points et toute entière contenue dans la région où  $dy/dx > 0$  constituera donc un premier élément d'un système transversal dans  $D$ . De même, les arcs  $ha$  et  $de$  contiennent chacun



un point de contact intérieur, et  $g$  est un point de contact intérieur. De plus chacun de ces points de contact intérieur est, toujours d'après la seule étude de signe, l'extrémité d'une feuille de  $D$  qui coupe  $C$ . En parcourant  $\tau$  dans le sens des  $x$  croissants, nous rencontrerons donc trois branchements successifs 1, 2, 3. L'étude de signe nous permet d'affirmer qu'il existe un quatrième point de contact intérieur, sur l'arc  $bc$ , mais ne nous permet pas de décider si la branche correspondante va se greffer sur  $\tau$  entre 1 et 2 ou sur la branche gréffée en 1. Mais ceci n'a pas d'importance, car, de toute façon, l'espace des feuilles  $D$  pour (2) sera la droite sur laquelle se greffent quatre branches (car dans les deux hypothèses sur le quatrième point de branchement, les points 1, 2, 3, 4 pourront être reliés par un arc simple sur la dendrite associée à l'espace des feuilles).

Remarque. Ces exemples ont mis en évidence le fait que les points de contact intérieur sont les extrémités des arcs constituant un système de transversales à  $\mathcal{F}$ .

Conclusion des exemples 3 et 4. L'hypothèse de prolongeabilité est remplie par la donnée même des équations. Or l'exemple 2 nous a montré que la disposition des quatre branchements dans les deux variétés leur interdit d'être homéomorphes. Il faut donc en tirer la conclusion qu'en général la seule connaissance du champ le long  $C$  ne permet pas de déterminer plus que le nombre de branchements de l'espace des feuilles de  $D$ .

Cependant, il existe des cas privilégiés où une conclusion est possible comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 5. Supposons que le long de  $C$  les points de contact intérieur soient tous consécutifs (voir figure 11). D'après le corollaire 1, § 3, il n'y a qu'une disposition possible des feuilles ayant pour extrémité

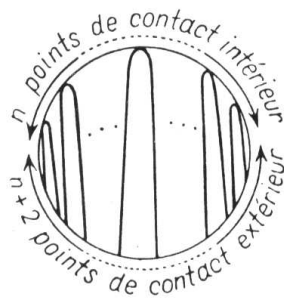


Fig. 11

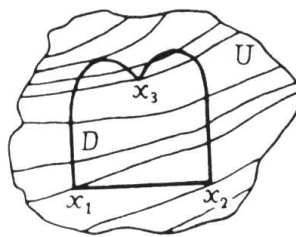


Fig. 12

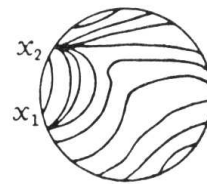


Fig. 13

un point de contact intérieur: l'un des trois domaines du théorème 2 déterminés par un point de contact intérieur ne contient dans son adhérence qu'un point de contact intérieur. Sinon ce corollaire 1 § 3 entraînerait une contradiction avec l'hypothèse que les points de contact intérieur sont consécutifs. Dans ce cas, on voit donc que l'espace des feuilles de  $D$  est parfaitement déterminé: c'est une  $v_1$  munie de  $n$  branchements

successifs (en notant  $n$  le nombre de points de contact intérieur) et les relations d'ordre à l'intérieur de ces branchements sont bien définies.

Remarquons qu'au contraire, si le champ le long de  $C$  est tel que points de contact intérieur et points de contact extérieur alternent le long de  $C$ , il peut être déterminé par plusieurs structures feuilletées prolongeables de  $D$  non homéomorphes. C'est le cas pour les exemples 3 et 4 et de même pour la remarque finale de cet article.

6. STRUCTURES FEUILLETÉES PROLONGEABLES SAUF EN UN NOMBRE FINI DE POINTS,  
DE DOMAINES À FRONTIÈRE DIFFÉRENTIABLE SAUF EN UN NOMBRE FINI DE POINTS

**6.1. Structures feuilletées prolongeables de domaines à frontière différentiable sauf en un nombre fini de points.** Soit  $D$  un domaine dont la frontière  $C$  est une courbe formée simple différentiable sauf en un nombre fini de points anguleux que nous nommerons sommets. Une structure feuilletée  $\mathcal{F}$  sur  $D$  sera dite *prolongeable* si elle satisfait à la définition 1, comme dans le cas où  $D$  est un disque. Pour les sommets la définition 2 n'étant pas valable nous poserons ici comme définition des points de contact et des points d'intersection le corollaire de la proposition § 3, qui est valable pour tous les points  $C$ . La figure 12 donne un exemple de structure feuilletée prolongeable d'un domaine  $D$  dont la frontière présente trois sommets:  $x_1, x_2, x_3$ .  $x_1$  est un point d'intersection,  $x_2$  un point de contact extérieur,  $x_3$  un point de contact intérieur.

PROPOSITION. *Les structures feuilletées prolongeables des domaines possédant un nombre fini de sommets vérifient, moyennant la définition ci-dessus, les mêmes résultats que les structures feuilletées prolongeables du disque.*

En effet, seule la démonstration du théorème 1 fait appel à la différentiabilité de  $C$ . Il est facile de l'adapter au cas considéré, dans lequel la fonction  $\varphi$  présente un nombre fini de discontinuités de première espèce, en tenant compte de la nouvelle définition des contacts.

**6.2. Structures feuilletées prolongeables sauf en un nombre fini de points.**

Définition. Soit  $D$  un domaine satisfaisant aux hypothèses de 6.1. Une structure feuilletée  $\mathcal{F}$  de  $D$  est dite *prolongeable sauf en un nombre fini de points* s'il existe un ouvert  $\mathcal{U}$  contenant  $D$  et  $C$  privé d'un nombre fini de points et une structure feuilletée  $\mathcal{F}^*$  sur  $\mathcal{U}$  telle que la restriction à  $D$  de  $\mathcal{F}^*$  soit la structure  $\mathcal{F}$ .

Les points  $C$  au voisinage desquels  $\mathcal{F}$  n'est pas prolongeable sont nommés *points singuliers*. Les points non singuliers sont les points ordi-

naires. Un point singulier  $x$  est caractérisé par le fait qu'un champ  $\mathcal{C}$  associé à  $\mathcal{F}$  ne peut pas être prolongé en  $x$ .

Moyennant une définition plus générale des contacts, l'hypothèse faite ci-dessous permet de conserver les résultats précédents.

**HYPOTHÈSE.** *Pour toute feuille  $\gamma$  de  $F$ ,  $\bar{\gamma} \cap C$  se compose exactement de deux points (les extrémités de  $\gamma$ ). La réunion  $\Phi(x)$  des points de  $D$  dont la feuille admet le point  $x$  de  $C$  comme extrémité comporte au plus deux composantes connexes. Enfin, sauf pour un nombre fini de points de  $C$ ,  $\Phi(x)$  se réduit à une feuille.*

**Définition 2.** Un point  $x$  de  $C$  est un *point de contact*

(a) *extérieur*, si  $\Phi(x) = \emptyset$  ou si  $\Phi(x)$  est une composante connexe de  $D$  limitée par une feuille,

(b) *intérieur*, si  $\Phi(x)$  comporte deux composantes connexes.

**Remarque.** Les définitions (a) et (b) ne sont pas incompatibles, ce qui amène à compter les points de contact avec un ordre de multiplicité. En vertu de l'hypothèse faite, un point de  $C$  peut au maximum être compté pour deux points de contact extérieur et un point de contact intérieur.

A titre d'exemple, la figure 13 présente deux points singuliers:  $x_1$  (point d'intersection) et  $x_2$  (point de contact intérieur).

## 7. APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES POLYNOMIALES EN $y$

Nous nous proposons l'étude de la structure feuilletée du plan associée à l'équation différentielle ordinaire:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^n f_k(x) y^k$$

dans laquelle  $f_k(x)$  est une fonction différentielle de  $x$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ , et  $f_n(x)$  ne s'annule que pour un nombre fini de valeurs de  $x$ .

**Remarque.** L'équation (1) englobe évidemment les équations de la forme  $dy/dx = P(x, y)$  où  $P$  est un polynome en  $x$  et en  $y$ .

Posons  $y = \operatorname{tg} u$ . Ce changement de variable établit un homéomorphisme du plan sur la bande:

$$B = \mathbf{R} \times \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[.$$

On posera naturellement

$$\bar{B} = \mathbf{R} \times \left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right].$$

Par homéomorphisme la structure feuilletée du plan pour l'équation (1) est la même que celle de  $B$  pour l'équation:

$$(2) \quad \cos^{n-2} u \, du = \left( \sum_{k=0}^n f_k(x) \sin^k u \cos^{n-k} u \right) dx.$$

Nous n'envisagerons dans la suite que les cas où  $n \geq 2$ , car pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , l'équation (1) est intégrable par quadratures et l'on sait dans ces cas que l'espace des feuilles est la droite.

Le champ  $\mathcal{C}$  associé à la structure  $\mathcal{F}$  de  $B$  définie par (2) sera la restriction à  $B$  du champ de composantes, dans le plan  $(x, u)$ :

$$\mathcal{C}^*(x, u) = \begin{pmatrix} -\cos^{n-2} u \\ \sum_{k=0}^n f_k(x) \sin^k u \cos^{n-k} u \end{pmatrix}.$$

D'après son écriture même, ce champ est sans singularité dans le plan  $(x, u)$  tout entier pour  $n = 2$  et dans le plan  $(x, u)$  privé des points vérifiant

$$f_n(x) = 0, \quad u = \frac{\pi}{2} + a\pi \quad (a \text{ entier quelconque})$$

pour  $n > 2$ .

Autrement dit, sur tout rectangle contenu dans  $B$ ,  $\mathcal{C}$ , donc  $\mathcal{F}$ , sera prolongeable sauf en un nombre fini de points, puisque les zéros de  $f_n(x)$  sont en nombre fini.

**LEMME 1.** *Pour toute équation (2), il existe deux nombres  $a$  et  $b$  tels que les structures feuilletées  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  déterminées par l'équation (2) respectivement sur  $B$  et sur le rectangle  $D = ]a, b[ \times ]-\pi/2, +\pi/2[$  soient homéomorphes.*

Les deux nombres  $a$  et  $b$  seront deux nombres tels que  $f_n(x)$  ne s'annule pas en dehors de  $]a, b[$ .

**LEMME 2.** *La structure feuilletée  $F'$  du lemme 1 satisfait à l'hypothèse de 6.2. De plus, l'existence d'un  $x_0 \in \mathbf{R}$  tel que, au voisinage de  $x_0$ ,  $f_n(x)$  soit négatif (resp. positif) pour  $x < x_0$  et positif (resp. négatif) pour  $x > x_0$  équivaut au fait que le point  $(x_0, +\frac{1}{2}\pi)$  est pour  $F'$  un point de*

contact soit extérieur, soit intérieur et doublement extérieur (resp. un point de contact intérieur). Pour le point  $(x_0, -\frac{1}{2}\pi)$ , le résultat est le même si  $n$  est impair, tandis que les conclusions sont inversées si  $n$  est pair.

Pour  $n = 2$ , la structure feuilletée de  $D$  est prolongeable. La première composante de  $\mathcal{C}^*$  est égale à  $+1$ . Pour  $u = \pm \pi/2$ , on obtient

$$\mathcal{C}^*\left(x, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} +1 \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ces deux considérations rendent le lemme évident dans ce cas.

Pour  $n > 2$ , la structure feuilletée de  $D$  est prolongeable sauf en un nombre fini de points (correspondant aux zéros de  $f_n(x)$ ). L'hypothèse de 6.2 est vérifiée parce que la première composante de  $\mathcal{C}$  ne s'annule jamais dans  $D$ . Ce même phénomène, ainsi que la fait qu'en  $u = +\pi/2$ ,  $\mathcal{C}^*$  se réduit à  $\begin{pmatrix} 0 \\ f_n(x) \end{pmatrix}$  et en  $u = -\pi/2$  à  $\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^n f_n(x) \end{pmatrix}$  permettent l'étude des contacts pour obtenir les résultats énoncés dans le lemme.

Ces deux lemmes permettent d'énoncer les deux résultats qui suivent. Dans ces résultats, nous nommerons *racine stable* de  $f_n(x)$  une valeur  $x_0$  telle que  $f_n(x_0) = 0$  et telle qu'il existe un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant: „ $x_1$  et  $x_2 \in \mathcal{V}$  et  $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$ ” entraîne „ $f_n(x_1)f_n(x_2) < 0$ ”.

**THÉORÈME 4.** *Si  $n$  est pair, si  $p$  désigne le nombre de racines stables de  $f_n(x)$ , alors l'espace des feuilles du plan pour l'équation (1) est muni de  $p$  branchements au moins et de  $2p$  au plus.*

**THÉORÈME 4'.** *Si  $n$  est impair, si  $p$  désigne le nombre de racines stables de  $f_n(x)$ , alors le nombre de branchements de l'espace des feuilles du plan pour l'équation (1) est au plus  $2p$  et au moins:*

*$p$  si  $p$  est pair.*

*$p - 1$  si  $p$  est impair et si  $f_n(x)$  est négatif pour  $x$  assez petit.*

*$p + 1$  si  $p$  est impair et si  $f_n(x)$  est positif pour  $x$  assez petit.*

*Cas particulier.* Si  $f_n(x)$  n'a pas de racine stable, l'espace des feuilles du plan pour l'équation (1) est la droite (quelle que soit la parité de  $n$ ).

Remarque. Le long de chacun des axes  $u = +\pi/2$  et  $u = -\pi/2$ , points de contact extérieur et de contact intérieur vont alterner. Par suite nous serons dans le „mauvais” cas évoqué à la suite de l'exemple 5, c'est-à-dire que notre étude ne permet pas, en dehors des cas où  $f_n(x)$  ne possède qu'une ou deux racines stables, une détermination complète de l'espace des feuilles. Pour  $n > 3$ , par exemple, il pourra se présenter des cas analogues à ceux des exemples 3 et 4.

## TRAVAUX CITÉS

- [1] A. Haefliger et G. Reeb, *Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan*, Enseignement Mathématique (2) 3 (1957), p. 107-125.
- [2] W. Kaplan, *Regular curves families filling the plane*, Duke Mathematical Journal 7 (1940), p. 154-185, et 8 (1941), p. 11.
- [3] L. Markus, *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Transactions of the American Mathematical Society 76 (1954), p. 127-148.
- [4] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Oeuvres de Henri Poincaré I, p. 33-44.

Reçu par la Rédaction le 17. 1. 1966

---