

SUR UN TYPE D'ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES

PAR

S. GOŁĄB (KRAKÓW)

Dans la théorie des tuyaux d'aérage (en particulier de celui des mines), on rencontre l'équation intégré-différentielle de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = A \left(\alpha + \beta y^2 + \gamma \int_{x_0}^x y^2 dx \right)^{\varrho},$$

où A , α , β , γ et ϱ sont des constantes positives ⁽¹⁾. La variable indépendante x dénote ici la position du point courant dans la suite de tuyaux et la variable cherchée y désigne la dépense normal d'air au point courant x , les constants intervenant dans l'équation n'ayant (à l'exception de x_0) qu'un sens physique.

L'équation (1) est un cas particulier de l'équation intégré-différentielle

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = F \left[x, y, \int_{x_0}^x f(y) dx \right],$$

où les fonctions F et f sont données. Admettons que le domaine d'existence de la fonction F est défini par les conditions

$$(3) \quad x \geq x_0, \quad y \text{ et } z \text{ quelconques},$$

et que la fonction f est définie partout, vu que y_0 dans la condition initiale (4) est tout à fait arbitraire.

Il se pose le problème d'existence et celui d'unicité respectivement concernant les solutions de l'équation (2), aussi bien locales (déterminées dans l'entourage à droite du point x_0) que globales, assujetties à la condition initiale

$$(4) \quad y = y_0 \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

⁽¹⁾ H. Bystroń, A. Wojtyczka et E. Wawrowski, *L'élaboration d'une méthode pour le calcul et pour la régulation des tuyaux d'aérage non ramifiés ayant la longueur jusqu'à 3000 m* (en préparation, en polonais).

Le procédé non rigoureux qui suit suggère l'idée que sous certaines hypothèses de régularité concernant les fonctions F et f , la condition initiale (4) doit déterminer la solution $y = \varphi(x)$ de l'équation (2) d'une façon univoque. Admettons notamment que la fonction F est de classe C^1 par rapport à toutes les trois variables indépendantes. Alors la solution $\varphi(x)$ aura la deuxième dérivée qui s'exprimera comme suit:

$$(5) \quad y'' = F_1 \left[x, y, \int_{x_0}^x f(y) dx \right] + y' F_2 \left[x, y, \int_{x_0}^x f(y) dx \right] + \\ + f(y) F_3 \left[x, y, \int_{x_0}^x f(y) dx \right],$$

où F_1, F_2 et F_3 désignent respectivement les trois dérivées partielles du premier ordre de la fonction F . Admettons en outre que l'équation

$$(6) \quad F(x, y, z) = u$$

peut être résolue par rapport à z . Soit

$$(6') \quad z = \Phi(x, y, u)$$

la forme équivalente à (6). L'équation (2) peut alors s'écrire sous la forme

$$\int_{x_0}^x f(y) dx = \Phi(x, y, y'),$$

ce qui permet d'éliminer l'intégrale $\int_{x_0}^x f(y) dx$ de (5) et d'écrire (5) sous la forme

$$(7) \quad y'' = F_1[x, y, \Phi(x, y, y')] + y' F_2[x, y, \Phi(x, y, y')] + \\ + f(y) F_3[x, y, \Phi(x, y, y')]$$

étant une équation ordinaire normale du deuxième ordre (résolue par rapport à y''). Soit

$$(8) \quad y = g(x, C_1, C_2)$$

la solution générale de l'équation (7), C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration (abstraction faite des solutions singulières). Chaque solution de (2) en est une de (7), mais pas réciproquement. Pour que (8) soit une solution de (2), il faut que l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = F \left[x, g(x, C_1, C_2), \int_{x_0}^x f[g(u, C_1, C_2)] du \right]$$

soit satisfaite ce qui donne la relation suivante entre les constantes C_1 et C_2 :

$$(10) \quad C_2 = \omega(C_1).$$

Par conséquent, les solutions de l'équation (2) sont données par la formule

$$y = g[x, C_1, \omega(C_1)]$$

qui représente la famille des solutions avec un paramètre. La condition initiale (4) doit donc déterminer la solution d'une façon univoque. Ces considérations manquent bien entendu de rigueur puisque l'équation (6) peut ne pas se laisser présenter sous la forme (6'), il peut y avoir des solutions de (7) qui ne se laissent pas représenter sous la forme (8) et enfin (9) n'entraîne pas nécessairement (10). Quant aux fonctions F et f on peut d'ailleurs faire des hypothèses de régularité plus faibles.

Remarquons que vu le membre droit de (2), un élément linéaire (tangent à la courbe intégrale) ne vient nécessairement correspondre au point (x, y) d'une façon univoque, comme dans la théorie classique des équations différentielles ordinaires du premier ordre, car la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^x f(y) dx$ dépend ici non seulement de (x, y) , mais aussi de l'allure de la fonction y , dans l'intervalle (x_0, x) tout entier et elle est par conséquent une fonctionnelle de la solution même.

Or, par l'analogie à la méthode classique, la méthode suivante des approximations successives s'impose pour l'équation (2). Posons

$$(11) \quad \varphi_0(x) \stackrel{\text{dét}}{=} y_0$$

et définissons $\varphi_{n+1}(x)$ par la formule inductive

$$(12) \quad \varphi_{n+1}(x) \stackrel{\text{dét}}{=} y_0 + \int_{x_0}^x F\left[u, \varphi_n(u), \int_{x_0}^u f[\varphi_n(v)] dv\right] du.$$

En appliquant le procédé classique il n'est pas difficile d'établir des conditions suffisantes auxquelles doivent satisfaire les fonctions F et f pour que la suite des approximations successives $\{\varphi_n(x)\}$ définie par (11) et (12) converge vers la solution $\varphi(x)$ dans un intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$ et pour que cette solution soit unique.

En admettant que la fonction F est continue par rapport à la première variable, qu'elle satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième et troisième variable et que la fonction f est lipschitzienne

$$|F(x, y_2, z_2) - F(x, y_1, z_1)| \leq L_1 |y_2 - y_1| + L_2 |z_2 - z_1|,$$

$$|f(u_2) - f(u_1)| \leq L_3 |u_2 - u_1|$$

on parvient facilement à l'estimation

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq (L_1 + \alpha L_2 L_3) \int_{x_0}^x |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| dx$$

qui est analogue à celle de la méthode de Picard et qui conduit à la démonstration de la convergence de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ dans un certain entourage du point x_0 .

En posant par définition

$$(13) \quad L \stackrel{\text{dét}}{=} L_1 + \alpha L_2 L_3, \quad M \stackrel{\text{dét}}{=} \max F(x, y, z)$$

dans le parallélépipède

$$(14) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \quad y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta, \quad -\gamma \leq z \leq \gamma$$

et

$$(15) \quad m \stackrel{\text{dét}}{=} \max |f(y)|$$

dans l'intervalle fermé $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$, on peut établir, à savoir par l'induction l'inégalité

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} L^n M,$$

donc la convergence de $\varphi_n(x)$ vers la solution unique $\varphi(x)$ déterminée par (4) dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \delta)$, où

$$(16) \quad \delta \stackrel{\text{dét}}{=} \min \left[\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{\gamma}{m} \right].$$

On peut donc énoncer le suivant

THÉORÈME 1. *En admettant que la fonction f est définie dans le domaine (14), qu'elle y est continue par rapport à la première variable et satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à deux autres variables, tandis que la fonction f est définie partout et qu'elle est lipschitzienne, l'équation (2) possède pour tout y_0 une solution unique*

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

assujettie à la condition initiale (4) et valable dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \delta)$, où δ est déterminé par (16), les constantes M et m étant définies par (13), et (15).

Dans les applications de l'équation (1) il s'agit de savoir si la solution $\varphi(x)$ est déterminée pour tous les $x \geq x_0$ ou seulement dans un intervalle borné $[x_0, x_1)$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} \varphi(x) = \pm \infty.$$

Pour une équation

$$y' = h(x, y)$$

aux variables séparées, la réponse n'est pas difficile à constater. Pour l'équation (1), la question exige un raisonnement plus fin. Remarquons que les fonctions F et f satisfont dans le cas particulier de l'équation (1) à toutes les hypothèses du théorème 1. On a le suivant

THÉORÈME 2. *Si $0 < \rho < \frac{1}{2}$, chaque intégrale de l'équation (1) est déterminée pour tous les $x \geq x_0$.*

Démonstration. Supposons pour parvenir à une contradiction qu'il existe un y_0 et un x_1 tels que la solution $\varphi(x)$ de (1) déterminée par la condition (4) possède la propriété

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow x_1 - 0} \varphi(x) = \infty.$$

Les constantes A, α, β, γ et ρ étant positives et $F > 0$, il est impossible que $\varphi(x) \rightarrow -\infty$. Posons

$$(18) \quad \lambda \stackrel{\text{dét}}{=} x_1 - x_0, \quad G(y) \stackrel{\text{dét}}{=} A(\alpha + (\beta + \lambda\gamma)y^2)^\rho$$

et envisageons l'équation différentielle ordinaire du premier ordre

$$y' = G(y).$$

Soit $\psi(x)$ l'intégrale unique de (18) assujettie à la condition initiale $\psi(x_0) = y_0$. Remarquons que

$$G(y_0) > A \left[\alpha + \beta y_0^2 + \gamma \int_{x_0}^x \varphi^2(x) dx \right]^\rho > A(\alpha + \beta y_0^2)^\rho,$$

donc $\psi'(x_0) > \varphi'(x_0)$ et on a l'inégalité

$$\psi(x) > \varphi(x)$$

dans un voisinage du point x_0 . En supposant donc (pour aboutir à une contradiction) qu'il existe un $x > x_0$ tel que $\psi(x) = \varphi(x)$, soit \bar{x} la plus petite valeur de tels x . On a d'un part (la fonction φ étant croissante)

$$\begin{aligned} A \left\{ \alpha + \beta \varphi^2(\bar{x}) + \gamma \int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi^2(x) dx \right\}^\rho &< A \left\{ \alpha + \beta \varphi^2(\bar{x}) + \gamma \int_{x_0}^{\bar{x}} \varphi^2(\bar{x}) dx \right\}^\rho \\ &= A \{ \alpha + \beta \varphi^2(\bar{x}) + \gamma \varphi^2(\bar{x})(\bar{x} - x_0) \}^\rho = A \{ \alpha + (\beta + \gamma) \varphi^2(\bar{x}) \}^\rho \end{aligned}$$

et d'autre part

$$G[\psi(\bar{x})] = A \{ \alpha + (\beta + \lambda\gamma) \psi^2(\bar{x}) \}^\rho = A \{ \alpha + (\beta + \lambda\gamma) \varphi^2(\bar{x}) \}^\rho,$$

donc

$$\varphi'(\bar{x}) < \psi'(\bar{x})$$

ce qui est impossible vu que $\psi(x) > \varphi(x)$ pour $x < \bar{x}$ et que $\psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$. On a par conséquent

$$\psi(x) > \varphi(x)$$

dans l'intervalle (x_0, x_1) tout entier. Ensuite, on a la majoration

$$\alpha + (\beta + \lambda\gamma)y^2 < \left[\frac{\alpha}{y_0^2} + \beta + \lambda\gamma \right] y^2 = By^2 \quad \text{pour } y > y_0,$$

d'où

$$G(y) < AB^\varrho y^{2\varrho}$$

et, par conséquent, en désignant par $\omega(x)$ l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = AB^\varrho y^{2\varrho}$$

unique et assujettie à la condition initiale $\omega(x_0) = y_0$, il vient (d'après le théorème bien connu)

$$\omega(x) > \psi(x) \quad \text{pour } x_0 < x < x_1.$$

L'intégrale $\omega(x)$ se laisse déterminer d'une façon effective

$$\omega(x) = [y_0^{1-2\varrho} + (1-2\varrho)AB^\varrho(x-x_0)]^{1/(1-2\varrho)}.$$

En tenant compte des inégalités

$$y_0 > 0, \quad A > 0, \quad B > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \varrho < \frac{1}{2},$$

l'intégrale $\omega(x)$ se trouve déterminée pour tous les $x > x_0$, en particulier donc dans l'intervalle $[x_0, x_1)$ tout entier. Par conséquent,

$$\omega(x) > \psi(x) > \varphi(x) \quad \text{dans } (x_0, x_1)$$

ce qui contredit la propriété (17). Le théorème 2 est ainsi démontré.

Remarque. Le théorème 2 ne subsiste pas pour $\varrho > \frac{1}{2}$. En effet, on a alors

$$A \left\{ \alpha + \beta y^2 + \gamma \int_{x_0}^x y^2 dx \right\}^\varrho > A \{ \alpha + \beta y^2 \}^\varrho > A \beta^\varrho y^{2\varrho}.$$

Désignons par $\chi(x)$ l'intégrale de l'équation

$$y' = AB^\varrho y^{2\varrho}$$

unique et vérifiant la condition initiale $\chi(x_0) = y_0$. En résolvant cette équation par la séparation des variables

$$\int \frac{dy}{y^{2\varrho}} = AB^\varrho x + C, \quad y^{1-2\varrho} = [AB^\varrho x + C](1-2\varrho),$$

$$y^{1-2\varrho} = (1-2\varrho) \left\{ \frac{y_0^{1-2\varrho}}{1-2\varrho} + AB^\varrho(x-x_0) \right\},$$

il vient

$$\chi(x) = \left\{ (2\varrho-1) \left[\frac{y_0^{1-2\varrho}}{1-2\varrho} - AB^\varrho(x-x_0) \right] \right\}^{1/(1-2\varrho)}.$$

Posons

$$x_1 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} x_0 + \frac{y_0^{1-2\varrho}}{(2\varrho-1)AB^\varrho}.$$

Il est clair que l'on a alors

$$\lim_{x \rightarrow x_1-0} \chi(x) = \infty$$

et l'intégrale $\chi(x)$ (pour y_0 arbitraire, mais positif) ne se trouve pas déterminée pour tous les $x > x_0$.

Reçu par la Rédaction le 11. 1. 1966