COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LVII 1989 FASC. 1

SUR LE THÉORÈME DES IDÉAUX PREMIERS

PAR

C. TOUIBI ET H. SMIDA ZARGOUNI (TUNIS)

Nous donnons une nouvelle démonstration élémentaire du théorème des idéaux premiers, n'utilisant pas la méthode de Selberg. La méthode utilisée s'inspire de celle de Daboussi [3].

I. Soient K un corps de nombres de degré d et O_K son anneau des entiers. Dans ce qui suit, on désigne par $\mathfrak{a}$ un idéal entier et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K, et on considère la fonction de von Mangoldt généralisée définie par

$$\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \operatorname{Log} N\mathfrak{p} & \text{si } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^r,\ r \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction de Möbius généralisée définie par

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{a} = O_K, \\ (-1)^r & \text{si } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r;\ \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \text{ si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note, comme il est d'usage,

$$\Psi(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \Lambda(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad M(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \mu(\mathfrak{a})$$

et on rappelle que [4]

$$B_K(x) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} 1 = \varrho x + O(x^{1-1/d}), \tag{1}$$

où ϱ désigne le résidu en 1 de la fonction ζ_K de Dedekind du corps K.

LEMME 1 ([2], [5]). *On a*

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \operatorname{Log} N\mathfrak{a} = \varrho x \operatorname{Log} x - \varrho x + O(x^{1-1/d} \operatorname{Log} x), \tag{2}$$

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} (N\mathfrak{a})^{-1} = \varrho \operatorname{Log} x + C_1 + O(x^{-1/d}), \tag{3}$$

où C_1 est une constante,

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} (N\mathfrak{a})^{\beta} = O(x^{1+\beta}), \quad \text{où } 0 < 1+\beta \leqslant 1, \tag{4}$$

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} = \operatorname{Log} x + O(1). \tag{5}$$

LEMME 2. *On a*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x) + C_2 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right), \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta\geqslant 0}} \left(\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\delta}} + \operatorname{Log}\delta\right) = C_2 - \gamma, \tag{7}$$

où γ est la constante d'Euler et C_2 est une constante.

Démonstration. On note

$$D(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad C(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}.$$

On a alors

$$D(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \frac{1}{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}.$$

Or on a [5]

$$C(x) = \operatorname{Log} x + \tau(x), \quad \text{où } \tau(x) = O(1);$$

par conséquent:

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \frac{C(x)}{\operatorname{Log} x} + \int_2^x \frac{C(t)}{t\operatorname{Log}^2 t}\,dt = 1 + \frac{\tau(x)}{\operatorname{Log} x} + \int_2^x \frac{dt}{t\operatorname{Log} t} + \int_2^x \frac{\tau(t)\,dt}{t\operatorname{Log}^2 t}$$

$$= \operatorname{Log}\operatorname{Log} x - \operatorname{Log}\operatorname{Log} 2 + 1 + \int_2^\infty \frac{\tau(t)}{t\operatorname{Log}^2 t}\,dt + \frac{\tau(x)}{\operatorname{Log} x} - \int_x^\infty \frac{\tau(t)}{t\operatorname{Log}^2 t}\,dt,$$

or $\tau(x) = O(1)$, donc si on pose

$$C_2 = 1 - \operatorname{Log}\operatorname{Log} 2 + \int_2^\infty \frac{\tau(t)}{t\operatorname{Log}^2 t}\,dt,$$

on a

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x) + C_2 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} x}\right).$$

Par ailleurs

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\delta}} = \delta \int_2^\infty \frac{D(t)}{t^{1+\delta}}\,dt = \delta \int_2^\infty \frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} t}{t^{1+\delta}}\,dt + \delta C_2 \int_2^\infty \frac{dt}{t^{1+\delta}} + O\left(\delta \int_2^\infty \frac{dt}{t^{1+\delta}\operatorname{Log} t}\right).$$

Or d'une part le changement de variable $u = \delta \operatorname{Log} t$ nous donne

$$\delta \int_1^\infty \frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} t}{t^{1+\delta}}\,dt = \int_0^\infty e^{-u} \operatorname{Log}(u/\delta)\,du = -\gamma - \operatorname{Log}\delta,$$

d'autre part

$$\delta \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1+\delta}} = 1,$$

par conséquent

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\delta}} = -\gamma - \operatorname{Log}\delta + C_2 - \delta \int_1^2 \frac{\operatorname{Log}\operatorname{Log} t + C_2}{t^{1+\delta}}\,dt + O\left(\delta \int_2^\infty \frac{dt}{t^{1+\delta}\operatorname{Log} t}\right)$$
$$= -\gamma - \operatorname{Log}\delta + C_2 + O(\delta)$$

et donc on a bien

$$\lim_{\delta\to 0} \left(\sum_{\mathfrak{p}} 1/N\mathfrak{p}^{1+\delta} + \operatorname{Log}\delta\right) = C_2 - \gamma.$$

LEMME 3. *On a*

(8) $$\lim_{y\to\infty} (\operatorname{Log} y)^{-1} \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y} (1 - 1/N\mathfrak{p})^{-1} = \varrho e^{\gamma}.$$

Démonstration. Soit

$$F(\delta) = \sum_{\mathfrak{p}} \{\operatorname{Log}(1 - 1/N\mathfrak{p}^{1+\delta}) + 1/N\mathfrak{p}^{1+\delta}\}.$$

C'est une série uniformément convergente et, par conséquent,

$$\lim_{\delta\to 0} F(\delta) = F(0);$$

de plus on a

$$F(\delta) = -\operatorname{Log}\zeta_K(1+\delta) + \sum_{\mathfrak{p}} 1/N\mathfrak{p}^{1+\delta} = -\operatorname{Log}\delta\zeta_K(1+\delta) + \sum_{\mathfrak{p}} 1/N\mathfrak{p}^{1+\delta} + \operatorname{Log}\delta.$$

ϱ étant le résidu de la fonction ζ_K en 1, on a

$$\lim_{\delta\to 0} (-\operatorname{Log}\delta\zeta_K(1+\delta)) = -\operatorname{Log}\varrho$$

et donc d'après (7)

(9) $$\lim_{\delta\to 0} F(\delta) = \sum_{\mathfrak{p}} \{\operatorname{Log}(1 - 1/N\mathfrak{p}) + 1/N\mathfrak{p}\} = -\operatorname{Log}\varrho + C_2 - \gamma.$$

Alors

$$\prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}(1-1/N\mathfrak{p})^{-1} = \exp\Big(-\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\operatorname{Log}(1-1/N\mathfrak{p})\Big)$$
$$= \exp\Big(\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant y}1/N\mathfrak{p}+\sum_{N\mathfrak{p}>y}\{\operatorname{Log}(1-1/N\mathfrak{p})+1/N\mathfrak{p}\}-F(0)\Big).$$

D'après (6) et (9) nous aurons

$$\prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}(1-1/N\mathfrak{p})^{-1} = \exp\big(\operatorname{Log}\operatorname{Log} y + C_2 + O(1/\operatorname{Log} y) + o(1) + \operatorname{Log}\varrho - C_2 + \gamma\big)$$
$$= \varrho \operatorname{Log} y e^{\gamma}(1+o(1)),$$

d'où le lemme.

Remarque. Il est clair d'après le Lemme 3 que

$$(10)\qquad \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}(1-1/N\mathfrak{p})^{-1} = O(\operatorname{Log} y).$$

LEMME 4. *Soit f la fonction définie par*

$$f(\mathfrak{a}) = \operatorname{Log} N\mathfrak{a} - \frac{1}{\varrho}d(\mathfrak{a}) + \frac{2C_1}{\varrho},$$

où $d = 1 * 1$. Alors

$$(11)\qquad F(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} f(\mathfrak{a}) = O(x^{\alpha}), \quad \text{où } 0<\alpha = 1-1/2d<1.$$

Démonstration. La méthode de l'hyperbole donne

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} d(\mathfrak{a}) = 2\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant\sqrt{x}} B_K(x/N\mathfrak{a}) - (B_K(\sqrt{x}))^2$$
$$= 2x\varrho \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant\sqrt{x}}(N\mathfrak{a})^{-1} + O(x^{1-1/d})\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant\sqrt{x}} N\mathfrak{a}^{(1/d)-1}$$
$$-(\varrho\sqrt{x}+O(x^{1/2-1/2d}))^2$$

d'après (1); donc d'après (3) et (4)

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} d(\mathfrak{a})$$
$$= 2x\varrho\big[\tfrac{1}{2}\varrho\operatorname{Log} x + C_1 + O(x^{-1/2d})\big] + O(x^{1-1/2d}) - \big[\varrho^2 x + O(x^{1-1/2d})\big]$$
$$= \varrho^2 x \operatorname{Log} x + \varrho(2C_1-\varrho)x + O(x^{1-1/2d}).$$

Donc en utilisant (1), (2) et ce qui précède on a

$$F(x) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\operatorname{Log} N\mathfrak{a} - \frac{1}{\varrho}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} d(\mathfrak{a}) + \frac{2C_1}{\varrho}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} 1,$$

d'où

$$F(x) = \varrho x \operatorname{Log} x - \varrho x + O(x^{1-1/d} \operatorname{Log} x) - \varrho x \operatorname{Log} x - (2C_1 - \varrho) x$$
$$+ O(x^{1-1/2d}) + 2C_1 x + O(x^{1-1/d}) = O(x^{1-1/2d}).$$

PROPOSITION 1. *On a au voisinage de l'infini*

$$M(x) = o(x) \Rightarrow \Psi(x) \sim x.$$

Démonstration. On remarque que la fonction d définie dans le Lemme 4 peut s'écrire

$$f = 1 * \left(\Lambda - \frac{1}{\varrho} 1 + \frac{2C_1}{\varrho} e\right),$$

où e est l'unité pour la convolution, donc

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} (\mu * f)(\mathfrak{a}) = \Psi(x) - \frac{1}{\varrho} B_K(x) + \frac{2C_1}{\varrho};$$

d'autre part la méthode de l'hyperbole donne

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} (\mu * f)(\mathfrak{a}) = \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant y} \mu(\mathfrak{a}) F(x/N\mathfrak{a}) + \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x/y} f(\mathfrak{a}) M(x/N\mathfrak{a}) - M(y) F(x/y),$$

donc $M(x) = o(x)$, $F(x) = O(x^{\alpha})$ avec $0 < \alpha = 1 - 1/2d < 1$ et (4) nous donnent

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant y} \mu(\mathfrak{a}) F(x/N\mathfrak{a}) = O\Big(x^{\alpha} \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant y} 1/N\mathfrak{a}^{\alpha}\Big) = O(x^{\alpha} y^{1-\alpha})$$

et

$$M(y) F(x/y) = O(x^{\alpha} y^{1-\alpha}),$$

d'autre part

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x/y} f(\mathfrak{a}) |M(x/N\mathfrak{a})| \leqslant \sup_{N\mathfrak{a} \leqslant x/y} |M(x/N\mathfrak{a})| \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x/y} |f(\mathfrak{a})|.$$

Posons $t = x/y$ et choisissons $y = \varepsilon x$, où ε tend vers zéro, nous aurons alors

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t} f(\mathfrak{a}) \left| M\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right) \right| \leqslant \sup_{N\mathfrak{a} \leqslant t} \left| M\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right) \right| \left[\frac{1}{\varrho} \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t} d(\mathfrak{a}) + \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t} \operatorname{Log} N\mathfrak{a} + \frac{2C_1}{\varrho} B_K(t)\right].$$

Or

$$\left[\frac{1}{\varrho} \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t} d(\mathfrak{a}) + \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t} \operatorname{Log} N\mathfrak{a} + \frac{2C_1}{\varrho} B_K(t)\right]$$
$$= \varrho t \operatorname{Log} t - \varrho t + O(t^{1-1/d} \operatorname{Log} t) + \varrho t \operatorname{Log} t + (2C_1 - \varrho) t + O(t^{\alpha}) + 2C_1 t + O(t^{1-1/d})$$
$$= O(t \operatorname{Log} t),$$

d'où

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} f(\mathfrak{a})\,|M(x/N\mathfrak{a})| \leqslant \operatorname*{Sup}_{N\mathfrak{a}\leqslant t} |M(x/N\mathfrak{a})|\cdot O(t\operatorname{Log} t).$$

De plus, puisque $M(x) = o(x)$, on peut choisir x assez grand pour que

$$\operatorname*{Sup}_{N\mathfrak{a}\leqslant t} |M(x/N\mathfrak{a})| \leqslant x/t^2.$$

On aura alors

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} f(\mathfrak{a})\, M\left(\frac{x}{N\mathfrak{a}}\right) = O\left(\frac{\operatorname{Log} t}{t}\right)x = O(-\varepsilon\operatorname{Log}\varepsilon)\,x = o(x),$$

donc

$$\Psi(x) - \frac{1}{\varrho}B_K(x) + \frac{2C_1}{\varrho} = \Psi(x) - x + O(x^{\alpha}) = O(\varepsilon^{1-\alpha}x) + o(x),$$

soit

$$\Psi(x) \sim x.$$

II. Nous allons à présent donner la démonstration du théorème des idéaux premiers.

Soient $y \geqslant 2$ et u_y, v_y deux fonctions complètement multiplicatives définies par

$$u_y(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 \text{ si } N\mathfrak{p} > y, \\ 0 \text{ si } N\mathfrak{p} \leqslant y \end{cases} \quad \text{et} \quad v_y(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 1 \text{ si } N\mathfrak{p} \leqslant y, \\ 0 \text{ si } N\mathfrak{p} > y. \end{cases}$$

On note

$$V_y(t) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a}).$$

LEMME 5. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} u_y(\mathfrak{a}) = \varrho \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right).$$

Démonstration. On commence par remarquer que les séries

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \quad \text{et} \quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{a})$$

sont absolument convergentes et que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}, \quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{a}) = \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right).$$

D'autre part, de la relation $u_y = v_y \mu * 1$ on déduit que

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} u_y(\mathfrak{a}) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{a}} v_y(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) = \sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x} v_y(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x/N\mathfrak{b}} 1$$

$$= \varrho x \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\mu(\mathfrak{a}) + O\left(x^{1-1/d} \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{1-1/d}}\right)$$

comme

$$\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^{1-1/d}} \leqslant \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1-1/d}}\right)^{-1}$$

et que

$$\prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1-1/d}}\right)^{-1} = O(1),$$

on a

$$\frac{1}{\varrho x}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} u_y(\mathfrak{a}) = \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) + o(1).$$

Lemme 6. *Soit h une fonction définie sur $[y, +\infty[$, positive, décroissante de dérivée continue. Alors*

1. *pour tout $u \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{y/u < N\mathfrak{p}\leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} h(u\cdot N\mathfrak{p}) = \int_y^{yu} \frac{h(v)}{v}\,dv + O(h(y));$$

2. *pour tout $u \geqslant y$, on a*

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} h(u\cdot N\mathfrak{p}) = \int_u^{yu} \frac{h(v)}{v}\,dv + O(h(y)).$$

Démonstration. On pose

$$\Psi_1(t) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant t} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}},$$

le lemme résulte de la relation $\Psi_1(t) = \operatorname{Log} t + O(1)$.

Lemme 7 ([3]). *Pour $s > 0$, définissons la fonction*

$$k(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{f(x)}\,dx, \qquad \text{où } f(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u}\,du.$$

Alors k est une fonction positive, décroissante et de dérivée continue; de plus on a

$$sk(s) - \int_s^{s+1} k(u)\,du = 1 \qquad \textit{pour tout } s > 0$$

et

$$\int_1^2 k(u)(2-u)\,du = c-1.$$

D'après une remarque de H. Delange, on peut établir que $c = e^\gamma$, où γ est la constante d'Euler. En effet:

$$\begin{aligned}\int_1^2 k(u)(2-u)\,du &= \int_1^2\Big(\int_0^\infty e^{-ux}e^{f(x)}\,dx\Big)(2-u)\,du\\ &= \int_0^\infty e^{f(x)}\Big(\int_1^2 e^{-ux}(2-u)\,du\Big)dx\\ &= \int_0^\infty e^{f(x)}\left(\frac{e^{-x}-1+x}{x^2}\right)e^{-x}\,dx = \int_0^\infty [(1-e^{-x})e^{f(x)-\mathrm{Log}\,x}]'\,dx.\end{aligned}$$

De plus, si $g(x) = (1-e^{-x})e^{f(x)-\mathrm{Log}\,x}$,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^{f(x)-\mathrm{Log}\,x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\exp\left(\int_0^x \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right) = \gamma$$

et

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^{f(x)} = 1,$$

d'où $c = e^\gamma$.

III. Nous passons à la démonstration du théorème des idéaux premiers.

1. De la relation $u_y * v_y = 1$ on déduit que

$$\mu(u_y * v_y) = \mu u_y * \mu v_y = \mu.$$

On a alors

$$M(x) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \mu(\mathfrak{a}),$$

donc

$$M(x) = \sum_{N\mathfrak{b}\leqslant x} \mu(\mathfrak{b})u_y(\mathfrak{b}) \sum_{N\mathfrak{c}\leqslant x/N\mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{c})v_y(\mathfrak{c}) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x} \mu(\mathfrak{a})u_y(\mathfrak{a})V_y(x/N\mathfrak{a}).$$

Soit à présent:

$$A = \{n \leqslant x;\ n = N\mathfrak{b} \text{ où } \mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_s \text{ avec } \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \text{ si } i\neq j \text{ et } N\mathfrak{p}_i \leqslant y\},$$

alors A est une partie non vide de N, nous pouvons donc l'ordonner par ordre strictement croissant; soit alors $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_r$ la suite croissante d'éléments de A.

Si $N\mathfrak{a} \in]x/d_{j+1}, x/d_j]$, on a

$$V_y(x/N\mathfrak{a}) = V_y(d_j) + \sum_{d_j < N\mathfrak{b} \leqslant x/N\mathfrak{a}} v_y(\mathfrak{b})\mu(\mathfrak{b}) = V_y(d_j).$$

Par conséquent

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to+\infty} \sum_{j\geqslant 1} |V_y(d_j)| \left\{\frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x/d_j} u_y(\mathfrak{a}) - \frac{1}{x} \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x/d_{j+1}} u_y(\mathfrak{a})\right\}$$

$$\leqslant \left[\sum_{j\geqslant 1} |V_y(d_j)| \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}}\right)\right] \varrho \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right)$$

en vertu du Lemme 5. En remarquant que

$$\sum_{j\geqslant 1} |V_y(d_j)| \left(\frac{1}{d_j} - \frac{1}{d_{j+1}}\right) = \int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt,$$

on obtient

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right| \leqslant \varrho \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) \left(\int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt\right).$$

2. Etude de l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt.$$

Pour $y \geqslant 2$ on écrit

$$\int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt = \int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt + \int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt.$$

2.1. *Etude de l'intégrale*

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt.$$

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $N\mathfrak{a} \leqslant y$, alors $v_y(\mathfrak{a}) = 1$, donc $V_y(t) = M(t)$ pour tout $t \leqslant y$. Posons

$$\delta = \overline{\lim_{x\to\infty}} \left|\frac{M(x)}{x}\right|,$$

alors pour tout $\beta > \delta$ il existe x_β tel que

$$x \geqslant x_\beta \Rightarrow |M(x)| \leqslant \beta x,$$

et posons

$$k = \begin{cases} \varrho & \text{si } \varrho > \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $k \geqslant \varrho$. Choisissons $\delta < \beta < 2k$.

LEMME 8. *Il existe une constante M telle que pour tous nombres a, b positifs on a*

$$\left|\int_a^b \frac{M(t)}{t^2}\right| \leqslant M.$$

Démonstration. On a

$$\int_a^b \frac{M(t)}{t^2} dt = \frac{M(a)}{a} - \frac{M(b)}{b} + \sum_{a \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant b} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}};$$

la formule $\mu * 1 = e$ donne

$$1 = \varrho x \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} + O\left(x^{1-1/d} \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{1-1/d}}\right),$$

donc

$$\sum_{N\mathfrak{a} \leqslant x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} = O(1);$$

d'autre part

$$\frac{|M(t)|}{t} \leqslant \varrho + O(t^{-1/d}),$$

d'où le résultat.

LEMME 9. *Pour tout $y \geqslant x_\beta$ on a*

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} y + O(1),$$

où $\alpha = \inf(2, 1 + \beta^2/4kM)$.

Démonstration. Soit y_1 le premier réel $> x_\beta$ pour lequel $M(y_1) = 0$.

Nous recouvrons l'intervalle $]y_1, y[$ par des intervalles $[y_j, y_{j+1}[$ où la fonction M garde un signe constant, nous avons donc

$$|M(x)| \leqslant \beta x \quad \text{pour } x \geqslant x_\beta,$$

$$M(y_j) = 0,$$

$$\left|\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{M(t)}{t^2} dt\right| \leqslant M.$$

Nous allons étudier

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt$$

pour chacun des trois cas suivants:

(i) $$M \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j};$$

dans ce cas

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|M(t)|}{t^2} dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}.$$

(ii) $$M > \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j} \quad \text{et} \quad \frac{y_{j+1}}{y_j} \leqslant \frac{1}{1-\beta/2k};$$

dans ce cas on écrit

$$|M(t)| = |M(t) - M(y_j)| \leqslant \sum_{y_j \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t} |\mu(\mathfrak{a})| \leqslant \varrho(t-y_j) + O(t^{1-1/d})$$

et

$$y_j \leqslant t < y_{j+1} < \frac{y_j}{1-\beta/2k} \Rightarrow \varrho(t-y_j) < t\frac{\beta\varrho}{2k} < t\frac{\beta}{2}$$

(car $\varrho \leqslant k$), donc

$$|M(t)| \leqslant t\frac{\beta}{2} + O(t^{1-1/d})$$

et

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j} + O\Big(\int_{y_j}^{y_{j+1}} t^{-1-1/d} dt\Big).$$

(iii) $$M > \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j} \quad \text{et} \quad \frac{y_{j+1}}{y_j} > \frac{1}{1-\beta/2k};$$

dans ce cas

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt = \int_{y_j}^{y_j/(1-\beta/2k)} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt + \int_{y_j/(1-\beta/2k)}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt$$

et

$$\int_{y_j/(1-\beta/2k)}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2} dt = \int_{y_j/(1-\beta/2k)}^{y_{j+1}} \frac{|M(t)|}{t^2} dt$$
$$\leqslant \beta \int_{y_j/(1-\beta/2k)}^{y_{j+1}} \frac{dt}{t} = \beta \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}\Big(1 - \frac{\beta}{2k}\Big),$$

d'où

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant \frac{-\beta}{2} \operatorname{Log}\left(1-\frac{\beta}{2k}\right)+\beta \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}\left(1-\frac{\beta}{2k}\right)+O\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} t^{-1-1/d}\,dt\right).$$

Comme $0 \leqslant \beta/2k < 1$, l'inégalité $\operatorname{Log}(1-u) \leqslant -u$ si $0 \leqslant u < 1$ entraîne

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant -\frac{\beta^2}{4k}+\beta \operatorname{Log}\frac{y_{j+1}}{y_j}+O\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} t^{-1-1/d}\,dt\right).$$

Or

$$\alpha = \inf\left(2,\ 1+\frac{\beta^2}{4kM}\right) \quad \text{et} \quad M > \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j},$$

donc

$$-\frac{\beta^2}{4k}+\beta \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j} < M(1-\alpha)+\beta \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j} < \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}$$

et

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}+O\left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} t^{-1-1/d}\,dt\right),$$

d'où

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt = \int_1^{x_\beta} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt+\int_{x_\beta}^{y_1} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt+\sum_{j\geqslant 1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt,$$

donc d'après le Lemme 8:

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant M+\sum_{j\geqslant 1} \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} \frac{y_{j+1}}{y_j}+O\left(\int_{y_1}^{y} t^{-1-1/d}\,dt\right)$$

soit

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Log} y+O(1).$$

2.2. *Etude de l'intégrale*

$$\int_y^\infty \left(|V_y(t)|/t^2\right)dt.$$

LEMME 10. *Soit h une fonction positive, décroissante de classe C^1; alors*

$$\int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}\left[h(t)\operatorname{Log} t-\int_t^{yt}\frac{h(v)}{v}dv\right]dt$$

$$\leqslant \int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}\left(\int_y^{yt}\frac{h(v)}{v}\,dv\right)dt+O\big(h(y)\operatorname{Log} y\big).$$

Démonstration. On a

$$\int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}(\operatorname{Log} t)\,h(t)\,dt \leqslant \int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})\operatorname{Log} N\mathfrak{a}\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt$$

$$+\int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})\operatorname{Log}\frac{t}{N\mathfrak{a}}\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt,$$

puisque h est positive et décroissante, on peut écrire

$$\int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})\operatorname{Log}\frac{t}{N\mathfrak{a}}\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt \leqslant h(y)\int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\operatorname{Log}\frac{t}{N\mathfrak{a}}\Big|\frac{dt}{t^2}$$

$$\leqslant h(y)\sum_{\mathfrak{a}}\frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\int_1^\infty \frac{\operatorname{Log} u}{u^2}\,du$$

et

$$h(y)\sum_{\mathfrak{a}}\frac{v_y(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}}\int_1^\infty \frac{\operatorname{Log} u}{u^2}\,du = O\big(h(y)\operatorname{Log} y\big)$$

(Lemmes 3 et 5); d'autre part, de la relation

$$-\mu v_y \operatorname{Log} = v_y\Lambda * \mu v_y$$

on déduit

$$I = \int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\mu(\mathfrak{a})\operatorname{Log} N\mathfrak{a}\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt$$

$$= \int_y^\infty \Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant t} v_y(\mathfrak{a})\,\Lambda(\mathfrak{a})\,V_y\Big(\frac{t}{N\mathfrak{a}}\Big)\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt$$

$$\leqslant \int_y^\infty \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant t} v_y(\mathfrak{p})\operatorname{Log} N\mathfrak{p}\,\Big|V_y\Big(\frac{t}{N\mathfrak{p}}\Big)\Big|\frac{h(t)}{t^2}+F,$$

où

$$F = \int_y^\infty \sum_{\substack{N\mathfrak{p}^r\leqslant t\\ r\geqslant 2}} v_y(\mathfrak{p}^r)\operatorname{Log} N\mathfrak{p}\,\Big|V_y\Big(\frac{t}{N\mathfrak{p}^r}\Big)\Big|\frac{h(t)}{t^2}\,dt,$$

$$F \leqslant h(y)\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^r\\ r\geqslant 2}}\frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^r}\int_{y/N\mathfrak{p}^r}^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,dt \leqslant h(y)\sum_{N\mathfrak{p}^r}\frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^r}\int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,dt.$$

Soit $F = O(h(y) \operatorname{Log} y)$ par les Lemmes 3 et 5. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
&\int_y^\infty \sum_{N\mathfrak{p} \leqslant t} v_y(\mathfrak{p}) \operatorname{Log} N\mathfrak{p} \left| V_y\left(\frac{t}{N\mathfrak{p}}\right)\right| \frac{h(t)}{t^2}\, dt \\
&\qquad = \sum_{N\mathfrak{p} \leqslant y} \operatorname{Log} N\mathfrak{p} \int_y^\infty \left| V_y\left(\frac{t}{N\mathfrak{p}}\right)\right| \frac{h(t)}{t^2}\, dt \\
&\qquad = \sum_{N\mathfrak{p} \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \left\{ \int_{y/N\mathfrak{p}}^{y} |V_y(u)| \frac{h(u \cdot N\mathfrak{p})}{u^2}\, du + \int_y^\infty |V_y(u)| \frac{h(u \cdot N\mathfrak{p})}{u^2}\, du \right\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \int_{y/N\mathfrak{p}}^{y} |V_y(u)| \frac{h(u \cdot N\mathfrak{p})}{u^2}\, du \\
&\qquad = \int_1^y \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\sum_{y/u < N\mathfrak{p} \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} h(u \cdot N\mathfrak{p}) \right] du \\
&\qquad = \int_1^y \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\int_y^{yu} \frac{h(v)}{v}\, dv + O(h(y)) \right] du \\
&\qquad = \int_1^y \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\int_y^{yu} \frac{h(v)}{v}\, dv \right] du + O(h(y) \operatorname{Log} y),
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
&\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \int_y^\infty |V_y(u)| \frac{h(u \cdot N\mathfrak{p})}{u^2}\, du \\
&\qquad = \int_y^\infty \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant y} \frac{\operatorname{Log} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} h(u \cdot N\mathfrak{p}) \right] du \\
&\qquad = \int_y^\infty \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\int_u^{yu} \frac{h(v)}{v}\, dv + O(h(y)) \right] du \\
&\qquad = \int_y^\infty \frac{|V_y(u)|}{u^2} \left[\int_u^{yu} \frac{h(v)}{v}\, dv \right] du + O(h(y) \operatorname{Log} y).
\end{aligned}$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned}
\int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} (\operatorname{Log} t)\, h(t)\, dt &\leqslant \int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2} \left[\int_y^{yt} \frac{h(v)}{v}\, dv + O(h(y)) \right] dt \\
&\quad + \int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2} \left[\int_t^{yt} \frac{h(v)}{v}\, dv + O(h(y)) \right] dt + O(h(y) \operatorname{Log} y).
\end{aligned}$$

Soit

$$\int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}\left[h(t)\operatorname{Log} t-\int_t^{yt}\frac{h(v)}{v}dv\right]dt \leqslant \int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}\left[\int_y^{yt}\frac{h(v)}{v}dv\right]dt$$
$$+O\big(h(y)\operatorname{Log} y\big).$$

LEMME 11. *Pour tout* $y \geqslant x_\beta$, *on a*

$$\int_y^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}dt \leqslant \beta(e^\gamma-1)\operatorname{Log} y+O(1),$$

où γ *est la constante d'Euler.*

Démonstration. On considère la fonction h définie par

$$h(t)=\frac{1}{\operatorname{Log} y}k\left(\frac{\operatorname{Log} t}{\operatorname{Log} y}\right);$$

alors d'après le Lemme 7 on a, en posant $s=\operatorname{Log} t/\operatorname{Log} y$,

$$\int_y^{yt}\frac{h(v)}{v}dv=\int_1^{1+s}k(u)\,du \quad \text{et} \quad h(t)\operatorname{Log} t-\int_t^{yt}\frac{h(v)}{v}dv=1,$$

donc

$$\int_1^y \frac{|V_y(t)|}{t^2}\left[\int_y^{yt}\frac{h(v)}{v}dv\right]dt$$
$$=\int_1^{x_\beta}\frac{|M(t)|}{t^2}\Big[\int_1^{1+s}k(u)\,du\Big]dt+\int_{x_\beta}^y\frac{|M(t)|}{t^2}\Big[\int_1^{1+s}k(u)\,du\Big]dt.$$

Or

$$\int_1^{x_\beta}\frac{|M(t)|}{t^2}\Big[\int_1^{1+s}k(u)\,du\Big]dt \leqslant \frac{k(1)}{\operatorname{Log} y}\int_1^{x_\beta}|M(t)|\frac{\operatorname{Log} t}{t^2}dt$$
$$\leqslant \frac{k(1)}{\operatorname{Log} y}\left(\frac{\operatorname{Log}^2 x_\beta}{2}+O(1)\right)$$

et

$$\frac{k(1)}{\operatorname{Log} y}\left(\frac{\operatorname{Log}^2 x_\beta}{2}+O(1)\right)=O(1)$$

et

$$\int_{x_\beta}^y\frac{|M(t)|}{t^2}\Big[\int_1^{1+s}k(u)\,du\Big]dt=\int_1^2 k(u)\left[\int_{\sup(x_\beta,y^{u-1})}^y\frac{|M(t)|}{t^2}dt\right]du$$
$$\leqslant \beta(e^\gamma-1)\operatorname{Log} y.$$

2.3. *Conclusion.*

PROPOSITION 2. *On a*

$$\delta = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{|M(x)|}{x} = 0.$$

Démonstration. Nous avons vu que

$$\delta = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{|M(x)|}{x} \leqslant \varrho \prod_{N\mathfrak{p}<y} \left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) \int_1^\infty \frac{|V_y(t)|}{t^2}\,dt,$$

donc

$$\delta \leqslant \frac{\varrho}{\varrho e^\gamma \operatorname{Log} y(1+O(y))} \left[\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{Log} y + \beta(e^\gamma - 1)\operatorname{Log} y + O(1)\right]$$

lorsque $y \to +\infty$, nous trouvons $\delta \leqslant \beta[1-e^{-\gamma}(1-1/\alpha)]$. Le coefficient de β étant < 1, il résulte en faisant tendre β vers δ que $\delta = 0$.

TRAVAUX CITÉS

[1] S. A. Amitsur, *Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorem*, Canad. J. Math. 13 (1961), pp. 83–109.

[2] R. G. Ayoub, *On Selberg's lemma for algebraic fields*, ibidem 7 (1955), pp. 130–143.

[3] H. Daboussi, *On the prime number theorem*, C.R. Acad. Sci., Sér. 1, 298 (1984), pp. 161–164.

[4] F. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen*, New York 1949.

[5] H. N. Shapiro, *An elementary proof of the prime ideal theorem*, Comm. Pure Appl. Math. 2 (1949), pp. 309–323.

FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
1060 TUNIS

Reçu par la Rédaction le 25.5.1985