COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIII 1971 FASC. 1

EINE BEMERKUNG ÜBER IRRATIONALE WERTE UND NICHTFORTSETZBARKEIT VON POTENZREIHEN MIT GANZZAHLIGEN KOEFFIZIENTEN

VON

ROLF WALLISSER (FREIBURG I. BR.)

Ein klassischer Satz von Carlson [3] besagt, daß jede im Einheitskreis konvergente Potenzreihe mit ganzrationalen Koeffizienten entweder eine rationale Funktion darstellt oder über den Einheitskreis nichtfortsetzbar ist. Ist sie eine rationale Funktion, so ist sie Quotient zweier Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten. Verallgemeinerungen dieses Satzes in bezug auf den Konvergenzbereich und die arithmetische Natur der Koeffizienten stammen von Pólya [9], Popken [10] und Schwarz [12]. Spezielle Potenzreihen der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P([g_n])z^n$$

wurden auf ihr Konvergenzverhalten von Newman [8], Mordell [7], Meijer [6], Schwarz [12] und vor allem von Carroll und Kemperman [4] untersucht. Dabei ist $P(z)$ ein Polynom mit algebraischen Koeffizienten, und $\{g_n\}$ bezeichnet eine reelle Zahlenfolge. $[x]$ bedeutet die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Mit Hilfe einer zahlentheoretischen Methode soll hier ein weiterer Satz zu diesem Themenkreis beigetragen werden, der den Satz 2 aus [13] in gewisser Weise ergänzt. Es wird die Irrationalität gewisser Reihenwerte bewiesen, aus der sich mit Hilfe des Satzes von Carlson die Nichtfortsetzbarkeit spezieller Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten ableiten läßt.

Satz. *Es sei $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge ganzrationaler Zahlen mit den Eigenschaften*:

a) $f(n+l) = f(n)$, $l \geqslant 2$,

b) $f(n) \neq f(n+1)$ *für alle n.*

Ist dann $g > 2 \max_{n=1,2\ldots} |f(n)|$ *eine natürliche Zahl und* a *eine irrationale Zahl, für deren Kettenbruchentwicklung* $[a_0, a_1, \ldots]$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_{2n+1} > l$ *gilt, so ist*

$$H(g) = \sum_{n=0}^{\infty} f([an])\cdot g^{-n}$$

irrational.

Bemerkung. Mit Hilfe des Approximationssatzes von Roth [11] kann man leicht unter der Bedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n+1} > 2\cdot l$$

die Transzendenz von $H(g)$ folgern, und zwar ist nach einem Satz von Baker [1] für

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n+1} = \infty$$

$H(g)$ eine Liouvillesche Zahl, andernfalls eine S-oder T-Zahl. Man vergleiche hierzu auch die Arbeiten von Böhmer [2] und Mahler [5].

Unter Verwendung des Satzes von Carlson kann man sofort folgern:

KOROLLAR. *Die Folge* $f(n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ *und die Irrationalzahl* a *mögen die Voraussetzungen des vorausgehenden Satzes erfüllen. Dann besitzt die Potenzreihe*

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f([an])\cdot z^n$$

den Einheitskreis als natürliche Grenze.

Konkret ist zum Beispiel die Reihe

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}[en]\right)\cdot z^n$$

nicht über den Einheitskreis fortsetzbar. Dabei ist e die Basis des natürlichen Logarithmus.

Zum Beweis des Satzes benutzen wir einen Hilfssatz von Böhmer [2]:

HILFSSATZ. *Die Irrationalzahl* a *habe die regelmäßige Kettenbruchentwicklung* $[a_0, a_1, \ldots]$.

Mit

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, \qquad p_0 = a_0, p_1 = 1,$$

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, q_1 = a_1,$$

gilt für den n-ten Näherungsbruch von a *bekanntlich*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Ist dann r eine ganze Zahl mit $0 \leqq r \leqq q_{n+1}$, so gilt für $r \not\equiv 0(q_n)$

$$[ra] = \left[r\frac{p_n}{q_n}\right]$$

und für $r = mq_n$

$$[ra] = mp_n - \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Es sei nun

$$H\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}, g\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\cdot n\right]\right) g^{-n}.$$

Setzt man

$$n = lq_\nu m + q_\nu s + j, \qquad 0 \leqq j \leqq q_\nu - 1, 0 \leqq s \leqq l-1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

so erhält man wegen der Periodizität von f

$$H\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}, g\right) = \sum_{j=0}^{q_\nu-1} \sum_{s=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{\infty} f\left(q_\nu s + \left[\frac{p_\nu}{q_\nu} j\right]\right) g^{-(lq_\nu m + q_\nu s + j)}$$

oder

$$H\left(\frac{p_\nu}{q_\nu}, g\right) = \frac{P_\nu}{Q_\nu} \text{ mit } Q_\nu = g^{lq_\nu} - 1. \tag{1}$$

Nach dem Hilfssatz ergibt sich für gerades $\nu = 2\mu$

$$\left|H(g) - H\left(\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}, g\right)\right| = \left|\sum_{n=q_{2\mu}+1}^{\infty} \left(f([an]) - f\left(\left[\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}\cdot n\right]\right)\right) g^{-n}\right|$$

und daraus folgt

$$\left|H(g) - H\left(\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}, g\right)\right| \leqq cg^{-q_{2\mu+1}} \tag{2}$$

mit einer von den q_ν unabhängigen Konstanten $c > 0$.

Die Reihen $H(g)$ und $H(p_{2\mu}/q_{2\mu}, g)$ lassen sich als g-adische Entwicklungen mit den Resten r, $[-g/2] \leqslant r < [g/2]$, auffassen, die bekanntlich eindeutig sind. Aus der Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl a folgt:

$$a = \frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} + \frac{1}{(1+\eta) q_{2\mu} q_{2\mu+1}}, \qquad 0 < \eta < 1.$$

Ist nun r_0 eine natürliche Zahl, die den Bedingungen

$$(1+\eta) q_{2\mu+1}(q_{2\mu} - 1) < r_0 < (1+\eta) q_{2\mu+1}(q_{2\mu}+1), \qquad r_0 \not\equiv 0(q_{2\mu}),$$

genügt, so wird

$$\left[r_0 \frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}\right] + \frac{1}{q_{2\mu}} + \frac{q_{2\mu}-1}{q_{2\mu}} < r_0 a < \left[r_0 \frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}\right] + \frac{q_{2\mu}-1}{q_{2\mu}} + \frac{q_{2\mu}+1}{q_{2\mu}},$$

d.h. es gilt

$$[r_0 \alpha] = \left[r_0 \frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} \right] + 1.$$

Da nach Voraussetzung $f(n) \neq f(n+1)$ für alle natürlichen n ist, weichen die g-adischen Entwicklungen $H(g)$ und $H(p_{2\mu}/q_{2\mu}, g)$ mindestens an der r_0-ten Stelle voneinander ab. Daher sind $H(g)$ und $H(p_{2\mu}/q_{2\mu}, g)$ verschieden. Aus den Beziehungen (1) und (2) erhält man dann:

$$0 < \left| H(g) - \frac{P_{2\mu}}{Q_{2\mu}} \right| \leqslant c\, Q_{2\mu}^{-q_{2\mu+1}/l q_{2\mu}} < c\, Q_{2\mu}^{-a_{2\mu+1}/l}.$$

Da $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_{2n+1} > l$ ist, hat die Ungleichung

$$0 < \left| H(g) - \frac{P}{Q} \right| < Q^{-(1+\varepsilon)}, \qquad \varepsilon > 0,$$

unendlich viele verschiedene Lösungen in rationalen Zahlen P/Q. Daher ist $H(g)$ irrational.

LITERATUR

[1] A. Baker, *On Mahler's Classification of Transcendental Numbers*, Acta Mathematica 111 (1964), p. 97 - 120.

[2] E. Böhmer, *Transzendez dyadischer Brüche*, Mathematische Annalen 96 (1927), p. 367 - 377.

[3] F. Carlson, *Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), p. 1 - 13.

[4] F. W. Carroll and J. H. B. Kemperman, *Noncontinuable analytic functions*, Duke Mathematical Journal 32 (1965), p. 65 - 83.

[5] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Mathematische Annalen 101 (1929), p. 342 - 366.

[6] H. G. Meijer, *Irrational power series*, Indagationes Mathematicae 25 (1963), p. 682 - 690.

[7] L. J. Mordell, *Irrational power series*, Proceedings of the American Mathematical Society 12 (1961), p. 522 - 526.

[8] M. Newman, *Irrational power series*, ibidem 11 (1960), p. 699 - 702.

[9] G. Polya, *Sur les séries entières à coefficients entiers*, Proceedings of the London Mathematical Society II Ser. 21 (1921), p. 22 - 38.

[10] J. Popken, *Irrational power series*, Indagationes Mathematicae (1963), 25 p. 691 - 694.

[11] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematica 2 (1955), p. 1 - 20.

[12] W. Schwarz, *Irrationale Potenzreihen II*, Archiv der Mathematik 17 (1966), p. 435 - 437.

[13] R. Wallisser, *Einige Sätze über nichtfortsetzbare Potenzreihen*, Mathematische Zeitschrift 113 (1970), p. 61 - 67.

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1969