COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIII 1980 FASC. 1

EXEMPLES D'ESPACES DE BANACH AYANT LA PROPRIÉTÉ DE PROJECTION UNIFORME

PAR

C. SAMUEL (MARSEILLE)

La propriété d'approximation uniforme a été introduite par Pełczyński et Rosenthal (cf. [3]).

Définition. Un espace de Banach X a la *λ-propriété d'approximation uniforme* si pour tout entier k il existe un entier $N(k)$ tel que pour tout sous-espace E de X de dimension k il existe une application linéaire continue $T: X \to X$ telle que $\dim T(X) \leqslant N(k)$, $\|T\| \leqslant \lambda$ et $T(x) = x$ pour tout $x \in E$. Si de plus T peut être choisie parmi les projections de X, on dit que X a la *λ-propriété de projection uniforme*. Un espace de Banach X a la *propriété d'approximation uniforme* (resp. *de projection uniforme*) s'il a la λ-propriété d'approximation uniforme (resp. λ-propriété de projection uniforme) pour un réel λ convenable.

Dans [3] il est montré que tous les espaces $\mathscr{L}_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ont la propriété de projection uniforme, et dans [2] Lindenstrauss et Tzafriri montrent que tout espace d'Orlicz réflexif a la $(1+\varepsilon)$-propriété d'approximation uniforme pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Rappelons que si X est un espace de Banach et $q \in [1, \infty]$, $(X \oplus X \oplus \ldots)_q$ note l'ensemble des suites $x = (x_i)_i$ d'éléments de X telles que $(\|x_i\|)_i \in l_q$, muni de la norme $\|(x_i)_i\| = \|(\|x_i\|)_i\|_q$.

On note pour chaque entier n, $I_n = [n-1, n]$; on note $L_p(I_n)$ l'espace de Banach des classes de fonctions numériques Borel-mesurables sur I_n et de puissance p-ième intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue On note $L_p = L_p([0, 1])$.

THÉORÈME. *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et pour tout $1 \leqslant q \leqslant \infty$ l'espace $(L_p \oplus L_p \oplus \ldots)_q$ a la $(1+\varepsilon)$-propriété de projection uniforme.*

Puisque $(l_p \oplus l_p \oplus \ldots)_q$ est l'image d'une projection de norme 1 de $(L_p \oplus L_p \oplus \ldots)_q$ on a alors

Corollaire. *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et pour tout $1 \leqslant q \leqslant \infty$, l'espace $(l_p \oplus l_p \oplus \ldots)_q$ a la $(1+\varepsilon)$-propriété d'approximation uniforme.*

Démonstration du théorème. Fixons $1 \leqslant p < \infty$ et $1 \leqslant q < \infty$; le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$ se traite de la même façon avec des modifications évidentes. Nous identifions isométriquement $(L_p \oplus L_p \oplus \ldots)_q$ avec

$$E_{p,q} = \Big\{f\colon [0, \infty[\to \boldsymbol{R}\colon \forall n, f \in L_p(I_n) \text{ et } \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{I_n} |f(t)|^p dt\Big)^{q/p}\Big)^{1/q} < \infty\Big\}$$

muni de la norme

$$\|f\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{I_n} |f(t)|^p dt\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}.$$

Si $f \in E_{p,q}$, on définit, à un ensemble de mesure nulle près, le support de f:

$$S(f) = \{t \in [0, \infty[\colon f(t) \neq 0\}.$$

Avant de prouver le théorème nous allons tout d'abord démontrer par récurrence que

(R) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ et pour tout entier k il existe un entier $N(\varepsilon, k)$ tel que si $X_1, \ldots, X_k$ sont des éléments de $E_{p,q}$ dont les supports sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près, alors il existe $P\colon E_{p,q} \to E_{p,q}$ — une projection qui a les propriétés suivantes:

1. pour tout $f \in E_{p,q}$, $S(P(f)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} S(X_i)$;
2. pour tout $f \in E_{p,q}$, $\|P(f)\| \leqslant (1+\varepsilon)\big\|f|\bigcup_{i=1}^{k} S(X_i)\big\|$;
3. pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant k \Rightarrow \|P(X_i) - X_i\| \leqslant \varepsilon\|X_i\|$;
4. $\dim \operatorname{Im}(P) \leqslant N(\varepsilon, k)$.

Supposons tout d'abord $k = 1$. Soit X un élément non nul de $E_{p,q}$; notons ε le signe de X. L'application qui à $f \in E_{p,q}$ associe

$$\frac{1}{\|X\|^q}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{I_n} |X(t)|^p dt\Big)^{q/p-1} \int_{I_n} f(t)\varepsilon(t)|X(t)|^{p-1} dt\Big) X$$

est une projection qui vérifie (R). Supposons le résultat établi jusqu'au rang $k = m$.

Donnons-nous $X_1, \ldots, X_{m+1}$ des éléments normalisés de $E_{p,q}$ dont les supports sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près et donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Pour chaque entier n et $1 \leqslant i \leqslant m+1$, notons

$$a_{n,i} = \Big(\int_{I_n} |X_i(t)|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Soit N le plus petit entier tel que

$$N \geqslant \left(\frac{2m^{1/q}}{\varepsilon}\right)^p \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{N}\right)^{(1+q)/p} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Soit $J_1, \ldots, J_P$ une énumération des intervalles:

$$J_1 = \left[0, \frac{1}{N}\right[,$$

$$\left[\frac{1}{r+k/N}, \frac{1}{r+(k-1)/N}\right[\quad (r = 1, \ldots, N-1 \text{ et } k = 1, \ldots, N), \quad \{1\},$$

$$\left]r'+\frac{k'-1}{N}, r'+\frac{k'}{N}\right] \quad (r' = 1, \ldots, N-1 \text{ et } k' = 1, \ldots, N),$$

$$J_P =]N, \infty].$$

Les intervalles considérés sont d'une part les intervalles $[0, 1/N[$, $\{1\}$, $]N, +\infty]$ et d'autre part les intervalles provenant d'une partition de $]1, N]$ en $N(N-1)$ intervalles égaux et les intervalles qui s'en déduisent par inversion autour de 1.

On convient de noter $0/0 = 1$ et $a/0 = \infty$ si $a \neq 0$. Pour chaque m-uple par d'entiers $\{i_1, \ldots, i_m\}$ appartenant à $\{1, \ldots, P\}$ on note:

$$A_{i_1,\ldots,i_m} = \left\{n: \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p \in J_{i_1}, \ldots, \left(\frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}}\right)^p \in J_{i_m}\right\}.$$

Fixons $(i_1, \ldots, i_m)$ un m-uple d'entiers appartenant à $\{1, \ldots, P\}$. Pour $l = 1, \ldots, m+1$ notons $X_{l,i_1,\ldots,i_m}$ l'élément de $E_{p,q}$ défini par la relation suivante:

$$\forall t \in [0, \infty[\quad X_{l,i_1,\ldots,i_m}(t) = \begin{cases} X_l(t) & \text{si } t \in \bigcup_{n \in A_{i_1,\ldots,i_m}} I_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons définir $P_{i_1,\ldots,i_m}$ et pour cela nous examinons plusieurs cas.

1. $A_{i_1,\ldots,i_m} = \emptyset$.

On pose alors $P_{i_1,\ldots,i_m} = 0$.

2. L'un des entiers $i_1, \ldots, i_m$ est égal à 1.

Supposons pour fixer les idées que

$$n \in A_{i_1,\ldots,i_m} \Rightarrow \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p < \frac{1}{N}. \tag{1}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $X_{2,i_1,\ldots,i_m}, \ldots, X_{m+1,i_1,\ldots,i_m}$ et $\varepsilon/2$. Notons $P_{i_1,\ldots,i_m}$ une projection vérifiant (R) et remarquons que (1) entraîne

$$\|X_{1,i_1,\ldots,i_m}\| < \frac{1}{N^{1/p}} \|X_{m+1,i_1,\ldots,i_m}\|.$$

3. L'un des entiers $i_1, \ldots, i_m$ est égal à P.

Supposons pour fixer les idées que

$$n \in A_{i_1,\ldots,i_m} \Rightarrow \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p > N. \tag{2}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $X_{1,i_1,\ldots,i_m}, \ldots, X_{m,i_1,\ldots,i_m}$ et $\varepsilon/2$. Notons $P_{i_1,\ldots,i_m}$ une projection vérifiant (R) et remarquons que (2) entraîne

$$\|X_{m+1,i_1,\ldots,i_m}\| < \frac{1}{N^{1/p}} \|X_{1,i_1,\ldots,i_m}\|.$$

4. Pour $l = 1, \ldots, m$,

$$\frac{1}{N} \leqslant \left(\frac{a_{n,l}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leqslant N.$$

On peut se fixer les idées en supposant qu'il existe deux entiers $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ tels que

$$\frac{1}{N} \leqslant \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p, \ldots, \left(\frac{a_{n,i}}{a_{n,m+1}}\right)^p < 1,$$

$$1 < \left(\frac{a_{n,i+1}}{a_{n,m+1}}\right)^p, \ldots, \left(\frac{a_{n,j}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leqslant N,$$

$$1 = \frac{a_{n,j+1}}{a_{n,m+1}} = \ldots = \frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}}.$$

Il faut en outre souligner que i et j qui dépendent apparemment de $n \in A_{i_1,\ldots,i_m}$ n'en dépendent pas effectivement à cause de la définition de $A_{i_1,\ldots,i_m}$.

On peut alors trouver des entiers $r_1, \ldots, r_j \in \{1, \ldots, N-1\}$ et des entiers $k_1, \ldots, k_j \in \{1, \ldots, N\}$ tels que

$$1 \leqslant l \leqslant i \Rightarrow r_l + \frac{k_l - 1}{N} < \left(\frac{a_{n,m+1}}{a_{n,l}}\right)^p \leqslant r_l + \frac{k_l}{N}, \tag{3}$$

$$i+1 \leqslant l' \leqslant j \Rightarrow r_{l'} + \frac{k_{l'} - 1}{N} < \left(\frac{a_{n,l'}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leqslant r_{l'} + \frac{k_{l'}}{N}. \tag{4}$$

Notons

$$D = \prod_{l=1}^{i} (r_l N + k_l - 1).$$

Pour $1 \leqslant l \leqslant i$ notons

$$D_l = \frac{D}{r_l N + k_l - 1}$$

et pour $i+1 \leqslant l' \leqslant j$ notons

$$D^{l'} = D(r_{l'} N + k_{l'} - 1).$$

Avec ces notations (3) et (4) entraînent alors

$$(5) \qquad 1 \leqslant l \leqslant i \Rightarrow \frac{(a_{n,l})^p}{N^2 D_l} < \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} \leqslant \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(a_{n,l})^p}{N^2 D_l},$$

$$(6) \qquad i+1 \leqslant l' \leqslant j \Rightarrow \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} < \frac{(a_{n,l'})^p}{D^{l'}} \leqslant \left(1+\frac{1}{N}\right)\frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}.$$

Fixons $l \in \{1, \ldots, i\}$ (resp. $l' \in \{i+1, \ldots, j\}$). On peut trouver pour $r = 1, 2, \ldots, N^2 D_l$ (resp. $r' = 1, 2, \ldots, D^{l'}$) des éléments X_l^r (resp. $X_{l'}^{r'}$) appartenant à $E_{p,q}$, dont les supports sont deux-à-deux disjoints, tels que

$$(7_l) \qquad \|X_l^r \mid I_n\|^p = \frac{(a_{n,l})^p}{N^2 D_l}$$

pour tout $r = 1, 2, \ldots, N^2 D_l$ et pour tout $n \in A_{i_1,\ldots,i_m}$,

$$(7_{l'}) \qquad \|X_{l'}^{r'} \mid I_n\|^p = \frac{(a_{n,l'})^p}{D^{l'}}$$

pour tout $r' = 1, 2, \ldots, D^{l'}$ et pour tout $n \in A_{i_1,\ldots,i_m}$,

$$(8_l) \qquad \sum_{r=1}^{N^2 D_l} X_l^r = X_{l,i_1,\ldots,i_m},$$

$$(8_{l'}) \qquad \sum_{r'=1}^{D^{l'}} X_{l'}^{r'} = X_{l',i_1,\ldots,i_m}.$$

De même, pour $l'' \in \{j+1, \ldots, m+1\}$, on peut trouver pour $r'' = 1, 2, \ldots, ND$ des éléments $X_{l''}^{r''} \in E_{p,q}$ dont les supports sont deux-à-deux disjoints tels que

$$(7_{l''}) \qquad \|X_{l''}^{r''} \mid I_n\|^p = \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}$$

pour tout $r'' = 1, 2, \ldots, ND$ et pour tout $n \in A_{i_1,\ldots,i_m}$,

$$(8_{l''}) \qquad \sum_{r''=1}^{ND} X_{l''}^{r''} = X_{l'',i_1,\ldots,i_m}.$$

Notons

$$(9_l)\qquad a_l = \frac{1}{(N^2 D_l)^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} (a_{n,l})^q \Big)^{1/q} \quad \text{pour } l = 1, 2, \dots, i,$$

$$(9_{l'})\qquad a_{l'} = \frac{1}{(D^{l'})^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} (a_{n,l'})^q \Big)^{1/q} \quad \text{pour } l' = i+1, \dots, j,$$

$$(9_{l''})\qquad a_{l''} = \frac{1}{(ND)^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} (a_{n,m+1})^q \Big)^{1/q} \quad \text{pour } l'' = j+1, \dots, m+1.$$

Remarquons que (5) et (6) impliquent

$$(10)\qquad a_l < a_{m+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{1/p} a_l \quad \text{pour } l = 1, 2, \dots, i$$

et

$$(11)\qquad a_{m+1} < a_{l'} \leqslant \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{1/p} a_{m+1} \quad \text{pour } l' = i+1, \dots, j.$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant m+1$ et $t \in [0, \infty[$ on note $\varepsilon_i(t)$ le signe de $X_i(t)$. Donnons-nous $f \in E_{p,q}$.

Pour $l = 1, 2, \dots, i$ et $r = 1, 2, \dots, N^2 D_l$ on pose

$$\Phi_l^r(f) = \frac{1}{(a_l)^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(N^2 D_l)^{(p-q)/p}}{(a_{n,l})^{p-q}} \int_{I_n} |X_l^r(t)|^{p-1} \varepsilon_l(t) f(t)\, dt,$$

pour $l' = i+1, \dots, j$ et $r' = 1, 2, \dots, D^{l'}$ on pose

$$\Phi_{l'}^{r'}(f) = \frac{1}{(a_{l'})^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(D^{l'})^{(p-q)/p}}{(a_{n,l'})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{l'}^{r'}(t)|^{p-1} \varepsilon_{l'}(t) f(t)\, dt,$$

et pour $l'' = j+1, \dots, m+1$ et $r'' = 1, 2, \dots, ND$ on pose

$$\Phi_{l''}^{r''}(f) = \frac{1}{(a_{l''})^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(ND)^{(p-q)/p}}{(a_{n,m+1})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{l''}^{r''}(t)|^{p-1} \varepsilon_{l''}(t) f(t)\, dt.$$

Il est immédiat de vérifier par une double application de l'inégalité de Hölder que les séries qui figurent au second membre sont absolument convergentes. Notons alors

$$P_{i_1,\dots,i_m}(f) = \sum_{l=1}^{i} \sum_{r=1}^{N^2 D_l} \Phi_l^r(f) X_l^r + \sum_{l'=i+1}^{j} \sum_{r'=1}^{D^{l'}} \Phi_{l'}^{r'}(f) X_{l'}^{r'} + \sum_{l''=j+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} \Phi_{l''}^{r''}(f) X_{l''}^{r''}.$$

La disjonction des supports des fonctions X_l^r, $X_{l'}^{r'}$, $X_{l''}^{r''}$, $1 \leqslant l \leqslant i$ et $1 \leqslant r \leqslant N^2 D_l$, $i+1 \leqslant l' \leqslant j$ et $1 \leqslant r' \leqslant D^{l'}$, $j+1 \leqslant l'' \leqslant m+1$ et $1 \leqslant r'' \leqslant ND$ montre que, pour $1 \leqslant k \leqslant m+1$,

$$P_{i_1,\dots,i_m}(X_{k,i_1,\dots,i_m}) = X_{k,i_1,\dots,i_m}.$$

Evaluons $\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|$. Nous avons

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q = \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_l} |\Phi_l^r(f)|^p \frac{(a_{n,l})^p}{N^2 D_l} +$$
$$+ \sum_{l'=i+1}^{j}\sum_{r'=1}^{D^{l'}} |\Phi_{l'}^{r'}(f)|^p \frac{(a_{n,l'})^p}{D^{l'}} + \sum_{l''=j+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{l''}^{r''}(f)|^p \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}\Big]^{q/p}.$$

Les formules (5) et (6) impliquent alors

(12)

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q \leqslant \Big(1+\frac{1}{N}\Big)^{q/p} \frac{1}{(ND)^{q/p}} \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} (a_{n,m+1})^q \Big[\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_l} |\Phi_l^r(f)|^p +$$
$$+ \sum_{l'=i+1}^{j}\sum_{r'=1}^{D^{l'}} |\Phi_{l'}^{r'}(f)|^p + \sum_{l''=j+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{l''}^{r''}(f)|^p\Big]^{q/p}.$$

Notons

$$\Theta = \Big[\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_l} |\Phi_l^r(f)|^p + \sum_{l'=i+1}^{j}\sum_{r'=1}^{D^{l'}} |\Phi_{l'}^{r'}(f)|^p + \sum_{l''=j+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{l''}^{r''}(f)|^p\Big]^{1/p}.$$

En appliquant l'inégalité de Minkowski nous obtenons

$$\Theta \leqslant \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{l=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_l} \frac{(N^2D_l)^{p-q}}{(a_l)^{pq}(a_{n,l})^{p^2-pq}} \Big|\int_{I_n} |X_l^r(t)|^{p-1}\varepsilon_l(t)f(t)\,dt\Big|^p +$$
$$+ \sum_{l'=i+1}^{j}\sum_{r'=1}^{D^{l'}} \frac{(D^{l'})^{p-q}}{(a_{l'})^{pq}(a_{n,l'})^{p^2-pq}} \Big|\int_{I_n} |X_{l'}^{r'}(t)|^{p-1}\varepsilon_{l'}(t)f(t)\,dt\Big|^p +$$
$$+ \sum_{l''=j+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} \frac{(ND)^{p-q}}{(a_{l''})^{pq}(a_{n,m+1})^{p^2-pq}} \Big|\int_{I_n} |X_{l''}^{r''}(t)|^{p-1}\varepsilon_{l''}(t)f(t)\,dt\Big|^p\Big]^{1/p}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales figurant au second membre. D'après (7_l), $(7_{l'})$ et $(7_{l''})$ il vient

$$\Theta \leqslant \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{l=1}^{i} \frac{1}{(a_l)^{pq}} \Big(\frac{(a_{n,l})^p}{N^2 D_l}\Big)^{q-1} \int_{I_n\cap S(X_l)} |f(t)|^p\,dt +$$

$$+\sum_{l'=i+1}^{j}\frac{1}{(a_{l'})^{pq}}\left(\frac{(a_{n,l'})^{p}}{D^{l'}}\right)^{q-1}\int_{I_n\cap S(X_{l'})}|f(t)|^p dt+$$
$$+\sum_{l''=j+1}^{m+1}\frac{1}{(a_{l''})^{pq}}\left(\frac{(a_{n,m+1})^{p}}{ND}\right)^{q-1}\int_{I_n\cap S(X_{l''})}|f(t)|^p dt\Bigg]^{1/p}.$$

En utilisant (5), (6), (10) et (11) nous obtenons (avec la notation abrégée $\bigcup S(X_k)=\bigcup_{k=1}^{m+1}S(X_k)$)

$$\Theta\leqslant\frac{(1+1/N)^{q/p}}{(a_{m+1})^q}\sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}}\left(\frac{a_{n,m+1}}{(ND)^{1/p}}\right)^{q-1}\left(\int_{I_n\cap\bigcup S(X_k)}|f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\Theta\leqslant\frac{(1+1/N)^{q/p}}{a_{m+1}}\left(\sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}}\left(\int_{I_n\cap\bigcup S(X_k)}|f(t)|^p dt\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

En reportant cette dernière inégalité dans (12) on a alors

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q\leqslant\left(1+\frac{1}{N}\right)^{(q+q^2)/p}\sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}}\left(\int_{I_n\cap\bigcup S(X_k)}|f(t)|^p dt\right)^{q/p}.$$

Soit encore

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q\leqslant(1+\varepsilon)^q\sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}}\left(\int_{I_n\cap\bigcup S(X_k)}|f(t)|^p dt\right)^{q/p}$$

par le choix de N.

L'application linéaire $Q\colon E_{p,q}\to E_{p,q}$ définie pour tout $f\in E_{p,q}$ par

$$Q(f)=\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\{1,\dots,P\}^m}P_{i_1,\dots,i_m}(f)$$

est une projection; nous allons établir qu'elle satisfait (R). Les propriétés (R1) et (R4) sont visiblement satisfaites. Notons

$$\begin{aligned}
\Lambda_1&=\{(i_1,\dots,i_m)\in\{1,\dots,P\}^m\colon A_{i_1,\dots,i_m}=\emptyset\},\\
\Lambda_2&=\{(i_1,\dots,i_m)\in\{1,\dots,P\}^m\colon 1\in\{i_1,\dots,i_m\}\},\\
\Lambda_3&=\{(i_1,\dots,i_m)\in\{1,\dots,P\}^m\colon P\in\{i_1,\dots,i_m\}\},\\
\Lambda_4&=\{1,\dots,P\}^m\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2\cup\Lambda_3).
\end{aligned}$$

Donnons-nous $f\in E_{p,q}$; nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|Q(f)\|^q&=\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Lambda_4}\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q\\
&\leqslant\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Lambda_4}(1+\varepsilon)^q\Big\|f\big|\bigcup_{k=1}^{m+1}S(X_{k,i_1,\dots,i_m})\Big\|^q
\end{aligned}$$

d'après la construction de $P_{i_1,\dots,i_m}$, donc

$$\|Q(f)\| \leqslant (1+\varepsilon)\Big\|f|\bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)\Big\|,$$

ce qui établit (R2). Pour établir (R3) fixons $k \in \{1, \dots, m+1\}$; nous avons alors

$$\|Q(X_k)-X_k\|^q = \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in \Lambda_2\cup\Lambda_3\cup\Lambda_4} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q.$$

Remarquons d'abord que, par construction, pour $(i_1, \dots, i_m)\in \Lambda_4$,

$$P_{i_1,\dots,i_m}(X_k) = X_{k,i_1,\dots,i_m}.$$

Deux cas sont à envisager:

1. $k \in \{1, \dots, m\}$.

Par construction nous avons, pour $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_3$,

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|X_{k,i_1,\dots,i_m}\|.$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q \\
&= \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k=1}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q + \\
&\quad + \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k\neq 1}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q \\
&\leqslant \frac{1}{N^{q/p}} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k=1}} \|X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k\neq 1}} \|X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q,
\end{aligned}$$

donc

$$\|Q(X_k)-X_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N^{1/p}} \leqslant \varepsilon$$

d'après le choix de N.

2. $k = m+1$.

Par construction nous avons, pour $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda_2$,

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1})-X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|.$$

Nous avons aussi

$$\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1})-X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3\\ i_k=P}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1})-X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3\\ i_k=P}} \frac{1}{N^{q/p}} \|X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q \leqslant \frac{m}{N^{q/p}},$$

donc

$$\|Q(X_{m+1})-X_{m+1}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{m^{1/q}}{N^{1/p}} \leqslant \varepsilon$$

d'après le choix de N, ce qui achève la démonstration par récurrence.

Le théorème se déduit alors de la propriété établie par récurrence, de la proposition 3 de [2] et des méthodes de perturbation (cf. lemme 2-4 de [1]).

TRAVAUX CITÉS

[1] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics 9 (1971), p. 488-506.

[2] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *The uniform approximation property in Orlicz spaces*, ibidem 23 (1976), p. 142-155.

[3] A. Pełczyński and H. P. Rosenthal, *Localization techniques in L^p-spaces*, Studia Mathematica 52 (1975), p. 263-289.

Reçu par la Rédaction le 25. 10. 1977