COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXII 1971 FASC. 2

*QUELQUES RÉSULTATS ET PROBLÈMES EN ALGÈBRE DES MESURES CONTINUES**

PAR

S. HARTMAN ET C. RYLL-NARDZEWSKI (WROCŁAW)

1. L'algèbre $M(G)$ des mesures boréliennes finies à valeurs complexes sur un groupe abélien localement compact G a été profondément étudiée sans que sa structure soit élucidée d'une manière satifaisante, même pour le cas $G = \boldsymbol{T}$ (groupe du cercle). Rappelons que le *produit* de deux mesures dans $M(G)$ est défini comme leur convolution $\mu_1 * \mu_2$. Par conséquent, la classe $M_c(G)$ de toutes les mesures continues (dites aussi *diffuses*), c.-à-d. s'annulant sur tout emsemble à un point, est un idéal fermé dans $M(G)$. Cet idéal intervient souvent dans l'étude de $M(G)$, mais il peut être aussi considéré séparément comme une algèbre de Banach. C'est alors une algèbre encore moins maniable que $M(G)$ en tant qu'elle manque d'unité son spectre étant ainsi un espace non compact.

Si l'on adjoint à $M_c(T)$ la mesure unité δ_0, on obtient une algèbre $M_c'(T)$ dont le *spectre* $\mathfrak{M}(M_c')$ (c.-à-d. l'espace de Gelfand, composé de tous les idéaux maximaux) se compose de $\boldsymbol{Z}$ (le groupe des entiers) et d'une partie qu'on trouve connexe. Pour le prouver admettons le contraire. A savoir, soit $\mathfrak{M}(M_c')\setminus\boldsymbol{Z} = C_1 \cup C_2$ ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$, C_1 et C_2 — deux fermés non vides) et soient $U_1 \supset C_1$ et $U_2 \supset C_2$ deux ouverts disjoints. Quitte à changer U_1 et U_2 d'un nombre fini d'éléments on a $\boldsymbol{Z} \subset U_1 \cup U_2$ et un des cas suivants se présente: ou bien $\boldsymbol{Z}$ est contenu dans un de ces ouverts, par exemple dans U_1, ou bien les ensembles $\boldsymbol{Z} \cap U_1$ et $\boldsymbol{Z} \cap U_2$ sont infinis tous les deux. Comme $\mathfrak{M}(M_c') = U_1 \cup U_2$, l'algèbre $M_c'(\boldsymbol{T})$ admet une décomposition en deux idéaux fermés, I_1 et I_2, à cospectre U_1 et U_2 respectivement (voir [10], p. 87). Or, dans le premier cas on aurait $\hat{\mu}(n) = 0$ pour tout n entier et tout $\mu \in I_1$, $\hat{\mu}$ désignant la transformée de Fourier de μ, donc $I_1 = (0)$, et U_2 serait vide. Dans le second cas δ_0 serait la somme de deux idempotents non triviaux dans $M_c'(\boldsymbol{T})$, à savoir on aurait $\delta_0 = \mu_1 + \mu_2$ (donc $\hat{\mu}_1(n) + \hat{\mu}_2(n) = 1$ pour tout $n \in Z$)

* Les résultats de cette communication ont été annocés au IV$^{\text{ème}}$ Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine (17–24 IX 1969 à Bucarest et Brashov).

et $\hat{\mu}_1(n) = 0$ ou 1 selon que $n \in U_1$ ou $n \in U_2$. Tout élément idempotent de $M'_c(\boldsymbol{T})$ est de la forme $\nu + a\delta_0$, où $\nu \in M_c(\boldsymbol{T})$ et $a = 0$ ou 1, donc ou bien $\mu_1 \in M_c(\boldsymbol{T})$ ou bien $\mu_2 \in M_c(\boldsymbol{T})$. Ceci est cependant impossible vu que ([7], p. 61 ou [1]), pour tout idempotent μ dans $M(T)$, la suite $\{\hat{\mu}(n)\}$ ne diffère d'une suite périodique composée de 0 et 1 que d'un nombre fini de termes; selon le théorème connu de Wiener, on a

$$\lim_N \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} |\hat{\mu}(n)| = 0 \quad \text{pour tout } \mu \in M_c(T).$$

Donc, si, par exemple, $\mu_1 \in M_c(\boldsymbol{T})$, on devrait avoir toujours $\hat{\mu}_1(n) = 0$ pour $|n|$ suffisamment grand.

Ainsi, le spectre $\mathfrak{M}(M_c)$ de $M_c(\boldsymbol{T})$, c.-à-d. l'espace des idéaux maximaux modulaires, se compose de $\boldsymbol{Z}$ et d'une partie qui n'est pas représentable comme réunion de deux ensembles disjoints, dont l'un est compact et l'autre fermé (parce que, dans le cas contraire, l'ensemble $\mathfrak{M}(M'_c) \setminus \boldsymbol{Z}$, qui ne diffère de $\mathfrak{M}(M_c) \setminus \boldsymbol{Z}$ que par un seul point compactifiant, se montrerait non connexe). En tenant compte de ce que, pour $\mu \in M_c$, la transformée de Gelfand $\tilde{\mu}$ de μ tend vers 0 à l'infini, on a donc le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si $\mu \in M_c(\boldsymbol{T})$ et si a est la valeur de $\hat{\mu}$ dans un point de $\mathfrak{M}(M_c) \setminus \boldsymbol{Z}$ (en particulier, si a est un point limite de la suite $\{\hat{\mu}(n): n \in \boldsymbol{Z}\}$), alors le spectre de μ est connexe entre 0 et a.*

Une mesure $\mu \in M(\boldsymbol{T})$ s'appelle *normale* [3], si son spectre est contenu dans $\{\hat{\mu}(n): n \in \boldsymbol{Z}\} \cup (0)$. Le théorème 1 donne une réponse affirmative au problème 13 (P 406) dans [3], à savoir: pour une mesure normale et continue on a toujours $\hat{\mu}(n) \to 0$. En effet, si $\hat{\mu}(n_k) \to a \neq 0$ pour une suite $\{n_k\}$, le spectre de μ contient tout un arc dans $\boldsymbol{C}$.

Par contre, l'ensemble $\overline{\boldsymbol{Z}} \setminus \boldsymbol{Z}$ ($\overline{\boldsymbol{Z}}$ = l'adhérence de $\boldsymbol{Z}$ dans $\mathfrak{M}(M_c)$) se montre décomposable en deux parties fermées dont l'une est compacte parce qu'il existe des mesures continues pour lesquelles $\hat{\mu}(n)$ prend toutes les valeurs $1/2^k$ ($k > 0$ entier), chacune sur un ensemble infini, e s'annulle ailleurs. Une telle mesure peut être obtenue à partir de toute suite suffisamment lacunaire $\{n_j\}$, si l'on pose $\hat{\mu}(n_j) = \frac{1}{2}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $\hat{\mu}(n) = 1/2^k$ pour $n = \sum_{r=1}^{k} \pm n_{j_r}$ (la condition de lacunarité entraîne l'univocité de cette représentation) et $\hat{\mu}(n) = 0$ ailleurs. En particulier, c'est le cas pour les suites „surtriadiques", c.-à-d. assujetties à la condition $n_{j+1}/n_j \geqslant 3$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (voir [9], p. 208, et [5]). Les mêmes conditions de lacunarité assurent aussi que la suite $\{n_j\}$ a la propriété suivante: pour toute suite bornée de nombre complexes $\{\beta_j\}$ il existe une mesure continue dont la transformée $\hat{\mu}$ prend aux points n_j les valeurs β_j respectivement. Si $\{n_j\}$ est suffisamment lacunaire, surtriadique par exemple, une telle mesure peut être définie par la série de Fourier-Stieltjes représentant le produit de Riesz $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\beta_j \cos n_j x)$ ([9], p. 208). En général, les suites ayant la dite propriété (nous les appellerons *fortement sidoniennes*) jouent pour $M_c(\boldsymbol{T})$ le même rôle que les suites de Sidon par rapport à $M(\boldsymbol{T})$ (toute suite bornée sur un ensemble de Sidon peut être prolongée à la transformée $\hat{\mu}$ d'une mesure non nécessairement continue) (¹).

Nous donnerons à ce propos une caractérisation simple des ensembles de Sidon,

Les ensembles de Sidon sont caractérisés par la condition $\bar{E} = \beta(E)$, ou $\bar{E}$ signifie l'adhérence de E dans $\mathfrak{M}(M)$ — l'espace de Gelfand pour l'algèbre $M(\boldsymbol{T})$, et β — le compactifié de Čech-Stone.

La condition est évidemment nécessaire. Pour prouver la suffisance commençons par la proposition que voici:

Les fonctions bornées sur un ensemble $E \subset \boldsymbol{Z}$ qui se laissent prolonger continûment sur $\bar{E}$ sont précisément celles qui appartiennent à l'adhérence uniforme $B(E)^-$ de l'algèbre $B(E)$ des restrictions à E des transformées $\hat{\mu}$ pour $\mu \in M(\boldsymbol{T})$.

Cela résulte du théorème de Weierstrass-Stone vu que les transformées $\hat{\mu}$ séparent les points de $\mathfrak{M}(M)$ et de ce que $\bar{\varphi} \in B(\boldsymbol{Z})$, si $\varphi \in B(\boldsymbol{Z})$.

Or, on sait (voir [7], p. 123) que les ensembles de Sidon peuvent être définis par la condition $B(E)^- = \mathscr{B}(E)$ — l'espace des fonctions bornées sur E. Ainsi, en admettant $\bar{E} = \beta(E)$, on trouve à cause de la proposition ce-dessus $B(E)^-$ égal à $\mathscr{B}(E)$, donc E est de Sidon.

L'adhérence d'une suite fortement sidonienne E dans $\mathfrak{M}(M_c)$ est compacte, car, si elle ne l'était pas, on aurait $\hat{\mu}(n_k) \to 0$ pour tout $\mu \in M_c(\boldsymbol{T})$ et une sous-suite convenable de E. Plus exactement, cette adhérence est le compactifié $\beta(E)$. On a donc le résultat suivant:

L'algèbre $M_c(\boldsymbol{T})$ contient $2^{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$) idéaux maximaux modulaires et, de plus, on a $\operatorname{card}(\overline{\boldsymbol{Z}}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

2. On dira qu'une partie E de $M_c(\boldsymbol{T})$ *engendre* un idéal fermé I, si I est le plus petit idéal fermé qui contient E. Grâce au fait que les suites lacunaires sont fortement sidoniennes il est aisé de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si un idéal fermé I dans $M_c(\boldsymbol{T})$ admet un système dénombrable de générateurs, il existe un idéal maximal modulaire qui le contient (en d'autres mots, le cospectre de I n'est pas vide).*

(¹) Ajouté en correction: tout Sidon est fortement sidonien, ce qui résulte de [2].

Démonstration. Si $\mu \in M_c(\boldsymbol{T})$, il existe une suite d'entiers $\{n_k\}$ telle que $\lim\limits_k \hat{\mu}(n_k) = 0$. On peut en extraire une suite fortement sidonienne $\{n_{k_j}\}$. Comme son adhérence dans $\mathfrak{M}(M_c)$ est compacte, il y a des points dans $\mathfrak{M}(M_c)$, où $\tilde{\mu} = 0$. Evidemment, les transformées de Gelfand des éléments de l'idéal engendré par μ s'annullent également dans tous ces points. Pour passer aux idéaux à plusieurs ou à une infinité dénombrable de générateurs, $\mu_1, \mu_2, \ldots$, on considérera la mesure $\mu = \sum\limits_i a_i \mu_i * \mu_i^*$, où $\mu_i^*(B) = \overline{\mu_i(-B)}$ et les nombres $a_i > 0$ sont choisis de manière à avoir $\sum\limits_i a_i \|\mu_i\|^2 < \infty$. On a alors $\hat{\mu} = \sum\limits_i a_i |\hat{\mu}_i|^2$, donc $\hat{\mu}_i(n_{k_j}) \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, si $\hat{\mu}(n_{k_j}) \to 0$ et l'on n'a qu'à répéter le raisonnement qui précède.

Il y a aussi des idéaux fermés qui n'admettent aucun système dénombrable de générateurs, mais dont le cospectre n'est pas vide. Tel est l'idèal J engendré par toutes les mesures continues portées par un parfait indépendant Q (l'ensemble Q étant appelé *indépendant*, si $l_1 t_1 + \ldots + l_k t_k = 0$, $l_j \in \boldsymbol{Z}$, $t_j \in Q$, t_j différents, entraîne $l_1 = \ldots = l_k = 0$).

Pour le prouver on aura besoin de la proposition suivante:

(*) *La convolution de deux mesures continues s'annulle sur tout ensemble indépendant* (cf. [8] pour des énoncés semblables).

Démonstration. Q étant indépendant, on a, en supposant μ_1 et μ_2 non négatives et continues

$$\mu_1 * \mu_2(Q) = \int \mu_1(Q-t)\, d\mu_2(t) = \sum_j \mu_1(Q-t_j)\mu_2(t_j)$$

pour une suite convenable $\{t_j\}$. A savoir, ce sont précisément les points t_j pour lesquels $\mu_1(Q-t_j) > 0$. Leur ensemble est dénombrable puisque les ensembles $Q-t'$ et $Q-t''$ $(t' \neq t'')$ ont un point commun au plus, μ_1 s'annulle sur tout point et $\|\mu_1\| < \infty$. Comme $\mu_2(t_j) = 0$ pour tout j, on a $\mu_1 * \mu_2(Q) = 0$. Pour deux mesures continues arbitraires on se servira de ce résultat et de la décomposition de Jordan.

Soit $M_c(Q)$ l'espace de toutes les mesures continues à support dans Q. En vertu de (*) toute mesure de la forme $\mu_0 + \mu_1 * \nu_1 + \ldots + \mu_l * \nu_l$ $(\mu_0, \mu_j \in M_c(Q), \nu_j \in M_c(\boldsymbol{T}))$ est orthogonale à toute mesure $\mu \in M_c(\boldsymbol{T})$ à support indépendant disjoint de Q, donc $\mu \notin J$. Ainsi, J est un idéal propre. Si J admettait un système dénombrable de générateurs, $\mu_1', \mu_2', \ldots$, tout élément de $M_c(Q)$ serait approchable en norme par des mesures de la forme $\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i \mu_i'$, compte tenu de ce que, vu (*), les mesures $\mu_i' * \nu$ $(\nu \in M_c(\boldsymbol{T}))$ ne peuvent qu'empirer l'approximation. Par conséquent, l'espace $M_c(Q)$ serait engendré par les mesures $\mu_i|_Q$ (c.-à-d. les μ_i restreintes à l'ensemble Q), ce qui est impossible vu la non-séparabilité de $M_c(Q)$. Enfin, pour se convaincre que le cospectre de J est non vide, on ajoutera à Q un parfait Q' de manière que $Q \cup Q'$ soit indépendant, on choisira une fonctionnelle linéaire $f \neq 0$ sur l'espace $M_c(Q \cup Q')$, de norme $\leqslant 1$, s'annulant sur

$M_c(Q)$, et on fera l'usage du théorème de Hewitt et Kakutani [4] disant qu'une telle fonctionnelle peut être prolongée à une fonctionnelle linéaire multiplicative sur $M_c(\boldsymbol{T})$ tout entier. Or, J est évidemment contenu dans l'idéal maximal modulaire $\{p \in M_c(\boldsymbol{T}): f(p) = 0\}$.

3. La proposition (*) montre que l'idéal $(M_c^2)^-$, engendré par toutes les convolutions $\mu * \nu$ possibles ($\mu, \nu \in M_c(\boldsymbol{T})$), est un idéal propre, en tant qu'aucune mesure continue non nulle, concentrée sur un ensemble indépendant Q ne peut être approchée par une somme de telles convolutions. Ce résultat est connu, à savoir il a été prouvé par Varopoulos dans [8] comme un corollaire des théorèmes moins élémentaires. On y constate de plus que $M_c(G)/M_c^2(G)^-$ est un espace non séparable quel que soit le groupe abélien G, localement compact et non discret. Ajoutons que $M_c(\boldsymbol{T})/M_c^2(\boldsymbol{T})^-$, même considéré comme algèbre, n'a aucun système dénombrable de générateurs puisque, si elle en avait un, il y aurait un ensemble dénombrable $\{\mu_j\}$ dans $M_c(\boldsymbol{T})$ qui, enrichi de toutes les convolutions $\mu * \nu$ ($\mu, \nu \in M_c(\boldsymbol{T})$), engendrerait $M_c(\boldsymbol{T})$. Or, en vertu de (*), tout $\mu \in M_c(Q)$ serait approchable par les combinaisons linéaires des μ_j. Il reste à répéter l'argument de non-séparabilité de $M_c(Q)$ pour aboutir à une contradiction.

On voit tout de suite que le cospectre de $(M_c^2)^-$ est vide. Donc, on a le résultat que voici:

THÉORÈME 3. *Le théorème tauberien de Wiener* (*disant que tout idéal fermé dans l'algèbre groupale commutative a un cospectre non vide*) *est en défaut pour l'algèbre* $M_c(\boldsymbol{T})$. *En d'autres mots: l'ensemble vide n'est pas de synthèse* (*spectrale*).

Cela étant, aucun ensemble à un point dans $\mathfrak{M}(M_c)$ n'est de synthèse: si I est l'idéal maximal qui correspond à un point $p \in \mathfrak{M}(M_c)$, on voit que le cospectre de l'idéal $I \cap (M_c^2)^-$ est (p), mais $I \cap (M_c^2)^- \neq I$, c.-à-d. $I \not\subset (M_c^2)^-$, parce que dans le cas contraire I ne serait pas maximal, vu que $(M_c^2)^- \neq M_c$.

Si J est un idéal fermé à cospectre F, alors $J \cap (M_c^2)^-$ a aussi F comme cospectre parce que, si l'on a $\tilde{\mu}^2(p) = 0$ pour tout $\mu \in J$, on a de même $\tilde{\mu}(p) = 0$ pour tout $\mu \in J$, donc $p \in F$. La conjecture suivante est à établir ou à réfuter:

L'algèbre $M_c(\boldsymbol{T})$ est totalement asynthétique, c.-à-d. aucun ensemble dans $\mathfrak{M}(M_c)$ n'est de synthèse. (**P 710**).

4. En étudiant l'algèbre $M_c(\boldsymbol{T})$ un nombre de questions se pose encore. En voici quelques unes qui nous paraissent surtout intéressantes:

Quels sont les ensembles $E \subset \boldsymbol{Z}$ dont l'adhérence dans $\mathfrak{M}(M_c)$ est compacte? En particulier, est-ce que ce ne sont pas seulement les ensembles fortement sidoniens? [2] (**P 711**).

[2] Non (voir le travail suivant [6]).

Remarquons que avoir l'adhérence compacte signifie qu'il y a une mesure continue avec $|\hat{\mu}(n)| \geqslant \delta > 0$ sur E. En effet, la suffisance de cette condition est évidente et pour voir la nécessité demandons que E soit disjoint à l'ensemble $\{p \in \mathfrak{M}(M_c)\colon |\hat{\mu}_i(p)| < \varepsilon;\ \mu_i \in M_c(T);\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ (un voisinage de l'infini). Alors $\big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i * \mu_i^*\big)^{\wedge} \geqslant \varepsilon^2$ sur E.

S'il existe des ensembles non sidoniens à adhérence compacte dans $\mathfrak{M}(M_c)$, on peut se demander, s'il y a une mesure $\mu \in M_c(\boldsymbol{T})$ telle qu'on ait $|\hat{\mu}(n)| \geqslant \delta > 0$ pour $n \in E \subset \boldsymbol{Z}$, E infini et $\hat{\mu}(n) = 0$ partout ailleurs. (Ce problème a été inséré dans le fascicule précédant comme P 695).

Certes, E devrait être de densité 0 parce que la valeur moyenne de $|\hat{\mu}|$ est 0 d'après le théorème de Wiener. D'autre part, E ne peut pas être de Sidon parce qu'il y aurait alors une mesure ν pour laquelle $\hat{\nu}(n) = 1/\hat{\mu}(n) (n \in E)$, donc $\mu * \nu$ serait un élément idempotent de $M(\boldsymbol{T})$, ce qui est incompatible au théorème, déjà utilisé (cf. **1**), sur la forme des idempotents. L'ensemble des valeurs de $\hat{\mu}$ devrait être infini puisque si $0, a_1, \ldots, a_s$ étaient toutes ses valeurs, on trouverait un polynôme w égal à 0 au point 0 et à 1 pour tout a_j, et $w(\mu)$ serait alors un idempotent „interdit". D'autre part, la fonction indicatrice c_E de E devrait appartenir à $B(E)^-$; on le voit, si l'on prend une fonction $\varphi \in C(0, \max|\hat{\mu}(n)|^2)$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) = 1$ pour $t \geqslant \delta$, et une suite de polynômes $\{w_m\}$ dont la limite uniforme est φ. Alors, la suite $w_m(\mu * \mu^*)^{\wedge}$ tend uniformément vers c_E. Bien sûr, la condition $c_E \in B(E)^-$ ne suffit pas pour que E ait la propriété en question, tout ensemble lacunaire en étant un contre-exemple.

De même, il semble attrayant d'étudier les mesures continues sur $\boldsymbol{T}$ dont la transformée de Gelfand est à support compact infini. Il est facile d'obtenir une telle mesure, car il suffit de poser $\hat{\mu}(n_k) = 1/k$ pour une suite $\{n_k\}$ fortement sidonienne et $\hat{\mu}(n) = 0$ ailleurs. La mesure μ est absolument continue, donc $\tilde{\mu} = 0$ en dehors de $\boldsymbol{Z}$. Y a-t-il des mesures continues non absolument continues dont la transformée de Gelfand serait à support compact ? (**P 712**).

TRAVAUX CITÉS

[1] P. J. Cohen, *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures*, American Journal of Mathematics 82 (1960), p. 191–212.

[2] S. W. Drury, *Sur les ensembles de Sidon*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 271 (1970), p. 162–163.

[3] S. Hartman, *Some problems in the algebra of Borel measures*, Colloquium Mathematicum 10 (1963), p. 73–79.

[4] E. Hewitt and S. Kakutani, *A class of multiplicative linear functionals on the measure algebra of a locally compact abelian group*, Illinois Journal of Mathematics 4 (1960), p. 553–574.

[5] E. Hewitt and H. Zuckerman, *Singular measures with absolutely continuous convolution squares*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 62 (1966), p. 399–420.
[6] R. Kaufman, *Remark on Fourier-Stieltjes transforms of continuous measures*, ce volume, p. 279–280.
[7] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, New York–London 1962.
[8] N. T. Varopoulos, *A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact abelian group*, Annales de l'Institut Fourier 16.1 (1966), p. 121–143.
[9] A. Zygmund, *Trigonometrical series, I*, Cambridge 1968 (en polonais).
[10] W. Żelazko, *Algebry Banacha*, Warszawa 1968.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 29. 12. 1969