COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LX/LXI DÉDIÉ À M. ANTONI ZYGMUND 1990

RECOUVREMENTS ALÉATOIRES ET THÉORIE DU POTENTIEL

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE (PARIS-ORSAY)

1. Introduction. Voici le contenu de cet article.

On jette au hasard sur le tore d-dimensionnel $\mathbf{T}^d$ des simplexes homothétiques de volumes donnés $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$; est-il vrai que le tore soit presque sûrement recouvert? Dans le cas $d = 1$, c'est un problème posé par Dvoretzky en 1956, complètement résolu par Shepp en 1972 (exemple 1, [12]), résolu également quand on se demande si une partie donnée de $\mathbf{T}$ est recouverte (exemple 2, [6]). On donne ici la solution pour $d > 1$ (proposition 9). Par exemple, le tore $\mathbf{T}^d$ est recouvert si $v_n = 1/n$ $(n \geq 2)$ (exemple 3). Comme étape on étudie le recouvrement de $\mathbf{R}^d$ par des convexes $x_n + z_n C$, lorsque les (x_n, z_n) sont les points d'un processus de Poisson ponctuel sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ d'intensité $\lambda \otimes \mu$, λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$ et μ une mesure donnée sur $\mathbf{R}^+$, et C un convexe donné (propositions 7 et 8). Dans le cas $d = 1$, c'est un problème de B. Mandelbrot [10], résolu par Shepp ([13], proposition 3). On donne ici la solution pour $d > 1$ quand C est un simplexe; le problème est encore ouvert pour des boules ou des cubes. Quand $d = 1$, on s'intéresse au cas de non-recouvrement; on donne la loi de la longueur de la composante connexe de la réunion $G = \bigcup (x_n, x_n + z_n)$ contenant un point donné (formule (65)), et on rappelle la condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact donné soit presque sûrement recouvert (proposition 4, [6]). La méthode est celle de temps d'arrêt introduit par Svante Janson [4], et la condition s'exprime en termes de capacité nulle par rapport à un certain noyau dépendant de μ et de d. Quoique la méthode soit simple, cette condition se comprend mieux quand on sait que la loi de l'ensemble $\mathbf{R}^+ \setminus \bigcup_{x_n > 0} (x_n, x_n + z_n)$ est la même que celle de l'adhérence d'un certain processus de Lévy croissant. Ce fait remarquable avait été indiqué par B. Mandelbrot sous certaines conditions auxiliaires [10], et établi en toute généralité par Fitzsimmons, Fridstedt et Shepp en 1985 [3]. Nous en indiquons ici une nouvelle approche, fondée sur l'identité des lois de l'image de la mesure de Lebesgue par un certain processus de Lévy, et de l'image de la mesure de Lebesgue par un opérateur lié à une famille de multiplications aléatoires (proposition 5).

On donnera tour à tour le cadre général des problèmes de recouvrements considérés, une série d'exemples sur $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^d$, la définition des recouvrements poissoniens, la méthode de temps d'arrêt et ses applications, la relation avec les processus de Lévy, la solution du problème d-dimensionnel, et enfin deux compléments (un théorème de Fan Ai-hua [2] et un problème de Russell Lyons [9]). Les résultats principaux concernant le problème d-dimensionnel ont été énoncés en [8].

1. Le cadre général. On donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, des objets aléatoires indépendants $G_n = G_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \ldots;\ \omega \in \Omega)$, un objet fixé K, et on cherche la probabilité pour que K soit recouvert une infinité de fois par les G_n. D'après la loi du zéro-un, c'est nécessairement 0 ou 1:

$$P(K \subset \overline{\lim}\, G_n) = 0 \text{ ou } 1. \tag{1}$$

On suppose naturellement que les objets G_n et K sont des parties d'un espace T, qui dans la suite sera $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}^d$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$. On prendra pour G_n des ouverts et pour K un fermé. Il est commode d'écrire

$$G_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in G_n, \\ 0 & \text{si } t \notin G_n. \end{cases} \tag{2}$$

Ainsi le problème est de savoir si, presque sûrement, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \tag{3}$$

diverge sur K. Dans ce sens, c'est un prolongement des questions introduites et traitées par Paley et Zygmund dans leur série d'articles *On some series of functions* [11].

Pratiquement, il est souvent préférable, au lieu de (3), de considérer les produits infinis

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{1 - G_n(t)}{1 - EG_n(t)} \tag{4}$$

où $E(\ )$ désigne l'espérance. Si K porte une mesure de probabilité σ (on écrit $\sigma \in M_1^+(K)$) telle que la martingale

$$S_N = \int \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - G_n(t)}{1 - EG_n(t)}\, \sigma(dt) \tag{5}$$

converge dans $L^2(\Omega)$, le produit infini ne peut être nul sur K p.s., donc

$$P(K \subset \overline{\lim}\, G_n) = 0. \tag{6}$$

Or la condition de convergence dans $L^2(\Omega)$ est $ES_N^2 = O(1)$, soit

$$\sup_N \iint k_N(s,t)\,\sigma(ds)\,\sigma(dt) < \infty \tag{7}$$

avec

$$k_N(s,t) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - EG_n(s) - EG_n(t) + EG_n(s)G_n(t)}{(1 - EG_n(s))(1 - EG_n(t))}. \tag{8}$$

On a ainsi le résultat le plus facile de la théorie.

PROPOSITION 1. *Si K porte une mesure de probabilité σ d'énergie bornée par rapport au noyau $k_N(s,t)$ quand $N \to \infty$, K est p.s. non recouvert une infinité de fois par les G_n.*

2. Recouvrements sur $\mathbf{T}$ ou $\mathbf{T}^d$. Voici des exemples.

EXEMPLE 1. Prenons $T = \mathbf{T}$, $G_n = (0, \ell_n) + \omega_n$, où (ℓ_n) est une suite positive donnée, comprise entre 0 et 1, et (ω_n) un échantillon (c'est-à-dire une suite de v.a. indépendantes équidistribuées) dont la distribution est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$, et prenons $K = \mathbf{T}$. En choisissant $\sigma(dt) = dt$ (mesure de Lebesgue), la condition (7) équivaut à

$$\int_0^{1/2} k(t)\,dt < \infty \tag{9}$$

avec

$$k(t) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (\ell_n - t)^+ \tag{10}$$

(($)^+$ désigne la partie positive). De plus (9) équivaut à

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) < \infty \tag{11}$$

à condition d'avoir $1 > \ell_1 \geq \ell_2 \geq \ldots$

C'est là l'exemple de référence. Le problème avait été posé par A. Dvoretzky, la condition (11) est la forme donnée par L. Shepp à la condition de non-recouvrement, et Shepp a établi qu'elle est *nécessaire et suffisante* pour avoir (6). Si donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ldots + \ell_n) = \infty \tag{12}$$

(ou, de manière équivalente, si

$$\int_0^{1/2} k(t)\,dt = \infty), \tag{13}$$

$\mathbf{T}$ est recouvert p.s. une infinité de fois par les G_n [12].

EXEMPLE 2. Prenons T et les G_n comme ci-dessus, et $K \subset \mathbf{T}$. Maintenant (7) équivaut à

$$\iint k(|t-s|)\,\sigma(ds)\,\sigma(dt) < \infty, \tag{14}$$

$k(\cdot)$ étant le noyau défini en (10), et l'hypothèse de la proposition s'écrit

$$\mathrm{Cap}_k K > 0 \tag{15}$$

(la capacité de K par rapport au noyau $k(\cdot)$ est strictement positive). C'est encore une condition *nécessaire et suffisante*. Si donc

$$\mathrm{Cap}_k K = 0, \tag{16}$$

K est recouvert p.s. une infinité de fois par les G_n [6].

EXEMPLE 3. Prenons $T = \mathbf{T}^d$, $G_n = g_n + \omega_n$, où les g_n sont des convexes fixés de volumes v_n $(1 > v_1 \geq v_2 \geq \ldots)$, (ω_n) un échantillon dont la distribution est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^d$, et $K = \mathbf{T}^d$. En choisissant pour σ la mesure de Lebesgue, la condition (7) équivaut à

$$\int_{\mathbf{T}^d} k(x)\,dx < \infty \tag{17}$$

avec

$$k(x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (g_n * \tilde{g}_n)(x), \tag{18}$$

où $*$ représente la convolution sur $\mathbf{T}^d$, et $g_n(x)$ et $\tilde{g}_n(x)$ sont les fonctions indicatrices de g_n et de $-g_n$. On vérifie que (17) est conséquence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 \exp(v_1 + \ldots + v_n) < \infty, \tag{19}$$

donc (19) entraîne (6) [5, p. 155].

Quand les g_n sont des simplexes homothétiques, la condition (17) est *nécessaire et suffisante* pour avoir (6). La condition dépend de la suite (v_n) et de d. La condition (19) est toujours suffisante, et la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(v_1 + \ldots + v_n) < \infty \tag{20}$$

toujours nécessaire. Evidemment, si $v_n = O(1/n)$, les conditions (19) et (20) sont les mêmes et équivalent à (17) [8].

Nous verrons dans la suite d'autres exemples dans lesquels la proposition 1, comme dans les cas exposés ci-dessus, donne la condition nécessaire et suffisante de non-recouvrement. Il est bon de voir qu'il n'en est pas toujours ainsi.

EXEMPLE 4. Prenons $T = K = \mathbf{T}$ et (ω_n) comme dans l'exemple 1, (ℓ_n) une suite arbitraire strictement comprise entre 0 et 1 (rien n'empêche qu'elle tende vers 1), et

$$G_n(t) = g_n(t-\omega_n), \qquad g_n(t) = \chi_n(\lambda_n t) \qquad (\lambda_n \text{ entier } > 0), \tag{21}$$

où χ_n est la fonction indicatrice de $(0, \ell_n)$. Il est élémentaire qu'on peut choisir les λ_n croissant assez vite pour que, quel que soit le choix des ω_n, la série (3) converge sur un ensemble dense sur $\mathbf{T}$. Cependant le noyau $k_\infty(s,t)$ donné par (8) est de la forme $k(t-s)$ avec

$$k(t) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\xi_n(\lambda_n t)}{(1-\ell_n)^2}\right), \qquad \xi_n = \chi_n * \tilde{\chi}_n - \ell_n^2, \tag{22}$$

et on peut très bien avoir $\int k(t)\,dt = \infty$ (par exemple, $\ell_n = \frac{1}{2}$, $\lambda_n = 6^n$).

Le lien entre recouvrements aléatoires et théorie du potentiel est donc bien plus subtil que la proposition 1. Il apparaîtra dans une autre classe d'exemples, dont l'introduction est due à B. Mandelbrot [10], les recouvrements poissoniens. Dans ces exemples, on peut utiliser une méthode de temps d'arrêt due à S. Janson [4], et retrouver la loi de l'ensemble non recouvert donnée par Fitzsimmons, Fridstedt et Shepp [3] au moyen de calculs explicites. Les premiers recouvrements poissoniens à considérer sont sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{R}^+$. Le cas de $\mathbf{R}^d$ et des simplexes homothétiques sera examiné ensuite. Le raccord entre les recouvrements poissoniens et les exemples considérés ci-dessus se traite comme dans [7] ou [6], et nous nous bornerons ici à traiter en détail l'exemple 3.

3. Recouvrements poissoniens.

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et μ une mesure sur $\mathbf{R}^+$ (un cas intéressant est $\mu(dy) = a\,dy/y^2$ sur $(0,1)$, $\mu(dy) = 0$ sur $(1,\infty)$). Considérons le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\lambda \otimes \mu$; c'est un ensemble discret aléatoire dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, tel que le nombre de points dans un borélien B soit une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda \otimes \mu(B)$, et qu'à des boréliens disjoints correspondent des v.a. indépendantes. Désignons par (x_ι, y_ι) les points de ce processus et associons-leur les intervalles ouverts $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$; posons

$$N_\varepsilon(t) = \sum_{y_\iota > \varepsilon} 1_{(x_\iota, x_\iota + y_\iota)}(t), \qquad N(t) = \sum 1_{(x_\iota, x_\iota + y_\iota)}(t). \tag{23}$$

Remarquons que, si on choisit une suite ε_n décroissant vers 0, la série

$$N(t) = N_{\varepsilon_1}(t) + \sum_{n=2}^{\infty}(N_{\varepsilon_n}(t) - N_{\varepsilon_{n-1}}(t)) \tag{24}$$

est bien de là forme (3), et les $N_{\varepsilon_n}(t)$ sont ses sommes partielles; désormais, ε joue le rôle de ε_n.

Soit μ_ε la restriction de μ à (ε,∞), et soit A_t l'angle $\{(x,y) : y > 0, t-y < x < t\}$. Observons que $N_\varepsilon(t)$ est le nombre de points (x_ι, y_ι) $(y_\iota > \varepsilon)$ dans l'angle A_t; c'est donc une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_t)$, et

$$P(N_\varepsilon(t) = 0) = \exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_t)), \tag{25}$$

quantité indépendante de t.

Considérons les ouverts aléatoires

$$G_\varepsilon = \bigcup_{y_\iota > \varepsilon} (x_\iota, x_\iota + y_\iota), \qquad G = \bigcup (x_\iota, x_\iota + y_\iota). \tag{26}$$

L'analogue des produits partiels de (4) est la famille

$$Q_\varepsilon(t) = \frac{1 - G_\varepsilon(t)}{1 - EG_\varepsilon(t)} \qquad (\varepsilon \downarrow 0), \tag{27}$$

en désignant par $G_\varepsilon(\cdot)$ la fonction indicatrice de G_ε. Le dénominateur de (27) est calculé en (25). Pour tout t, $Q_\varepsilon(t)$ est une martingale positive. Pour toute $\sigma \in M_1^+(\mathbf{R})$, la mesure aléatoire

$$S_\varepsilon(dt) = Q_\varepsilon(t)\,\sigma(dt) \tag{28}$$

est une martingale (à valeurs mesures) qui converge faiblement p.s. vers une mesure aléatoire

$$S(dt) = \overset{*}{\lim}\, S_\varepsilon(dt) \qquad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{29}$$

La théorie des martingales L^2 s'applique. On a

$$\begin{cases} E\Big(\int S_\varepsilon(dt)\Big)^2 = \iint E(Q_\varepsilon(s)Q_\varepsilon(t))\,\sigma(ds)\,\sigma(dt), \\ E(Q_\varepsilon(s)Q_\varepsilon(t)) = \dfrac{P(N_\varepsilon(s) = N_\varepsilon(t) = 0)}{P(N_\varepsilon(s) = 0)P(N_\varepsilon(t) = 0)}. \end{cases} \tag{30}$$

Comme $N_\varepsilon(s) = N_\varepsilon(t) = 0$ signifie qu'il n'y a pas de point (x_ι, y_ι) $(y_\iota > \varepsilon)$ dans $A_s \cup A_t$, ce dernier rapport est

$$\exp(-\lambda\otimes\mu_\varepsilon(A_s \cup A_t) + \lambda\otimes\mu_\varepsilon(A_s) + \lambda\otimes\mu_\varepsilon(A_t)) = \exp \lambda\otimes\mu_\varepsilon(A_s \cap A_t). \tag{31}$$

Donc la martingale $\int S_\varepsilon(dt)$ converge dans $L^2(\Omega)$ si

$$\iint \exp \lambda \otimes \mu(A_s \cap A_t)\,\sigma(ds)\,\sigma(dt) < \infty. \tag{32}$$

Pour expliciter (32), posons

$$k(t) = \exp \int_{|t|}^{\infty} \mu(y,\infty)\,dy \tag{33}$$

et remarquons que

$$\exp \lambda \otimes \mu(A_s \cap A_t) = k(t-s). \tag{34}$$

Ainsi (32) exprime que $\sigma(dt)$ a une énergie finie par rapport au noyau $k(\cdot)$. S'il en est ainsi et que σ est portée par K, on a donc $P(K \subset G) < 1$, et, par la loi du zéro-un,

$$P(K \subset \overline{\lim}\,(x_\iota, x_\iota + y_\iota)) = 0. \tag{35}$$

Enonçons le résultat.

PROPOSITION 2. *Si* $\mathrm{Cap}_k K > 0$, $k(\cdot)$ *étant défini en* (33), K *est p.s. non recouvert une infinité de fois par les* $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$.

COROLLAIRE. *Si*

$$\int_0^\infty e^{-t} \exp\Big(\int_t^\infty \mu(y,\infty)\,dy\Big) dt < \infty, \tag{36}$$

$\mathbf{R}$ *est p.s. non recouvert par les* $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$.

En effet, si (36) a lieu, les événements $(n_j, n_j + 1) \not\subset G$ ont une probabilité $p > 0$ et sont presque indépendants quand n_j est une suite croissant rapidement, donc il est presque sûr qu'une infinité d'entre eux se produise.

4. La méthode de temps d'arrêt. Un théorème de L. Shepp. Soit $\mathcal{A}_t$ la tribu engendrée par la restriction du processus de Poisson au quart de plan $\{x < t, y > 0\}$. Ainsi les événements $(t \in G)$, $(t \in G_\varepsilon)$ appartiennent à $\mathcal{A}_t$. Posons

$$\tau = \tau_\varepsilon = \inf\{\, t > 0 : t \notin G_\varepsilon \,\}; \tag{37}$$

c'est un temps d'arrêt adapté à la famille croissante $(\mathcal{A}_t)$, et on peut définir la tribu $\mathcal{A}_\tau$ des événements antérieurs à τ. Suivant l'idée de S. Janson [4], considérons l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-t} Q_\varepsilon(t)\,dt \tag{38}$$

où $Q_\varepsilon(\cdot)$ est défini en (27). On a $EQ_\varepsilon(t) = 1$, donc $I = 1$, et d'autre part

$$I = E\Big(e^{-\tau} \int_0^\infty e^{-s} E(Q_\varepsilon(\tau + s) \mid \mathcal{A}_\tau)\,ds\Big) \tag{39}$$

puisque $Q_\varepsilon(\cdot) = 0$ sur G_ε. Or la probabilité pour que l'angle $A_{\tau+s}$ ne contienne pas de points $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$ $(y_\iota > \varepsilon)$ sachant que A_τ n'en contient pas est

$$\exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_{\tau+s} \setminus A_\tau)), \tag{40}$$

et c'est $E(1 - G_\varepsilon(\tau + s) \mid \mathcal{A}_\tau)$. Donc

$$E(Q_\varepsilon(\tau + s) \mid \mathcal{A}_\tau) = \frac{\exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_{\tau+s} \setminus A_\tau))}{\exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_{\tau+s}))} = \exp \lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_{\tau+s} \cap A_\tau) = \exp \int_s^\infty \mu_\varepsilon(y, \infty)\, ds = k_\varepsilon(s). \tag{41}$$

Utilisant (39) avec $I = 1$, on a

$$E(e^{-\tau_\varepsilon}) = \Big(\int_0^\infty e^{-s} k_\varepsilon(s)\, ds\Big)^{-1}. \tag{42}$$

Comme $\tau_\varepsilon \uparrow \tau_0$ quand $\varepsilon \downarrow 0$, on a

$$E(e^{-\tau_0}) = \Big(\int_0^\infty e^{-s} k(s)\, ds\Big)^{-1}. \tag{43}$$

Quand (36) a lieu, on a $E(e^{-\tau_0}) > 0$ et on retrouve le corollaire de la proposition 2. Mais on a maintenant aussi la réciproque: si l'intégrale est infinie, $E(e^{-\tau_0}) = 0$, donc $\mathbf{R}^+ \subset G$ p.s., donc (en changeant l'origine) $\mathbf{R} \subset G$ p.s. C'est une preuve simple du théorème suivant dû à L. Shepp [13].

PROPOSITION 3. *Suivant que l'intégrale de* (36) *converge ou diverge,* $\mathbf{R}$ *est p.s. non recouvert ou p.s. recouvert par les* $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$.

5. Réciproque de la proposition 2. Nous pouvons supposer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\int_\varepsilon^\infty \mu(y, \infty)\, dy < \infty. \tag{44}$$

Sinon, $\mathbf{R}$ est recouvert p.s. Supposons K compact, fixons $\varepsilon > 0$, et soit $k_\varepsilon(\cdot)$ le noyau pair défini en (41). Il existe $\sigma \in M_1^+(K)$ dont le k_ε-potentiel

$$U(t) = \int k_\varepsilon(s)\, \sigma(t + ds) \tag{45}$$

a la plus petite borne supérieure, et on vérifie facilement que $U(t)$ est constant sur K, soit

$$U(t) = C_\varepsilon \qquad (t \in K). \tag{46}$$

K est la réunion de deux compacts K^+ et K^- définis par

$$(47)\qquad \begin{aligned} K^+ &= \Big\{ t \in K : \int_0^\infty k_\varepsilon(s)\,\sigma(t+ds) \geq \frac{1}{2}C_\varepsilon \Big\}, \\ K^- &= \Big\{ t \in K : \int_{-\infty}^0 k_\varepsilon(s)\,\sigma(t+ds) \geq \frac{1}{2}C_\varepsilon \Big\}. \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$(48)\qquad \begin{cases} \tau = \inf\{ t \in K^+ : t \notin G_\varepsilon \} & \text{si } K^+ \not\subset G_\varepsilon, \\ \tau = \infty & \text{si } K^+ \subset G_\varepsilon. \end{cases}$$

$$(49)\qquad J = E \int_{t \notin G_\varepsilon} \sigma(dt).$$

On a d'une part

$$(50)\qquad J = \exp\Big(- \int_0^\infty \mu_\varepsilon(y, \infty)\,dy \Big),$$

d'autre part

$$(51)\qquad \begin{aligned} J &= E \int_0^\infty P(\tau + s \notin G_\varepsilon \mid \mathcal{A}_\tau)\,\sigma(\tau + ds) \\ &= E \int_0^\infty \exp\Big(- \int_0^s \mu_\varepsilon(y,\infty)\,dy \Big)\,\sigma(\tau + ds), \end{aligned}$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$(52)\qquad 1 = E \int_{\mathbb{R}^+} k_\varepsilon(s)\,\sigma(\tau + ds)$$

et, d'après la définition de K^+,

$$(53)\qquad 1 \geq \frac{C_\varepsilon}{2} P(\tau < \infty) = \frac{C_\varepsilon}{2} P(K^+ \not\subset G_\varepsilon).$$

On a la même inégalité pour K^-, donc

$$(54)\qquad P(K \not\subset G_\varepsilon) \leq 4/C_\varepsilon.$$

Si $\mathrm{Cap}_k K = 0$, C_ε tend vers l'infini quand ε tend vers zéro et (54) donne $K \subset G$ p.s. Exprimons le résultat, qui complète la proposition 2.

PROPOSITION 4 [6]. *Suivant que K a une capacité nulle ou positive par rapport au noyau $k(\cdot)$ défini en* (33), *K est p.s. recouvert ou p.s. non recouvert par les* $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$.

Si K a une mesure de Lebesgue positive, la condition $\mathrm{Cap}_k K = 0$ signifie $\int k(t)\,dt = \infty$.

6. La loi du temps d'arrêt. Revenons à la formule (43), et posons maintenant $\tau = \tau_0$. Ainsi

$$\tau = \inf\{\, t \geq 0 : t \notin G \,\}. \tag{55}$$

En reprenant les calculs, on voit que pour tout $u > 0$,

$$\begin{aligned} Ee^{-u\tau} &= \Big(u \int_0^\infty e^{-us} k(s)\,ds\Big)^{-1} \\ &= \Big(1 + u \int_0^\infty e^{-us}(k(s) - 1)\,ds\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{56}$$

Cela fournit la loi de τ.

Ce qui suit n'a d'intérêt que dans le cas de non-recouvrement de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire $k \in L^1(e^{-s}\,ds)$. On a, par développement limité,

$$\begin{cases} E\tau = \displaystyle\int_0^\infty (k(s) - 1)\,ds, \\ E\tau^2 = 2 \displaystyle\int_0^\infty (k(s) - 1)(k(s) - 1 + s)\,ds. \end{cases} \tag{57}$$

Si $\mu(\ell, \infty) = 0$ $(\ell > 0)$, on a $k(s) - 1 = 0$ pour $s \geq \ell$, donc $E(e^{-u\tau})$ est une fonction méromorphe de u, holomorphe au voisinage de 0, donc, pour un $c > 0$ convenable,

$$Ee^{c\tau} < \infty. \tag{58}$$

Considérons en particulier la mesure $\mu = \mu_{a,\ell}$ telle que

$$\begin{cases} \mu(dy) = a\dfrac{dy}{y^2} & \text{pour } y \leq \ell, \\ \mu(dy) = 0 & \text{pour } y < \ell. \end{cases} \tag{59}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \mu(y, \infty) = a(1/y - 1/\ell)^+, \\ k(s) = k_{a,\ell}(s) = (\ell/s)^a e^{as/\ell} e^{-a} & (s < \ell), \\ k(s) = k_{a,\ell}(s) = 1 & (s \geq \ell). \end{cases} \tag{60}$$

Remarquons que

$$\begin{cases} k_{a,\ell}(s) = k_a(s/\ell), \\ k_a(s) = s^{-a} e^{a(s-1)} & (s < 1), \\ k_a(s) = 1 & (s \geq 1). \end{cases} \tag{61}$$

Fixons $a < 1$ (cas de non-recouvrement) et considérons la mesure $\mu = \mu_{a,\infty}$ égale à $a\,dy/y^2$ sur $\mathbf{R}^+$, ainsi que les intervalles $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$ associés. Comme

$$\int_\ell^\infty \mu(y,\infty)\,dy = \infty, \tag{62}$$

les intervalles $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$ de longueur supérieure à ℓ fixé recouvrent $\mathbf{R}$ p.s. Restreignons nous aux intervalles de longueurs $\leq \ell$. On obtient alors une version du recouvrement associé à $\mu_{a,\ell}$, et les formules (56) et (61) montrent que les v.a.

$$\frac{1}{\ell}\tau_\ell = \frac{1}{\ell}\inf\Big\{\, t \geq 0 : t \notin \bigcup_{y_\iota \leq \ell} (x_\iota, x_\iota + y_\iota)\,\Big\} \tag{63}$$

ont toutes la même loi, à savoir celle de τ $(= \tau_1)$ telle que

$$Ee^{-u\tau} = \Big(1 + u\int_0^1 e^{-su}(s^{-a}e^{a(s-1)} - 1)\,ds\Big)^{-1}. \tag{64}$$

Désignons par G^ℓ la réunion des $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$ de longueurs $\leq \ell$. La composante connexe de G^1 contenant 0 est un intervalle $(-\tau', \tau)$, où τ et τ' sont indépendants et ont la même loi, donnée par (64). La longueur de cette composante connexe, L, est donc une v.a. dont la loi est donnée par

$$Ee^{-uL} = \Big(1 + u\int_0^1 e^{-su}(s^{-a}e^{a(s-1)} - 1)\,ds\Big)^{-2}. \tag{65}$$

Toutes les composantes connexes de G^1 contenant un point fixé ont la même loi que L. La loi des composantes connexes de G^ℓ contenant un point donné est celle de ℓL.

7. Recouvrements poissoniens de $\mathbf{R}^+$ et processus de Lévy. Théorème de Fitzsimmons, Fristedt et Shepp. Au lieu de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, considérons $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, muni de la mesure $\lambda \otimes \mu$, puis le processus ponctuel (x_ι, y_ι) d'intensité $\lambda \otimes \mu$, les intervalles $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$, et l'ensemble fermé aléatoire

$$F = \mathbf{R}^+ \setminus \bigcup (x_\iota, x_\iota + y_\iota). \tag{66}$$

Ici, un cas typique sera $\mu(dy) = a\,dy/y^2$, $0 < a < 1$, et nous allons voir que, dans ce cas, la loi de F est celle de la fermeture de l'ensemble des valeurs d'un processus de Lévy stable, croissant, et d'indice $1-a$. Remarquons tout de suite la différence entre le recouvrement de $\mathbf{R}$ et le recouvrement de $\mathbf{R}^+$ par des $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$ correspondant au même choix de μ, mais à un processus de Poisson d'intensité $\lambda \otimes \mu$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ dans le premier cas, sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ dans le second. Quand $\mu(dy) = a\,dy/y^2$, $0 < a < 1$, $\mathbf{R}$ est p.s. recouvert, et $\mathbf{R}^+$ ne l'est pas: cela tient au rôle différent des grands intervalles $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$.

Dans le nouveau contexte du recouvrement de $\mathbf{R}^+$, reprenons les notations (26) à (29), avec une mesure $\sigma \in M^+(\mathbf{R}^+)$ à déterminer plus tard. La mesure aléatoire S est portée par $F \cap \mathrm{Support}(\sigma)$. Posons

$$\Phi(u) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-ux}\, S(dx) \qquad (u > 0). \tag{67}$$

Notre propos est de montrer que la fonction aléatoire $\Phi(u)$ a la même loi que la fonction aléatoire

$$\Psi(u) = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-uL(t)}\, dt \qquad (u > 0) \tag{68}$$

si $L(t)$ est un processus croissant à accroissements indépendants et stationnaires (nous dirons simplement: un *subordinateur*) et σ une mesure, tous deux convenablement associés à μ.

Les étapes vont être 1) le calcul de $E(\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n))$ pour $u_1 > 0, \ldots, u_n > 0$; 2) le calcul de $E(\Psi(u_1)\ldots\Psi(u_n))$; 3) la comparaison et la conclusion.

1. *Calcul de* $E(\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n))$. Au lieu de travailler avec μ_ε, G_ε, $Q_\varepsilon(\cdot)$, S_ε, puis de faire tendre ε vers zéro, faisons tous les calculs en supposant d'abord $\mu = \mu_\varepsilon$ (donc $\mu(dt) = 0$ sur $(0,\varepsilon)$), et constatons que les résultats finaux ont le sens qu'on obtiendrait en faisant tendre ε vers zéro. On a donc

$$\begin{aligned} &E(\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n)) \\ &\quad = \int\ldots\int E(Q(x_1)\ldots Q(x_n))e^{-u_1x_1-\ldots-u_nx_n}\, \sigma(dx_1)\ldots\sigma(dx_n) \end{aligned} \tag{69}$$

avec

$$Q(x) = \frac{1-G(x)}{1-EG(x)}. \tag{70}$$

Remarquons que

$$1 - EG(x) = P(x \notin G) = \exp(-\lambda \otimes \mu(A_x)) = \exp\Big(-\int_0^x \mu(y,\infty)\, dy\Big) \tag{71}$$

où, maintenant,

$$A_x = \{\, (x', y') : 0 < x' < x,\ y' > x - x' \,\}. \tag{72}$$

Le cas $n = 1$ est immédiat:

$$E\Phi(u) = \int e^{-ux}\, \sigma(dx). \tag{73}$$

Pour $n = 2$ calculons d'abord $E(Q(x_1)Q(x_2))$ quand $x_1 \le x_2$. On a

$$\begin{aligned} E((1-G(x_1))(1-G(x_2))) &= P(x_1 \notin G)P(x_2 \notin G \mid x_1 \notin G) \\ &= \exp(-\lambda \otimes \mu(A_{x_1}) - \lambda \otimes \mu(A_{x_1x_2})) \end{aligned} \tag{74}$$

avec

$$A_{x_1 x_2} = \{(x,y) : x_1 < x < x_2,\, y > x_2 - x\}, \tag{75}$$

donc

$$E(Q(x_1)Q(x_2)) = \exp \lambda \otimes \mu(A_{x_1} \cap A_{x_2}) = \exp \int_{x_2 - x_1}^{x_1} \mu(y,\infty)\, dy. \tag{76}$$

Après échange de x_1 et x_2 on obtient

$$\left\{\begin{aligned} &E(\Phi(u_1)\Phi(u_2)) = \varphi(u_1,u_2) + \varphi(u_2,u_1),\\ &\varphi(u_1,u_2) = \iint_{0 \le x_1 \le x_2} e^{-u_1 x_1 - u_2 x_2}\\ &\qquad\qquad \times \Big(\exp \int_{x_2 - x_1}^{x_2} \mu(y,\infty)\, dy\Big)\, \sigma(dx_1)\, \sigma(dx_2). \end{aligned}\right. \tag{77}$$

Dans le cas général,

$$E(\Phi(u_1)\ldots\Phi(u_n)) = \sum_{\text{perm}} \varphi(u_{j_1},\ldots,u_{j_n}), \tag{78}$$

la somme étant prise pour toutes les permutations $(j_1,\ldots,j_n)$ de $(1,\ldots,n)$, avec

$$\begin{aligned} \varphi(u_1,\ldots,u_n) = &\int \!\!\ldots\!\! \int_{0 \le x_1 \le \ldots \le x_n} e^{-u_1 x_1 - \ldots - u_n x_n}\\ &\times \Big(\exp \sum_{m=2}^{n} \int_{x_m - x_{m-1}}^{x_m} \mu(y,\infty)\, dy\Big)\, \sigma(dx_1)\ldots\sigma(dx_n). \end{aligned} \tag{79}$$

Remarquons que $\varphi(0,\ldots,0) < \infty$ est la condition de convergence dans $L^n(\Omega)$ de la martingale $\int_{\mathbf{R}^+} Q_\varepsilon(x)\, \sigma(dx)$. Dans la suite, nous prendrons pour σ une mesure non bornée sur $\mathbf{R}^+$, mais les cas intéressants seront ceux où $\int_{[a,b]} Q_\varepsilon(x)\, \sigma(dx)$ est une martingale convergeant dans tous les $L^n(\Omega)$ quels que soient $a > 0$ et $b > a$.

2. *Calcul de* $E(\Psi(u_1)\ldots\Psi(u_n))$. Soit $L(t)$ le subordinateur dont la dérive est γ et dont la mesure de Lévy est $\nu(dz)$. On a alors

$$Ee^{-uL(t)} = e^{-t\psi(u)}, \qquad \psi(u) = \gamma u + \int_0^\infty (1 - e^{-uz})\, \nu(dz), \tag{80}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} &Ee^{-u_1 L(t_1) - u_2(L(t_2) - L(t_1)) - \ldots - u_n(L(t_n) - L(t_{n-1}))}\\ &\qquad = e^{-t_1 \psi(u_1) - \ldots - (t_n - t_{n-1})\psi(u_n)} \end{aligned} \tag{81}$$

pour tout choix de $u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Or

$$(82) \qquad E(\Psi(u_1)\dots\Psi(u_n)) = \int\dots\int e^{-u_1 L(t_1) - \dots - u_n L(t_n)}\, dt_1 \dots dt_n.$$

Pour calculer le second membre on intègre d'abord sur $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, puis on permute de toutes les façons possibles $(t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n)$, d'où

$$(83) \qquad E(\Psi(u_1)\dots\Psi(u_n)) = \sum_{\text{perm}} \psi(u_{j_1}, \dots, u_{j_n})$$

avec

$$(84) \qquad \psi(u_1, \dots, u_n)$$

$$= \int\dots\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} E e^{-u_n(L(t_n) - L(t_{n-1})) - (u_n + u_{n+1})(L(t_{n-1}) - L(t_{n-2})) - \dots}\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= \int\dots\int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} e^{-(t_n - t_{n-1})\psi(u_n) - (t_{n-1} - t_{n-2})\psi(u_n + u_{n-1}) - \dots}\, dt_1 \dots dt_n$$

$$= (\psi(u_n)\psi(u_n + u_{n-1}) \dots \psi(u_n + u_{n-1} + \dots + u_1))^{-1}.$$

3. *Comparaison et conclusion.* La formule (79) s'écrit aussi, en posant $y_1 = x_1$, $y_m = x_m - x_{m-1}, \dots$,

$$(85) \qquad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \int\dots\int AB\, \sigma(dx_1)\dots\sigma(dx_n),$$

$$A = e^{-y_1(u_1 + \dots + u_n) - y_2(u_2 + \dots + u_n) - \dots - y_n u_n},$$

$$B = \exp\Big(\int_{y_2}^{x_2} + \int_{y_3}^{x_3} + \dots + \int_{y_n}^{x_n} \mu(y, \infty)\, dy\Big).$$

Choisissons

$$(86) \qquad \sigma(dx) = \exp\Big(\int_x^1 \mu(y, \infty)\, dy\Big)\, dx.$$

Alors (85) devient

$$(87) \qquad \varphi(u_1, \dots, u_n)$$

$$= \int\dots\int_{(\mathbf{R}^+)^n} e^{-y_1(u_1 + \dots + u_n) - y_2(u_2 + \dots + u_n) - \dots - y_n u_n}\, \sigma(dy_1)\dots\sigma(dy_n)$$

donc, moyennant la condition

$$(88) \qquad \int_{\mathbf{R}^+} e^{-yu}\, \sigma(dy) = (\psi(u))^{-1}$$

on a

$$(89) \qquad \varphi(u_1, \dots, u_n) = \psi(u_1, \dots, u_n)$$

et par conséquent

$$E(\Phi(u_1)\dots\Phi(u_n)) = E(\Psi(u_1)\dots\Psi(u_n)). \tag{90}$$

Supposons pour le moment que l'intégrale de (88) soit finie pour tout $u > 0$, et que les mesures σ et ν soient liées par (88) et (80). Pour conclure, fixons $0 < u_1 \leq \dots \leq u_m$, considérons les transformées de Laplace des m-uples $(\Psi(u_1),\dots,\Psi(u_m))$ et $(\Phi(u_1),\dots,\Phi(u_m))$, et montrons que

$$E\exp(-t_1\Psi(u_1)-\dots-t_m\Psi(u_m)) = E\exp(-t_1\Phi(u_1)-\dots-t_m\Phi(u_m)) \tag{91}$$

quand $t = (t_1,\dots,t_m) \in (\mathbf{R}^+)^m$. Grâce à (90), les développements formels de Taylor des deux membres de (91) sont égaux. D'après (78) et (87), le coefficient de $t_1^{\alpha_1}\dots t_m^{\alpha_m}$ dans le second membre est majoré par

$$\frac{(\alpha_1+\dots+\alpha_m)!}{\alpha_1!\dots\alpha_m!}\Big(\int e^{-yu_1}\,\sigma(dy)\Big)^{\alpha_1+\dots+\alpha_m}, \tag{92}$$

donc la série de Taylor converge au voisinage de 0, et, par prolongement analytique, on a bien (91) quand $t \in (\mathbf{R}^+)^m$. Ainsi les fonctions aléatoires $\Phi(u)$ et $\Psi(u)$ données par (67) et (68) ont la même loi; c'est la conclusion désirée.

Explicitons les hypothèses. La mesure σ donnée par (86) est localement finie sur $\mathbf{R}^+$ si et seulement si

$$\int_0^1 \exp\Big(\int_x^1 \mu(y,\infty)\,dy\Big)\,dx < \infty. \tag{93}$$

Dans ce cas, l'intégrale dans (88) est finie pour tout $u > 0$. La formule (88), compte tenu de (80), s'écrit aussi

$$\Big(\gamma + \int_0^\infty e^{-uz}\nu(z,\infty)\,dz\Big)\int_0^\infty e^{-uy}\,\sigma(dy) = \frac{1}{u}, \tag{94}$$

soit, en se référant à (86),

$$\begin{cases} \gamma f(x) + \displaystyle\int_0^x \nu(y,\infty)f(x-y)\,dy = 1 \quad (x>0), \\ f(y) = \exp\displaystyle\int_y^1 \mu(z,\infty)\,dz. \end{cases} \tag{95}$$

LEMME A. *Pour toute mesure positive μ sur $\mathbf{R}^+$ qui vérifie* (93), *il existe un $\gamma \geq 0$ et une mesure positive ν sur $\mathbf{R}^+$ qui vérifient* (95).

Le lemme A est l'analogue et une conséquence facile du lemme suivant sur séries de Taylor.

LEMME B. *Supposons* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq 1$, *et* $f_n = q_1 \ldots q_n$. *Alors*

$$(1 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots)^{-1} = 1 - g_1 z - g_2 z^2 - \ldots \tag{96}$$

avec $g_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

Preuve. On a $g_1 = f_1 \geq 0$ et

$$f_n - f_{n-1} g_1 - f_{n-2} g_2 - \ldots - g_n = 0 \tag{97}$$

donc, en supposant $g_j \geq 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$q_{n+1} f_n - q_n f_{n-1} g_1 - q_{n-1} f_{n-2} g_2 - \ldots - q_1 g_n \geq 0, \tag{98}$$

donc $g_{n+1} \geq 0$.

Remarquons que les égalités (97) s'écrivent aussi

$$\begin{cases} f_n + f_{n-1} v_1 + f_{n-2} v_2 + \ldots + v_n = 1 \quad (n \in \mathbf{N}), \\ v_n = 1 - g_1 - g_2 - \ldots - g_n, \end{cases} \tag{99}$$

ce qui est l'analogue de (95). On peut ainsi préciser le lemme A.

LEMME C. *La dérive* γ *vaut*

$$\gamma = (f(0))^{-1}. \tag{100}$$

Elle est donc > 0 *ou* $= 0$ *suivant que* $f(0) < \infty$ *ou* $= \infty$.

Enonçons le résultat.

PROPOSITION 5. *Soit* μ *une mesure positive localement bornée sur* $(0, \infty)$, *telle que* $\mu(1, \infty) < \infty$ *et que* (93) *ait lieu. On définit la mesure* σ *sur* $(0, \infty)$ *par* (86). *Il existe alors un* $\gamma \geq 0$ *et une mesure* ν *sur* $(0, \infty)$ *liées à* σ (*ou* μ) *par* (94) (*ou* (95)). *On a* $\gamma > 0$ *si et seulement si*

$$\int_0^1 \mu(y, \infty)\, dy < \infty. \tag{101}$$

On considère le processus de Poisson ponctuel (x_ι, y_ι) *dans* $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ *dont l'intensité est* $\lambda \otimes \mu$ (λ: *mesure de Lebesgue*) *et la mesure aléatoire* $S(dx)$ *définie par les formules* (26) *à* (29), *qui est portée par l'ensemble* $\mathbf{R}^+ \setminus G$ *des points non recouverts par les* $(x_\iota, x_\iota + y_\iota)$. *On considère d'autre part le processus de Lévy croissant* (*subordinateur*) $L(t)$ *dont la dérive est* γ *et la mesure de Lévy* ν (*la loi en est donnée en* (80)). *Alors* $S(dx)$ *a la même loi que l'image de* λ *par* L.

Remarques. 1. Reprenons les notations (26) à (28), et considérons μ_ε (restriction de μ à (ε, ∞)) au lieu de μ. Au lieu de γ, ν, L, on a maintenant γ_ε, ν_ε, L_ε. Comme (101) a lieu pour μ_ε, on a $\gamma_\varepsilon > 0$. L'ensemble $\overline{\mathbf{R}^+ \setminus G_\varepsilon}$ est p.s. une réunion d'intervalles fermés, et de même l'adhérence $\overline{L_\varepsilon(\mathbf{R}^+)}$ des valeurs prises par L_ε. Dans ce cas $\mathbf{R}^+ \setminus G_\varepsilon$ est visiblement le support de S_ε, donc la conclusion du théorème entraîne que

$$\text{loi de } (\mathbf{R}^+ \setminus G_\varepsilon) = \text{loi de } \overline{L_\varepsilon(\mathbf{R}^+)}. \tag{102}$$

En munissant les fermés de $\mathbf{R}^+$ de la topologie de Hausdorff, les lois du premier et du second membre de (102) ont une limite quand $\varepsilon \to 0$, et on obtient

$$\text{loi de } (\mathbf{R}^+ \setminus G) = \text{loi de } \overline{L(\mathbf{R}^+)}. \tag{103}$$

C'est là le théorème de Fitzsimmons, Fristedt et Shepp.

2. Dans (86), rien n'interdit de changer 1 en une autre constante > 1. Cela revient à multiplier σ par une constante, donc ψ, γ et ν par la constante inverse. Cela n'altère pas la loi de $\overline{L(\mathbf{R}^+)}$.

3. Comme dans [3], on peut inclure dans cette étude le cas où l'intégrale de (93) est infinie, et associer alors à μ la fonction $\psi \equiv 1$, c'est-à-dire $\gamma = 0$ et ν concentrée au point ∞. C'est une manière de retrouver le théorème de Shepp (proposition 3); dans le contexte du recouvrement de $\mathbf{R}^+$, seuls comptent les petits intervalles, donc on peut, sans modifier le recouvrement presque sûr, restreindre la mesure μ à $(0,1)$; alors (93) et (36) sont équivalents.

4. Reprenons l'exemple: $\mu(dy) = a\,dy/y^2$ avec $0 < a < 1$. Dans ce cas $\sigma(dx) = x^{-a}\,dx$, $\psi(u) = u^{1-a}/\Gamma(1-a)$, donc $L(t)$ est un subordinateur stable d'indice $1-a$. C'est le cas mentionné au début de cette partie.

8. Recouvrements poissoniens dans $\mathbf{R}^d$. Nous allons généraliser l'étude faite dans les parties 3, 4, 5. Maintenant λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$, et $\mu(dz)$ une mesure sur $\mathbf{R}^+$ comme précédemment. Désignons par (x_ι, z_ι) les points d'un processus de Poisson ponctuel dans $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$, d'intensité $\lambda \otimes \mu$; précisons que $x_\iota \in \mathbf{R}^d$, $z_\iota \in \mathbf{R}^+$.

Fixons un convexe ouvert borné C dans $\mathbf{R}^d$, et désignons son volume par v. On considère les convexes $x_\iota + z_\iota C$ et les ouverts aléatoires

$$G_\varepsilon = \bigcup_{z_\iota > \varepsilon} (x_\iota + z_\iota C), \qquad G = \bigcup (x_\iota + z_\iota C), \tag{104}$$

dont on désigne les fonctions indicatrices par $G_\varepsilon(x)$ et $G(x)$; on pose

$$Q_\varepsilon(x) = \frac{1 - G_\varepsilon(x)}{1 - EG_\varepsilon(x)} \tag{105}$$

et, pour toute mesure $\sigma \in M_1^+(\mathbf{R}^d)$, on considère la mesure aléatoire

$$S_\varepsilon(dx) = Q_\varepsilon(x)\,\sigma(ds). \tag{106}$$

Quand $\varepsilon \downarrow 0$ les $S_\varepsilon(dx)$ (martingale à valeurs mesures) convergent faiblement p.s. vers une mesure aléatoire

$$S(dx) = \overset{*}{\lim}\, S_\varepsilon(dx). \tag{107}$$

Désignons par A le cône

$$A = \{(x,z) : x \in \mathbf{R}^d,\ z \in \mathbf{R}^+,\ x \in -zC\} \tag{108}$$

et par A_x le translaté de A par x. Soit de nouveau μ_ε la restriction de μ à (ε, ∞). Observons que $G_\varepsilon(x) = 0$ signifie qu'il n'y a pas de point (x_ι, z_ι) $(z_\iota > \varepsilon)$ dans A_x. Donc

$$\begin{cases} P(G_\varepsilon(x) = 0) = \exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_x)) = \exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A)), \\ P(G_\varepsilon(x) = G_\varepsilon(y) = 0) = \exp(-\lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_x \cup A_y)). \end{cases} \tag{109}$$

Posons

$$\begin{aligned} k_\varepsilon(x,y) = k_\varepsilon(x-y) &= \frac{P(G_\varepsilon(x) = G_\varepsilon(y) = 0)}{P(G_\varepsilon(x) = 0)P(G_\varepsilon(y) = 0)} \\ &= \exp \lambda \otimes \mu_\varepsilon(A_x \cap A_y), \end{aligned} \tag{110}$$

$$k(x-y) = \exp \lambda \otimes \mu(A_x \cap A_y). \tag{111}$$

La martingale $\int S_\varepsilon(dx)$ converge dans $L^2(\Omega)$ si et seulement si les expressions

$$E\Big(\int S_\varepsilon(dx)\Big)^2 = \iint k_\varepsilon(x-y)\,\sigma(dx)\,\sigma(dy) \tag{112}$$

sont bornées, c'est-à-dire si

$$\iint k(x-y)\,\sigma(dx)\,\sigma(dy) < \infty. \tag{113}$$

Explicitons le noyau k. Désignons par $C(\cdot)$ la fonction indicatrice du convexe C, par $\check{C}(\cdot)$ la fonction symétrique, et posons

$$\xi(x) = \int_{\mathbf{R}^d} C(x+y)C(y)\,dy, \tag{114}$$

soit $\xi = C * \check{C}$, ou encore $\xi(x) = \lambda((C-x) \cap C)$. On a

$$\lambda \otimes \mu(A_x \cap A_y) = \int_0^\infty \xi\left(\frac{x-y}{z}\right) z^d\,\mu(dz) \tag{115}$$

d'où, en reportant dans (111),

$$k(x-y) = \exp \int_0^\infty \xi\left(\frac{x-y}{z}\right) z^d\,\mu(dz). \tag{116}$$

On a alors l'analogue de la proposition 2.

PROPOSITION 6. *Si K est un compact de $\mathbf{R}^d$ dont la capacité par rapport au noyau $k(x-y)$ est positive, on a*

$$P(K \subset G) < 1, \qquad P(K \subset \overline{\lim}(x_\iota, x_\iota + z_\iota C)) = 0. \tag{117}$$

Prenons maintenant

$$\sigma(dx) = c_\alpha e^{-\alpha|x|}\, dx \tag{118}$$

où $|\ |$ désigne une norme fixée dans $\mathbf{R}^d$.

Pour interpréter (113), l'important est d'avoir de bonnes majorations et minorations de $k(\cdot)$. La fonction ξ (fonction "pagode") est comprise entre deux fonctions "cônes":

$$v(1-a|x|)^+ \leq \xi(x) \leq v(1-b|x|)^+, \tag{119}$$

$(\ )^+$ désignant la partie positive, a et b des constantes positives convenables. Donc la condition

$$\iint \exp\left(v \int_0^\infty \left(1 - \frac{|x-y|}{z}\right)^+ z^d\, \mu(dz)\right) e^{-\beta(|x|+|y|)}\, dx\, dy < \infty \tag{120}$$

est suffisante pour la convergence de $\int S_\varepsilon(dx)$ dans $L^2(\Omega)$ si $\beta = \alpha b$, et elle est nécessaire si $\beta = \alpha a$. On ne s'occupera pour le moment que de la condition suffisante. Une transformation simple de (120), joint à l'argument qui suit (36), donne

PROPOSITION 7. *Si, pour un $\beta > 0$ convenable, on a*

$$\int_0^\infty \exp\left(v \int_0^\infty \left(1 - \frac{r}{z}\right)^+ z^d\, \mu(dz)\right) e^{-\beta r} r^{d-1}\, dr < \infty, \tag{121}$$

on a $\mathbf{R}^d = G$ presque sûrement.

Remarquons que, si $\mu(1,\infty) = 0$, (121) prend la forme

$$\int_0^1 \exp\left(v \int_0^1 \left(1 - \frac{r}{z}\right)^+ z^d\, \mu(dz)\right) r^{d-1}\, dr < \infty. \tag{122}$$

9. Réciproque de la proposition 7. Par commodité, bornons-nous au cas $\mu(1,\infty) = 0$; il s'agira donc du recouvrement de $\mathbf{R}^d$ par des convexes homothétiques de C dans un rapport ≤ 1. Nous allons faire maintenant une hypothèse très restrictive sur C, à savoir que

(123) la frontière de C a une partie plate π (de dimension $d-1$) et, pour un certain cône γ de sommet 0, les translatés $x + \gamma$ entrent dans C quand $x \in \pi$ et sont disjoints de C quand $x \in \partial C \setminus \pi$.

Par exemple, (123) est satisfaite dans les cas suivants: a) C est un simplexe; b) (cas $d = 2$) C est un quadrilatère plan qui n'est pas un parallélogramme; c) C est un tronc de cône; d) C est le convexe engendré par une calotte sphérique strictement contenue dans une demi-sphère. Par contre, si C est un cube ou une boule, (123) n'est pas réalisée.

PROPOSITION 8. *Sous les conditions* $\mu(1,\infty) = 0$ *et* (123), *une condition nécessaire et suffisante pour le recouvrement p.s. de* $\mathbf{R}^d$ *par les convexes homothétiques aléatoires* $x_\iota + z_\iota C$ *est*

$$\int_0^1 \exp\left(\int_s^1 \left(1 - \frac{s}{z}\right) v z^d \, \mu(dz)\right) s^{d-1}\, ds = \infty. \tag{124}$$

Preuve. Il suffit de montrer que (124) est une condition suffisante de recouvrement. Pour montrer que (124) est suffisante, supposons (124) et montrons qu'un certain cône est recouvert p.s.; il en est alors de même de ses translatés, donc de $\mathbf{R}^d$. Quitte à translater C, supposons $0 \in C$ et considérons le cône Γ de sommet 0 engendré par le convexe plat $-\pi$. Pour tout $x \in \Gamma$ posons

$$x = r\dot{x}, \qquad r = r(x) > 0, \qquad \dot{x} \in -\pi. \tag{125}$$

Observons que $x \in x_\iota + z_\iota C$ signifie $(x_\iota, z_\iota) \in A + x$, A étant le cône défini en (108). Pour chaque $t > 0$, considérons le tronc de cône

$$A_t = \{\, (x,z) : x \in -(z+t)C \,\} \tag{126}$$

et soit $\mathcal{A}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par la restriction à A_t du processus de Poisson. Ainsi le recouvrement du convexe $-tC$ est une propriété $\mathcal{A}_t$-mesurable. Posons

$$\tau = \inf_{x \in \Gamma, x \notin G} r(x). \tag{127}$$

Cela veut dire que $\Gamma \cap (-\tau C)$ est recouvert par les $x_\iota + z_\iota C$ et que, pour un certain $\dot{x}_0 \in -\pi$, $\tau \dot{x}_0$ n'est pas recouvert. L'événement $\tau < t$ appartient à $\mathcal{A}_t$, c'est-à-dire que τ est un temps d'arrêt adapté à la famille $\mathcal{A}_{t+}$ $(= \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{t+\varepsilon})$. On désigne par $\mathcal{A}_\tau$ la tribu des événements antérieurs à τ.

La validité des formules qui suivent s'établit en remplaçant d'abord μ par sa restriction μ_ε à $(\varepsilon, 1)$, puis en faisant tendre ε vers 0. Evaluons de deux manières

$$I = E \int_{\Gamma \setminus G} e^{-r(x)}\, dx. \tag{128}$$

D'une part

$$P(x \notin G) = \exp(-\lambda \otimes \mu(A)), \tag{129}$$

donc, en posant $C = \int_\Gamma e^{-r(x)}\,dx$,

$$I = C\exp(-\lambda\otimes\mu(A)). \tag{130}$$

D'autre part, en faisant intervenir le temps d'arrêt τ,

$$I = E\Big(e^{-\tau}\int_\Gamma e^{-r(x)+\tau}P(x\notin G\mid \mathcal{A}_\tau)\,dx\Big). \tag{131}$$

Remarquons que Γ contient le cône $\tau\dot{x}_0+\gamma$ et que tout convexe $x_\iota + z_\iota C$ coupant $-\tau C$ et ne contenant pas $\tau\dot{x}_0$ est disjoint de $\tau\dot{x}_0+\gamma$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse (123)). On minore donc l'intégrale dans (131) en remplaçant Γ par $\tau\dot{x}_0+\gamma$, et, pour $x\in\tau\dot{x}_0+\gamma$, on a

$$\begin{aligned}(132)\quad P(x\notin G\mid\mathcal{A}_\tau) &= P(x\notin G\mid \tau\dot{x}_0\notin G)\\ &= \frac{\exp(-\lambda\otimes\mu((A+x)\cup(A+\tau\dot{x}_0)))}{\exp(-\lambda\otimes\mu(A))}\\ &= \exp(-\lambda\otimes\mu(A))\exp\lambda\otimes\mu((A+x)\cap(A+\tau\dot{x}_0)).\end{aligned}$$

En comparant à (130) et (131), on a donc

$$E\Big(e^{-\tau}\int_{\tau\dot{x}_0+\gamma}\exp\lambda\otimes\mu((A+x)\cap(A+\tau\dot{x}_0))e^{-r(x)+\tau}\,dx\Big) < C. \tag{133}$$

Posons $x=\tau\dot{x}_0+y$, et utilisons le noyau k défini en (111); il vient

$$E\Big(e^{-\tau}\int_\gamma k(y)e^{-r(y)}\,dy\Big) < C. \tag{134}$$

Utilisons (116) et l'encadrement, valable pour $y\in\gamma$,

$$v(1-ar(y)/z)^+ \le \xi(y/z) \le v(1-br(y)/z)^+. \tag{135}$$

L'hypothèse (124), jointe à (134) et (135), entraîne $E(e^{-\tau})=0$, donc Γ est recouvert p.s., d'où la conclusion.

10. Relation avec la partie 2 (recouvrements sur T ou $\mathbf{T}^d$). Reprenons l'exemple 3 de la partie 2: $T=\mathbf{T}^d$, $G_n = g_n+\omega_n$, et supposons maintenant que les g_n sont des convexes homothétiques de la forme z_nC, où C vérifie la condition (123). La proposition 8 permet d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de recouvrement de $\mathbf{T}^d$ par les G_n.

PROPOSITION 9. *Soit v_n $(=vz_n^d)$ le volume de g_n. On suppose $1>v_1\ge\ldots\ge v_n\ge\ldots>0$. Pour que $\mathbf{T}^d$ soit recouvert presque sûrement par les G_n,* *il faut et il suffit quc*

$$\int_0^1 \exp \sum_{n=1}^{\infty} v_n(1-(s/v_n)^{1/d})^+ \, ds = \infty. \tag{136}$$

P r e u v e. Remarquons d'abord que (136) est la forme que prend (124) lorsque

$$\mu(dz) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{z_n} \qquad (vz_n^d = v_n). \tag{137}$$

Supposons que (136) ait lieu et montrons que $\mathsf{T}^d = G$ p.s. Posons

$$\begin{cases} v_1' = v_1 = u_1, \\ v_2' = v_3' = v_3 = u_2, \\ v_4' = v_5' = v_6' = v_6 = u_3, \\ \dots \end{cases} \tag{138}$$

La suite v_n' prend m fois la valeur u_m, et elle est inférieure ou égale à v_n. Si $\sum v_n^{1+\varepsilon} = \infty$ pour un $\varepsilon > 0$, on sait que $\mathsf{T}^d = G$ p.s. [5, p. 160]. Supposons donc $\sum v_n^{1+\varepsilon} < \infty$ avec $\varepsilon < \frac{1}{5}$. Cela s'écrit $\sum m u_m^{1+\varepsilon} < \infty$, donc (Hölder) $\sum u_m < \infty$, donc (Abel) $\sum m(u_m - u_{m-1}) < \infty$, donc $\sum (v_n - v_n') < \infty$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(1-(s/v_n)^{1/d})^+ - \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(1-(s/v_n')^{1/d})^+ = O(1), \tag{139}$$

et cela veut dire que (136) a lieu quand on remplace v_n par v_n'. Retirons maintenant de la suite (v_n'), pour chaque m, $[m^{2/3}]$ termes égaux à u_m; il reste une suite (v_n''), avec $v_n'' \le v_n'$, et

$$\sum (v_n' - v_n'') \le \sum m^{2/3} u_m \le \left(\sum m^{-a}\right)^{\alpha} \left(\sum m u_m^{1+\varepsilon}\right)^{\beta}; \tag{140}$$

si $\beta - a\alpha = \frac{2}{3}$, $(1+\varepsilon)\beta = 1$, et $\alpha + \beta = 1$. Comme $\varepsilon < \frac{1}{5}$, on a $\beta > \frac{5}{6}$, $\alpha < \frac{1}{6}$, $a > 1$, donc les séries dans (140) convergent, et cela veut dire, comme précédemment, que (136) a lieu quand on remplace v_n par v_n''. Au lieu de (137), définissons maintenant $\mu''(dz)$ par

$$\mu''(dz) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{z_n''} \qquad (vz_n''^d = v_n'') \tag{141}$$

et considérons le processus de Poisson (x_ι, z_ι) associé à $\lambda \otimes \mu''$. Pour chaque m, les x_ι tels que $vz_\iota^d = u_m$ constituent un processus de Poisson d'intensité $m - [m^{2/3}]$ sur $\mathbf{R}^d$, et ces processus sont indépendants pour les différentes valeurs de m. Restreignons tous ces processus au cube $[0,1]^d$, et désignons par N_m le nombre (aléatoire) des $x_\iota \in [0,1]^d$ tels que $vz_\iota^d = u_m$.

Les N_m sont des v.a. de Poisson indépendantes, de paramètres $m - [m^{2/3}]$, donc, pour m assez grand, $N_m \leq m$ p.s. Le cube $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^d$ est recouvert p.s. par les convexes $C_\iota = x_\iota + z_\iota C$; appelons x_ι le "centre" de C_ι; pour chaque m, il y a N_m convexes C_ι, de volumes u_m, dont les "centres" sont disposés au hasard, suivant λ, sur le cube $[0,1]^d$. A fortiori le cube $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^d$ est recouvert p.s. par les convexes aléatoires C'_n, de volumes v'_n, dont les "centres" sont disposés au hasard, suivant λ, sur $[0,1]^d$ (puisque, pour m assez grand, il y a plus de C'_n de volume u_m que de C_ι de volumes u_m). A fortiori a-t-on recouvrement quand on remplace les v'_n par les v_n, qui sont supérieurs. De même tout translaté du cube $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^d$ est recouvert p.s. On a bien montré que (136) entraîne que $\mathbf{T}^d = G$ p.s.

Dans l'autre sens, il suffit d'appliquer la proposition 1. Cela termine la preuve de la proposition 9.

R e m a r q u e. La condition de recouvrement (136) dépend des volumes v_n et de la dimension d. Si elle est satisfaite pour (v_n, d) $(d \geq 2)$, elle est satisfaite pour $(v_n, d-1)$. Inversement, il est facile de construire pour chaque d, des v_n tels qu'elle est satisfaite pour (v_n, d), mais non pour $(v_n, d+1)$. La moins exigeante pour les v_n correspond au cas $d = 1$: c'est la condition de Shepp. On vérifie ainsi ce que nous avions affirmé à propos de l'exemple 3.

L'exemple 2 se traite de la même manière, en utilisant comme point de départ la proposition 3 ([6], [7]).

11. Quelques compléments. Nous nous sommes limités dans cet article au cas où l'espace T est $\mathbf{T}^d$, $\mathbf{R}^+$, ou $\mathbf{R}^d$. Mentionnons deux autres cas intéressants.

Dans sa thèse [1] (voir aussi [2]), Fan Ai-hua a étudié des processus de naissance et de mort dans le cadre suivant: $T = \{1, 2, \ldots, c\}^{\mathbf{N}}$ est muni de la distance ultramétrique

$$\text{dist}(t, s) = c^{-n} \Leftrightarrow (t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n, t_{n+1} \neq s_{n+1}). \tag{142}$$

Il y a donc c^n boules de diamètre c^{-n}. Pour chaque n, on conserve chacune de ces boules avec probabilité $c^{-\alpha}$, et on la détruit avec probabilité $1 - c^{-\alpha}$, de façon indépendante pour les différentes boules, et indépendamment de ce qui se passe pour les autres valeurs de n; on obtient ainsi un ouvert aléatoire G_n, et les différents G_n sont indépendants. Soit $K \subset T$. Alors

$$\text{Cap}_\alpha K = 0 \Leftrightarrow P\Big(K \subset \bigcup G_n\Big) = 1, \tag{143}$$

où le premier membre est la capacité de K par rapport au noyau $(\text{dist}(t, s))^{-\alpha}$. Pour $\alpha \geq 1$, on a $T \subset \bigcup G_n$ p.s.

En relation avec ses études sur la percolation, Russell Lyons m'a indiqué la question suivante. On considère le disque $|z| < 1$ du plan de la variable complexe, muni de la métrique hyperbolique $ds = 2|dz|/(1-|z|^2)$, puis le processus de Poisson ponctuel F associé à l'aire hyperbolique, puis la réunion F_r des disques hyperboliques de rayon r centrés sur F. A quelle condition la réunion des rayons rencontrant F_r est-elle le disque entier p.s.? (On peut considérer F_r comme l'état de la "forêt hyperbolique" au temps r, et on se demande à partir de quel moment, pour l'observateur placé en 0, les arbres cachent la forêt; naturellement, la place de l'observateur est indifférente). De manière équivalente, on peut considérer le demi-plan $y > 0$ muni de la métrique $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}/y$, le processus de Poisson F dont l'intensité est l'aire hyperbolique restreinte à la bande $y < 1$, la réunion F_r des disques hyperboliques de rayon r centrés sur F et la projection G_r de F_r sur la droite réelle. A quelle condition a-t-on $G_r = \mathbf{R}$ p.s.? (ici, l'observateur est à l'infini, d'où la restriction de F à la bande $y < 1$). On observe que le disque hyperbolique de centre (x, y) et de rayon r coïncide avec le disque euclidien de centre $(x, y(1 + r^2/2))$ et de rayon ρy, avec $\rho = r\sqrt{1 + r^2/4}$. Ainsi G_r est la réunion d'intervalles $(x_\iota - \rho y_\iota, x_\iota + \rho y_\iota)$ associés aux points d'un processus de Poisson (x_ι, y_ι) d'intensité $dx\, dy/y^2$. On a $G_r = \mathbf{R}$ p.s. si et seulement si $2\rho \geq 1$, soit

$$r \geq (2 + \sqrt{5})^{-1/2} = 0.4858\ldots \tag{144}$$

RÉFÉRENCES

[1] A.-h. Fan, Thèse, Orsay 1989.

[2] —, *Sur quelques processus de naissance et de mort*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 441–444.

[3] P. J. Fitzsimmons, B. Fristedt and L. A. Shepp, *The set of real numbers left uncovered by random covering intervals*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70 (1985), 175–189.

[4] S. Janson, *Random coverings of the circle with arcs of random lengths*, in: Probability and Mathematical Statistics, Essays in honour of Carl-Gustav Esseen, Uppsala Univ., 1983, 62–73.

[5] J.-P. Kahane, *Some Random Series of Functions*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[6] —, *Intervalles aléatoires et décomposition des mesures*, C. R. Acad. Sci. Paris 304 (1987), 551–554.

[7] —, *Random multiplications, random coverings, and multiplicative chaos*, in: Proc. Special Year in Modern Analysis, E. Berkson, N. T. Peck and J. J. Uhl (eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 137, Cambridge Univ. Press, 1989, 196–255.

[8] —, *Recouvrement par des simplexes homothétiques aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 419–424.

[9] R. Lyons, *Random walks and percolation on trees*, Ann. Probab., 18 (1990), 931–958.

[10] B. B. Mandelbrot, *Renewal sets and random cutouts*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 22 (1972), 145–157.

[11] R. E. A. C. Paley and A. Zygmund, *On some series of functions* (1), (2), (3), Proc. Cambridge Philos. Soc. 26 (1930), 337–357; 26 (1930), 458–474; 28 (1932), 190–205.
[12] L. A. Shepp, *Covering the circle with random arcs*, Israel J. Math. 11 (1972), 328–345.
[13] —, *Covering the line with random intervals*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 23 (1972), 163–170.

CNRS URA D0757
UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
MATHÉMATIQUES (BÂT. 425)
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 30.3.1990