COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. LIV 1987 FASC. 2

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU PRODUIT DES k PREMIERS NOMBRES PREMIERS GÉNÉRALISÉS

PAR

GUY ROBIN (LIMOGES)

L'étude qui suit trouve son origine dans un article de Rosser et Schoenfeld ([4], p. 243). Ces auteurs indiquent que les majorations et minorations qu'ils viennent d'obtenir, d'une part pour la fonction de Tchebychef θ, d'autre part pour le k-ième nombre premier p_k, leur permettent de montrer que

$$(*) \qquad \theta(p_k) \geqslant k \log k \quad \text{pour } k \geqslant 13.$$

Or une étude directe de $\theta(p_k)$ montre par exemple que (voir proposition 2 ci-dessous)

$$\theta(p_k) \geqslant k \log k + \frac{k}{2} \log \log k \quad \text{pour } k \geqslant k_0,$$

dès que l'on a une majoration simple de type Tchebychef

$$\theta(x) < cx \quad \text{avec } c > 1 \text{ et } x > x_0(c).$$

On a donné dans [3] une preuve élémentaire de $(*)$ et nous nous proposons d'étudier ici plus en détail le comportement asymptotique de $\theta(p_k)$ pour une suite de nombres premiers généralisés.

Soit $\mathscr{P} = (p_k)_{k \in N^*}$ une suite strictement croissante de réels

$$1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$$

et tendant vers l'infini.

Cette définition des nombres premiers généralisés est celle de Horadam [2]. Elle diffère quelque peu de celle de Beurling [1], que l'on aurait pu aussi choisir pour cette étude.

On pose

$$\pi(x) = \pi_{\mathscr{P}}(x) = \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} 1, \quad \theta(x) = \theta_{\mathscr{P}}(x) = \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \leqslant x}} \log p.$$

Nous dirons que $f(x) \approx g(x)$ s'il existe $x_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$ tels que pour $x > x_0$ on ait

$$af(x) \leqslant g(x) \leqslant bf(x).$$

Nous nous proposons ici d'étudier le comportement asymptotique de

$$\theta(p_k) = \log\Big(\prod_{i=1}^{k} p_i\Big).$$

La proposition suivante est classique:

PROPOSITION 1. *Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes*:

(a) $\pi(x) \approx x/\log x$;

(b) $\theta(x) \approx x$;

(c) $p_k \approx k \log k$;

(d) $\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k + O(1))$, $k \geqslant 2$.

Si l'on remplace dans (a) la relation $\approx$ par l'inégalité $\leqslant$, on obtient une proposition analogue.

PROPOSITION 2. *Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes*:

(a) $\exists c_1 > 0,\ \forall x > 1\ \ \pi(x) \leqslant c_1\, x/\log x$;

(b) $\exists c_2 > 0,\ \forall x > 1\ \ \theta(x) \leqslant c_2\, x$;

(c) $\exists c_3 > 0,\ \forall k \in \boldsymbol{N}^*\ \ p_k \geqslant c_3\, k \log k$;

(d) $\exists c_4 \in \boldsymbol{R},\ \forall k \geqslant 2\ \ \theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log\log k + c_4)$.

Il n'est pas possible d'inverser les inégalités dans cette proposition; nous avons seulement:

PROPOSITION 3. *On considère les quatre affirmations suivantes*:

(a) $\exists c_1 > 0,\ \forall x > 1\ \ \pi(x) \geqslant c_1\, x/\log x$;

(b) $\exists c_2 > 0,\ \forall x > 1\ \ \theta(x) \geqslant c_2\, x$;

(c) $\exists c_3 > 0,\ \forall x \in \boldsymbol{N}^*\ \ p_k \leqslant c_3\, k \log k$;

(d) $\exists c_4 \in \boldsymbol{R},\ \forall k \geqslant 2\ \ \theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k + c_4)$.

Alors on a les implications:

$$\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)} \Leftrightarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(d)}.$$

Il n'y a aucune difficulté à démontrer ces trois propositions.

Un contre exemple à l'implication (a) $\Rightarrow$ (b) peut être construit de la façon suivante: soit $x_0 \in \boldsymbol{R}$; on concentre e^{x_0}/x_0 nombres premiers dans $[x_0, x_0 + 1]$, puis on procède de même pour e^{x_0} est ainsi de suite.

L'étude de l'implication (d) $\Rightarrow$ (c) fait l'objet du théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit* $\mathscr{P} = (p_k)_{k \in \boldsymbol{N}^*}$ *une suite strictement croissante de réels* > 1 *et tendant vers l'infini, vérifiant*:

(1) $$\theta(p_k) \leqslant k(\log k + \log\log k + O(1)), \quad k \geqslant 2;$$

(2) *il existe une fonction* $g(x)$ *positive croissante pour* $x \geqslant 1$ *telle que* (a) $g(x) = O(x \log x)$, (b) $p_k \geqslant k \log k / g(k)$ *et* (c) $g(x)$ *tend vers l'infini avec* x.

Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $k \in N^*$

$$p_k \leqslant ck \log k \log g(k). \tag{3}$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque l'on peut construire une suite $\mathscr{P} = (p_k)$ vérifiant (1) *et* (2) *et telle que*

$$\overline{\lim} \frac{p_k}{k \log k \log g(k)} \geqslant 1. \tag{4}$$

Démonstration. (a) Nous avons

$$\sum_{i=2}^{k} \log i \geqslant k \log k - k + o(k),$$

$$\sum_{i=2}^{k} \log \log i \geqslant k \log \log k + o(k),$$

$$\sum_{i=2}^{k} \log g(i) \leqslant k \log g(k) \quad \text{puisque } g \text{ croît.}$$

Par suite

$$\theta(p_k) \geqslant \sum_{i=1}^{k} (\log i + \log \log i - \log g(i)),$$

donc

$$\theta(p_k) \geqslant k(\log k + \log \log k - \log g(k) - 1 + o(1)). \tag{5}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\theta(p_{[k \log g(k) + k]}) - \theta(p_k) \\
&\quad \leqslant (k \log g(k) + k)(\log(k(\log g(k) + 1)) + \log \log(k \log g(k) + k) + O(1)) \\
&\qquad - k(\log k + \log \log k - \log g(k) + O(1)) \\
&\quad \leqslant k \log g(k)(\log k + \log \log k + \log \log g(k) + O(1)).
\end{aligned}$$

Comme d'autre part

$$\theta(p_{[k \log g(k) + k]}) - \theta(p_k) \geqslant (k \log g(k) - 1) \log p_k,$$

il vient

$$\log p_k \leqslant \log k + \log \log k + \log \log g(k) + O(1).$$

(b) D'après (5), si l'on pose

$$p_k = \max\left(k, \frac{k \log k}{g(k)}\right),$$

on peut trouver N_1 tel que

$$\theta(p_{N_1-1}) \leqslant N_1(\log N_1 + \log\log N_1 - \log g(N_1)).$$

On choisit $p_{N_1} = N_1 \log N_1 \log g(N_1) - 1$.

Supposons avoir déterminé une suite $N_1, N_2, \ldots, N_q = N$ et la suite $(p_n)_{n \leqslant N}$ telles que

$$\forall n < N \quad \theta(p_n) \leqslant n(\log n + \log\log n), \tag{6}$$

$$\forall q' \leqslant q \quad \theta(N_{q'-1}) \leqslant N_{q'}(\log N_{q'} + \log\log N_{q'} - \log g(N_{q'})), \tag{7}$$

$$\forall q' \leqslant q \quad p_{N_{q'}} = N_{q'} \log N_{q'} \log g(N_{q'}) - 1 \tag{8}$$

et prolongeons la suite (p_n) jusqu'à une valeur $N' = N_{q+1}$, de telle sorte qu'elle vérifie (6), (7), (8) avec N' à la place de N. On aura alors construit une suite vérifiant (1) et (4).

Soit M le plus grand entier tel que

$$N \log N \log g(N) \geqslant n \log n/g(n).$$

Posons

$$p_n = \begin{cases} p_N + (n-N)/(M-N) & \text{pour } N \leqslant n \leqslant M, \\ n \log n/g(n) & \text{pour } n > M. \end{cases}$$

Démontrer (6) pour $N' > M$ revient à montrer que

$$\forall n \leqslant M \quad \theta(p_n) \leqslant n(\log n + \log\log n).$$

Soit

$$N_1(\log N + \log\log N - \log g(N)) + (n+1-N)(\log N + \log\log N + \log\log g(N)) \\ \leqslant n(\log n + \log\log n).$$

Considérons

$$f(x) = (x+1-N)(\log N + \log\log N + \log\log g(N)) \\ + N(\log N + \log\log N - \log g(N) + c) - x(\log x + \log\log x).$$

La dérivée

$$f'(x) = (\log N + \log\log N + \log\log g(N) - (\log x + \log\log x)) \\ - \left(1 + \frac{1}{\log x}\right)$$

est décroissante, s'annule en x_0 et $f(x_0) = g(x_0)$ avec

$$g(x) = x\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) - N(\log g(N) + \log\log g(N)) \\ + \log N + \log\log N + \log\log g(N).$$

Comme $f'(N\log g(N)) < 0$, on a

$$N < x_0 < N\log g(N).$$

$g(x)$ étant croissante, il vient

$$f(x_0) < g(N\log g(N)) < 0.$$

La fonction $f(x)$ admettant un maximum négatif, il s'ensuit que (6) est démontré.

Pour $n \geqslant M$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\theta(p_n) &\leqslant M(\log M + \log\log M) + \sum_{k=M+1}^{n} (\log k + \log\log k - \log g(k)) \\ &\leqslant n(\log n + \log\log n - \log g(n) - 1 + o(1)).\end{aligned}$$

On peut donc choisir n assez grand pour avoir

$$\theta(p_{N'-1}) \leqslant N'(\log N' + \log\log N' - \log g(N')),$$

par suite (7) est réalisé.

Applications. (1) Si $\mathscr{P}$ vérifie (1), alors (2) est satisfait pour $g(k) = \alpha k \log k$ $(\alpha > 0)$ et par suite

$$p_k \leqslant ck(\log k)^2.$$

(2) Si $\mathscr{P}$ vérifie (1) et si $p_{k+1} \geqslant p_k + a$ pour $a > 0$, alors $p_k \geqslant \alpha k$ et (2) est satisfait pour $g(k) = \alpha \log k$ et par suite

$$p_k < ck\log k \log\log k.$$

Remarque. Une légère modification dans la démonstration du théorème permet de démontrer:

Pour $a > 0$ donné, il existe une suite $\mathscr{P}$ vérifiant (1), (4) et $p_{k+1} \geqslant p_k + a$.

(3) Si $\mathscr{P}$ vérifie (1) et l'inégalité de Brun–Titchmarsh

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y/\log y \quad \text{pour } y > 1,$$

alors (2) est satisfait pour $g(k) = \alpha > 0$ et alors

$$p_k \approx k\log k.$$

PROBLÈME. Si l'on suppose que $p_k = k(\log k)(1 + o(1))$, alors

$$\theta(p_k) = k(\log k + \log\log k - 1 + o(1)),$$

mais la réciproque n'est pas vraie.

Si l'on suppose

$$\theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right),$$

alors nécessairement $p_k \sim k\log k$.

P 1338. Que peut-on dire si l'on suppose un ordre supplémentaire dans le développement de $\theta(p_k)$ à savoir:

$$\theta(p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + \frac{\log\log k}{\log k} + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right)?$$

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Beurling, *Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. I*, Acta Math. 68 (1937), pp. 255–291.

[2] E. N. Horadam, *Arithmetical functions of generalized primes*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), pp. 626–709.

[3] G. Robin, *Estimation de la fonction de Tchebychef θ sur le $k^{ième}$ nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$, nombre de diviseurs de n*, Acta Arith. 42 (4) (1983), pp. 367–389.

[4] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Math. Comp. 29 (1975), pp. 243–269.

U.E.R. DES SCIENCES DE LIMOGES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE
123 RUE ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX
FRANCE

Reçu par la Rédaction le 21. 6. 1984