COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLIV 1981 FASC. 1

SUR LES SUPPORTS DES TRANSFORMÉES DE FOURIER-STIELTJES

PAR

COLIN C. GRAHAM (EVANSTON, ILLINOIS),
BERNARD HOST ET FRANÇOIS PARREAU (PARIS)

Soit G un groupe abélien localement compact et $\hat{G}$ son dual (noté mutliplicativement). Pour $\Theta \subset \hat{G}$, $\Omega(\Theta)$ désigne l'ensemble des „mots" $\theta_1^{\varepsilon_1} \ldots \theta_n^{\varepsilon_n}$, où les θ_j sont des éléments deux-à-deux distincts de Θ, et les ε_j des entiers de valeur absolue $\leqslant 1$.

$M(G)$ désigne l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G, $\Delta M(G)$ son spectre, et $\operatorname{Rad} L^1(G)$ est l'idéal des mesures de $M(G)$ dont la transformée de Gelfand s'annule hors de $\hat{G}$.

Les autres notations sont celles de [1] et [2], dont cet article renforce les résultats.

THÉORÈME. *Soit G un groupe abélien localement compact et $\mu \in M(G)$, $\mu \notin \operatorname{Rad} L^1(G)$. Alors il existe $\gamma \in \hat{G}$ et un ensemble infini Θ de $\hat{G}$ tels que $\hat{\mu}(\gamma\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega(\Theta)$.*

Démonstration. Soit χ un caractère de $\Delta M(G) \setminus \hat{G}$ tel que $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$; on définit, d'après [3], un caractère idempotent $h = |\chi|^0$ de $\Delta M(G) \setminus \hat{G}$ tel que $h\mu \neq 0$. Alors $h(\mu * h\mu) = h\mu * h\mu \neq 0$, donc $\mu * h\mu \neq 0$, et il existe $\gamma \in \hat{G}$ tel que

$$\hat{\mu}(\gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad (h\mu)\hat{\ }(\gamma) \neq 0.$$

Soit $\nu = \gamma\mu * \bar{\gamma}\bar{\mu}$; ν est réelle, $\gamma \operatorname{Supp} \hat{\nu} \subset \operatorname{Supp} \hat{\mu}$, et

$$\hat{\nu}(1) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\nu}(h) \neq 0.$$

De même, $(\nu * h\nu)\hat{\ }(h) = (\hat{\nu}(h))^2 \neq 0$ et donc $\nu * h\nu \notin L^1(G)$; ceci prouve qu'il existe $\theta_1 \in \hat{G} \setminus \{1\}$ tel que $\hat{\nu}(\theta_1) \neq 0$ et $\hat{\nu}(h\theta_1) \neq 0$.

ν étant réelle, on a aussi $\hat{\nu}(\bar{\theta}_1) \neq 0$ et $\hat{\nu}(h\bar{\theta}_1) \neq 0$.

Soit $n \geqslant 1$; on suppose construits des éléments $\theta_1, \ldots, \theta_n$ deux-à-deux, distincts de $\hat{G} \setminus \{1\}$, tels que, pour tout $\omega = \Omega(\{\theta_1, \ldots, \theta_n\})$,

$$\hat{\nu}(\omega) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\nu}(h\omega) \neq 0.$$

Alors, la mesure réelle $\nu_n = \ast\{\omega\nu\colon \omega \in \Omega(\{\theta_1, \ldots, \theta_n\})\}$ vérifie $\hat{\nu}_n(h) \neq 0$; de même $(\nu_n * h\nu_n)\hat{}\,(h) \neq 0$, $\nu_n * h\nu_n \notin L^1(G)$, et il existe $\theta_{n+1} \in \hat{G} \setminus \{1\}$, distinct de $\theta_1, \ldots, \theta_n$, tel que

$$\hat{\nu}_n(\theta_{n+1}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\nu}_n(h\theta_{n+1}) \neq 0.$$

ν_n étant réelle, on a encore $\hat{\nu}_n(\bar{\theta}_{n+1}) \neq 0$ et $\hat{\nu}_n(h\bar{\theta}_{n+1}) \neq 0$, et donc $\hat{\nu}(\omega) \neq 0$ et $\hat{\nu}(h\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega(\{\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}\})$.

Par récurrence, on obtient donc $\Theta = \{\theta_j\colon j \geqslant 1\}$ infini, tel que $\hat{\nu}(\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega(\Theta)$.

Alors $\hat{\mu}(\gamma\omega) \neq 0$ pour tout $\omega \in \Omega(\Theta)$.

Remarques. (i) On peut extraire, soit de $\{\theta_j\colon j \geqslant 1\}$, soit de $\{\bar{\theta}_k\theta_j\colon j > k\}$ pour un certain k, un sous-ensemble dissocié (voir la fin de la démonstration du théorème 1 de [2]). Si G est compact, le théorème donne, de même que le théorème 1 de [2], une caractérisation arithmétique des ensembles de G supportant la transformée de Fourier-Stieltjes d'une mesure $\mu \notin \mathrm{Rad}\,L^1(G)$.

(ii) Si G est non compact et $\mu \in M(G) \setminus \mathrm{Rad}\,L^1(G)$, on peut construire $\{\theta_j\colon j \geqslant 1\}$ de sorte que, pour un ouvert $U \subset \hat{G}$, $\omega_1 U \cap \omega_2 U = \emptyset$ pour tout couple (ω_1, ω_2) de mots distincts de $\Omega(\{\theta_j\})$.

(iii) Nous ne savons pas si le théorème reste valable encore pour $\mu \in \mathrm{Rad}\,L^1(G) \setminus L^1(G)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] C. C. Graham, *Non-Sidon sets in the support of a Fourier-Stieltjes transform*, Colloquium Mathematicum 36 (1976), p. 269-273.

[2] B. Host et F. Parreau, *Sur les mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes ne tend pas vers* 0 *à l'infini*, ibidem 41 (1979), p. 285-289.

[3] J. L. Taylor, *Measure algebras*, Conference Board of the Mathematical Sciences 16 (1973).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NORTHWESTERN UNIVERSITY
EVANSTON, ILLINOIS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
C.S.P.
UNIVERSITÉ PARIS-NORD

Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1978