COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLI 1979 FASC. 2

SUR LES MESURES DONT LA TRANSFORMÉE DE FOURIER-STIELTJES NE TEND PAS VERS 0 À L'INFINI

PAR

BERNARD HOST ET FRANÇOIS PARREAU (PARIS)

1. G désigne un groupe abélien compact, Γ son dual, M l'algèbre de convolution des mesures de Radon sur G, et M_0 l'idéal de M formé des mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjes tend vers 0 à l'infini.

Les notations d'analyse harmonique sont celles de [3]. Nous appelons *spectre de Fourier* d'une mesure de M le support de sa transformée de Fourier-Stieltjes.

Soit $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de Γ; nous appelons *mot* de cette suite tout produit fini $\gamma_1^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_n^{\varepsilon_n}$, où $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont des entiers de valeur absolue $\leqslant 1$.

La suite (γ_n) est *dissociée* si, pour toute suite finie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ d'entiers de valeur absolue $\leqslant 2$, $\gamma_1^{\varepsilon_1}\ldots\gamma_n^{\varepsilon_n} = 1$ si et seulement si $\gamma_k^{\varepsilon_k} = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Alors, pour $0 < r \leqslant 1/2$, les mesures

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant n} (1+r\gamma_k+r\bar{\gamma}_k)m,$$

où m est la mesure de Haar de G, convergent vaguement dans M vers une mesure de probabilité ϱ appelée *produit de Riesz*; on en trouve une étude détaillée dans [1]. En particulier, ce produit de Riesz n'est pas dans M_0 et son spectre de Fourier est l'ensemble des mots de la suite dissociée (γ_n).

Les démonstrations utilisent le calcul sur le spectre Δ de M, développé dans [4] dans le cadre général, et dans [1] de façon plus concrète.

$\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de la mesure μ de M. Γ est plongé dans Δ, la restriction de $\hat{\mu}$ à Γ étant la transformée de Fourier-Stieltjes de μ. Δ est muni d'une conjugaison continue et d'une multiplication séparément continue prolongeant celles de Γ. De plus Δ opère sur M de sorte que, pour $\varphi, \psi \in \Delta$ et $\mu \in M$, $\varphi\mu$ soit absolument continue par rapport à μ et

$$(\varphi\mu)^\wedge(\psi) = \hat{\mu}(\varphi\psi) = \hat{\mu}(\psi\varphi).$$

Pour une partie F de Γ, $\overline{F}$ désignera l'adhérence de F dans Δ. $\overline{\Gamma}$ est un semi-groupe stable par conjugaison.

Une mesure μ de M appartient à M_0 si et seulement si $\hat{\mu}$ s'annule sur $\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$. Cet ensemble est compact et, pour $\varphi \in \overline{\Gamma}$ et $\psi \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$, on a $\varphi\psi \in \overline{\Gamma}\setminus\Gamma$. En effet, Γ est l'ensemble des caractères de Δ ne s'annulant pas identiquement sur l'idéal L^1 des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar m de G; donc Γ est ouvert dans Δ et, si $\nu \in L^1$, $\varphi\nu \in L^1$ et $(\varphi\nu)^\wedge(\psi) = \hat{\nu}(\varphi\psi) = 0$, d'où $\varphi\psi \notin \Gamma$.

Un caractère φ de Δ est *positif* si, pour toute mesure positive ν, $\hat{\nu}(\varphi)$ est positif ou nul. On définit alors, pour tout complexe z de partie réelle positive, un *caractère* φ^z de sorte que pour toute mesure μ de M la fonction $z \mapsto \hat{\mu}(\varphi^z)$ soit analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$.

2. Spectres de Fourier des mesures n'appartenant pas à M_0.

LEMME 1. *Soient μ une mesure de M, φ un caractère positif de Δ et $\gamma \in \Gamma$; alors,*

ou bien $\hat{\mu}(\gamma\varphi^n) = 0$ *pour tout* $n > 0$,

ou bien $\sum_{n>0,\, \hat{\mu}(\gamma\varphi^n)=0} n^{-1}$ *converge.*

Démonstration. La fonction $z \mapsto \hat{\mu}(\gamma\varphi^z) = (\gamma\mu)^\wedge(\varphi^z)$ est analytique et bornée sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$. Le lemme résulte donc du théorème de Müntz-Szász.

THÉORÈME 1. *Soient μ une mesure de M et E une partie de Γ, telles que μ n'appartienne pas à M_0 et que $\hat{\mu}$ tende vers 0 à l'infini sur $\Gamma\setminus E$. Alors E contient un translaté du spectre de Fourier d'un produit de Riesz.*

Démonstration. Soient χ un caractère de $\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$, et $\varphi = \chi\overline{\chi}$. φ est un caractère positif de $\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$, et comme $\varphi\mu$ n'est pas nulle, il existe un $\alpha \in \Gamma$ tel que $\hat{\mu}(\alpha\varphi) \neq 0$.

On construit par récurrence une suite $(\beta_p)_{p\geqslant 1}$ d'éléments deux-à-deux distincts de Γ, et une suite $(n_p)_{p\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs, de sorte que, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout mot β de la suite (β_p) construit sur les k premiers termes de cette suite,

(a) $\hat{\mu}(\alpha\beta\varphi^{n_k}) \neq 0$,

(b) $\alpha\beta \in E$ si $\beta \neq 1$.

Prenons, en effet, $\beta_1 = 1$, $n_1 = 1$ et supposons construits les k premiers termes des deux suites avec les propriétés (a) et (b). Soit A l'ensemble (fini) des mots construits sur les k premiers β_p.

D'après le lemme 1, il existe $n_{k+1} > 0$ tel que, pour tout $\beta \in A$,

$$\hat{\mu}(\alpha\beta\varphi^{n_{k+1}}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\alpha\beta\varphi^{n_{k+1}+n_k}) \neq 0.$$

Si $\beta \in A$, $\hat{\mu}(\alpha\beta\varphi^{n_k}) \neq 0$. Comme $\hat{\mu}$ tend vers 0 à l'infini sur $\Gamma\setminus E$, $\alpha\beta\varphi^{n_k} \notin \overline{(\Gamma\setminus E)}$. Il existe donc un voisinage V de φ^{n_k} dans Δ tel que, pour tout $\beta \in A$ et pour tout $\chi \in V$,

$$\alpha\beta\chi \notin (\overline{\Gamma \setminus E}) \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\alpha\beta\chi\varphi^{n_{k+1}}) \neq 0.$$

φ^{n_k} étant un caractère positif, V contient un voisinage W de φ^{n_k} stable par conjugaison, et comme $\varphi^{n_k} \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, $W \cap \Gamma$ est infini.

Soit β_{k+1} un élément de $W \cap \Gamma$ distinct des k premiers β_p. Alors, pour tout $\beta \in A$,

$$\alpha\beta\beta_{k+1} \in E \quad \text{et} \quad \alpha\beta\bar{\beta}_{k+1} \in E,$$

$$\hat{\mu}(\alpha\beta\beta_{k+1}\varphi^{n_{k+1}}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\alpha\beta\bar{\beta}_{k+1}\varphi^{n_{k+1}}) \neq 0..$$

Les suites (β_p) et (n_p), ainsi construites jusqu'au rang $k+1$, vérifient les propriétés (a) et (b) jusqu'à ce rang.

A partir de la suite (β_p), on construit une suite dissociée $(\gamma_p)_{p\geq 1}$:

si β_p^2 prend une infinité de valeurs, la suite (β_p) contient des sous--suites dissociées; soit $(\gamma_p)_{p\geq 1}$ l'une d'elles;

dans le cas contraire, soit $(\delta_p)_{p\geq 1}$ une sous-suite de (β_p) telle que δ_p^2 soit constant et que les $(\delta_{2p}\bar{\delta}_{2p+1})$ soient deux-à-deux distincts; alors la suite $(\delta_{2p}\bar{\delta}_{2p+1})_{p\geq 1}$ contient des sous-suites dissociées, et soit $(\gamma_p)_{p\geq 1}$ l'une d'elles.

Dans les deux cas, pour tout mot γ de la suite dissociée $(\gamma_p)_{p\geq 2}$, $\alpha\gamma_1\gamma \in E$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. *Si la mesure μ de M n'appartient pas à M_0, le spectre de Fourier de μ contient un translaté du spectre de Fourier d'un produit de Riesz.*

3. Ensembles de type M_0.

Définition. On dit que la partie E de Γ est de *type* M_0 si toute mesure de M dont le spectre de Fourier est inclus dans E appartient à M_0.

Du théorème 1, on tire immédiatement les résultats suivants:

Corollaire 2. *La partie E de Γ n'est pas de type M_0 si et seulement si E contient un translaté du spectre de Fourier d'un produit de Riesz.*

Cette caractérisation des ensembles de type M_0 est purement arithmétique.

Corollaire 3. *Si E est de type M_0 et si la transformée de Fourier-Stieltjes de la mesure μ de M tend vers 0 à l'infini sur $\Gamma \setminus E$, μ appartient à M_0.*

On rappelle que, pour une partie E de Γ, $B(E)$ désigne l'algèbre des restrictions à E des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures de M.

Dans le cas où $\Gamma \setminus E$ est de type M_0, il est possible de déduire des propriétés de l'algèbre M/M_0 certaines propriétés de $B(E)$.

Lemme 2. *Tout idempotent de l'algèbre M/M_0 est l'image au quotient d'un idempotent de M.*

En d'autres termes, si 0 et 1 sont les seules valeurs adhérentes de $\hat{\mu}(\gamma)$ quand γ tend vers l'infini dans Γ, μ est la somme d'une mesure idempotente et d'une mesure de M_0.

Ce résultat provient du théorème 6.3.3 de [4]. Il s'obtient plus directement de la démonstration du théorème des idempotents de Cohen donnée en 2.5 de [2].

Soit en effet $\mu \in M$, avec $\mu^2 - \mu \in M_0$. Pour $\varphi \in \bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\varphi\gamma$ est dans $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$, $(\varphi\mu)^{\wedge}(\gamma)$ vaut 0 ou 1, et $\varphi\mu$ est idempotente.

La proposition 5 de [2] s'applique alors si on remplace Γ par $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$; en particulier, on n'a qu'un nombre fini de mesures $\varphi\mu$ distinctes pour les caractères φ positifs de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$. On trouve de même, pour chacun de ces caractères φ, une partie élémentaire de μ, de la forme $\sum n_j \gamma_j m_H$, où m_H est la mesure de Haar d'un sous-groupe compact H de G.

La somme η de ces parties élémentaires est telle que $\varphi\mu = \varphi\eta$ pour tout caractère φ positif de $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$; il en résulte que $\mu - \eta \in M_0$.

D'autre part, $\eta^2 - \eta \in M_0$ et $\hat{\eta}$ a ses valeurs entières; il est alors immédiat que η est la somme d'une mesure idempotente et d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Haar m de G.

Proposition 1. *Si E est une partie de Γ telle que $\Gamma\setminus E$ soit de type M_0, tout idempotent de l'algèbre $B(E)$ est la restriction d'un idempotent de $B(\Gamma)$.*

Démonstration. Soit f un idempotent de $B(E)$, et μ une mesure de M telle que $\hat{\mu} = f$ sur E. La transformée de Fourier-Stieltjes de $\mu^2 - \mu$ étant nulle sur E, cette mesure appartient à M_0 et, d'après le lemme 2, il existe une mesure idempotente η de M telle que $\mu - \eta \in M_0$.

Sur E, $f - \hat{\eta}$ est à valeurs entières et tend vers 0 à l'infini, donc est nulle sauf en un nombre fini de points. Il existe donc une mesure ν absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G, telle que $\eta + \nu$ soit idempotente et $f = \hat{\eta} + \hat{\nu}$ sur E.

D'autre part, le résultat de [2] se généralise à ces algèbres $B(E)$:

Si $\Gamma\setminus E$ est un ensemble de type M_0, tout idéal fermé de type fini de $B(E)$ est engendré par un idempotent.

La démonstration sera publiée ultérieurement.

Remarque. En collaboration avec C. C. Graham, les auteurs ont obtenu plus récemment le résultat suivant (à paraître dans cette revue): si une mesure de M n'appartient pas au radical de L^1, son spectre de Fourier contient un translaté du spectre de Fourier d'un produit de Riesz.

TRAVAUX CITÉS

[1] G. Brown, *Riesz products and generalized characters*, Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1975), p. 209.

[2] B. Host et F. Parreau, *Sur un problème de I. Glicksberg: les idéaux fermés de type fini de $M(G)$*, Annales de l'Institut Fourier 28 (3) (1978), p. 143.

[3] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Tracts in Mathematics 12, New York 1962.

[4] J. L. Taylor, *Measure algebras*, Regional Conference Series in Mathematics 16, Conference Board of the Mathematical Sciences, 1973.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, C.S.P.
UNIVERSITÉ PARIS-NORD
VILLETANEUSE

Reçu par la Rédaction le 12. 9. 1977